УДК 519.9

А.Н. ВОРОНИН

КОМПРОМИССНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: *нелинейное программирование, целевая функция, многокритериальная оптимизация, ограничения, нелинейная схема компромиссов.*

СОДЕРЖАНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Задачи оптимизации в различных предметных областях обычно сводятся к поиску экстремума целевой функции, ограниченной условиями, которые наложены на аргументы оптимизации. Для решения таких задач задействован аппарат математического программирования. Изложим кратко некоторые основные понятия из этой области.

Сформулируем достаточно общую задачу математического программирования.

Найти

$$x^* = \arg \underset{x \in X}{\operatorname{extr}} f(x)$$

при $X = \{x | x_i \geq 0 \ \forall i \in [1, n], \ \psi_j(x) \leq 0 \ \forall j \in [1, m]\}$. Функции $f(x)$ и $\psi_j(x)$ — произвольные.

В зависимости от свойств целевой функции и функций ограничений задачи математического программирования подразделяются на два основных класса:

- задачи линейного программирования,
- задачи нелинейного программирования.

В настоящей работе будем рассматривать задачи нелинейного программирования.

Для конструктивного решения задачи вводятся дополнительные частные предположения. В наиболее простом случае рассматривается задача без ограничений (оптимизация в открытой области, безусловная оптимизация). Для дифференцируемых функций $f(x)$ обычно используется необходимое условие экстремума функции как следствие из теоремы Ферма: $\partial f(x) / \partial x_i = 0, \ i \in [1, n]$, имея в виду, что достаточное условие (минимум или максимум) вытекает из физического смысла задачи. При необходимости достаточное условие определяется по знаку второй производной в точке экстремума (знак + означает минимум функции, а знак – означает максимум). Решая эту систему уравнений, получаем требуемый набор x^* из n аргументов оптимизации.

Наличие ограничений делает задачи математического программирования принципиально отличными от обычных задач математического анализа по отысканию экстремальных значений функции. В этом случае имеет место условная оптимизация.

В классической постановке рассматривается случай строгого равенства ограничений некоторым константам: $\psi_j(x) = b_j \ \ \forall j \in [1, m]$ — так называемая изопериметрическая задача (задача Дидоны).

На рис. 1 показана двумерная по аргументам и с одним ограничением изопериметрическая задача. Поверхность функции $f(x)$ представляется линиями равно-

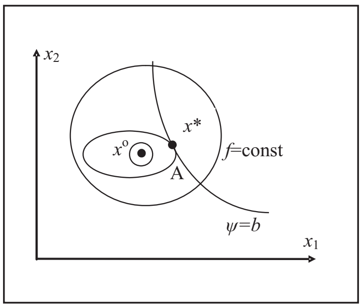

Рис. 1

го уровня $f(x) = \text{const}$ (как на топографических картах), а ограничение представляется проекцией пространственной кривой $\psi(x) = b$ на координатную плоскость.

Для решения изопериметрических задач используют метод множителей Лагранжа. Составляется функция Лагранжа

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [b_j - \psi_j(x)],$$

где λ_j, $j \in [1, m]$, — неопределенные множители Лагранжа, исследуется на безусловный экстремум и решается система уравнений

$$\partial\Phi / \partial x_i = 0, \ \ i \in [1, n];$$

$$\partial\Phi / \partial\lambda_j = \psi_j - b_j = 0, \ \ j \in [1, m].$$

Получаем значения n координат вектора x^* (точка A на рис. 1) и, как побочный результат, значения m координат вектора λ^* множителей Лагранжа, при котором уравнения связей выполняются строго.

На основании анализа множителей Лагранжа по величине l-го множителя можно судить о мере несоответствия l-го условия связи и требования экстремизации целевой функции. Действительно, пусть кривая функции $\psi(x) = b$ на рис. 1 проходит через точку $x^{(\text{o})}$ экстремума функции $f(x)$. В этом случае процедура множителей Лагранжа дает результат $x^* = x^{\text{o}}$ и $\lambda = 0$, т.е. требования выполнения ограничения и экстремизации целевой функции не противоречат один другому, и, наоборот, чем дальше точка x^* от x^{o}, тем больше значение коэффициента λ. Следовательно, множители Лагранжа λ в данной задаче являются векторной мерой, определяющей, насколько уравнения ограничений «препятствуют» достижению экстремума функции $f(x)$. Исходя из этого может быть получена методика решения, при которой условия связи выполняются не точно, а компромиссно.

Проблема состоит в том, чтобы полученное решение отражало компромисс между противоречивыми требованиями экстремизации целевой функции и выполнения ограничений. Такая ситуация дает основание для привлечения к решению задачи подхода многокритериальной (в данном случае двухкритериальной) оптимизации.

КОМПРОМИССНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть выражения $\psi_j(x) = 0 \ \ \forall j \in [1, m]$ таковы, что по физическим соображениям могут быть допущены отступления от строгих равенств в некоторых заданных пределах:

$$\psi_j(x) \le A_j, \ \ j \in [1, m].$$

Положим для определенности, что целевая функция $f(x)$ является минимизируемой. Задана некоторая предельная величина, выше которой минимизируемая целевая функция не может (или не должна) подниматься: $f(x) \le B$. Тогда может быть предложена следующая процедура условной оптимизации, основанная на концепции нелинейной схемы компромиссов [1, 2]:

$$x^* = \arg\min_{x\in X}\{\sum_{j=1}^{m} A_j [A_j - \psi_j(x)]^{-1} + B[B - f(x)]^{-1}\}. \qquad (1)$$

Из этого следует, что полученное решение является результатом компромисса между стремлением удовлетворить строгие ограничения $\psi_j(x) = 0\ \forall j \in [1, m]$ и тенденцией минимизировать целевую функцию $f(x)$. При этом решение осуществляется по нелинейной схеме компромиссов, основанной на принципе «подальше от предельно допустимых значений A_j, $j \in [1, m]$, и B». Скалярная свертка уравнений связи и целевой функции по нелинейной схеме в формуле (1) приведена в унифицированной форме. При необходимости индивидуальные предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), могут быть учтены введением весовых коэффициентов:

$$x^* = \arg\min_{x\in X}\left\{\beta\sum_{j=1}^{m}\alpha_j A_j [A_j - \psi_j(x)]^{-1} + (1-\beta)B[B - f(x)]^{-1}\right\}, \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m}\alpha_j = 1,$$

где α_j, $j \in [1, m]$, — весовые коэффициенты, определяющие значимость выполнимости соответствующих ограничений; β — весовой коэффициент, устанавливающий относительную важность для ЛПР противоречивых тенденций: выполнения ограничений и минимизации целевой функции.

Пример. Задана целевая функция в виде эллиптического параболоида (рис. 2)

$$f(x) = \frac{(x_1 - 6)^2}{2} + \frac{(x_2 - 5)^2}{4}$$

с минимумом в точке $x^{o} = (6; 5)$. В пространстве (x_1, x_2) заданы уравнения связи (их пересечение дает начало координат) в виде ограничений $\psi_1(x) = x_1 = 0$ и $\psi_2(x) = x_2 = 0$, которые целесообразно выполнять строго, однако отклонения допустимы в пределах $\psi_1 = x_1 \leq A_1 = 4$ и $\psi_2 = x_2 \leq A_2 = 3$.

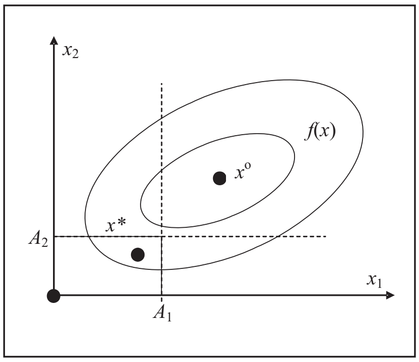

Рис. 2

Естественный максимум минимизируемой целевой функции достигается при строгом выполнении ограничений (в данном примере в начале координат $x_1, x_2 = 0$) и составляет $f(x) \leq B = 24{,}25 \approx 25$.

Ставится задача: найти такие значения аргументов оптимизации x_1^* и x_2^*, при которых требования минимизации целевой функции и выполнения ограничений удовлетворяются компромиссно.

Подставляем численные значения в выражение для компромиссной условной оптимизации в унифицированной форме (без весовых коэффициентов):

$$x^* = \arg\min_{x\in X}\left\{\frac{4}{4-x_1} + \frac{3}{3-x_2} + \frac{25}{25 - \left[\frac{(x_1-6)^2}{2} + \frac{(x_2-5)^2}{4}\right]}\right\}.$$

Решить эту задачу можно и аналитически, выполнив безусловную минимизацию скалярной свертки. Однако в практических случаях аналитический расчет может оказаться громоздким.

Для решения широкого спектра оптимизационных задач разработана и изложена в работе [1] программа векторной оптимизации TURBO-OPTIM. Программа выполнена на языке Borland C++3.1 с использованием библиотеки Turbo Vision, что обеспечивает эффективное использование ресурсов ЭВМ, стандартизованную и удобную среду для пользователя, простоту модификации и отладки.

Для работы с программой необходимо выполнить следующие этапы:

— выделить набор частных критериев так, чтобы все они принимали неотрицательные значения и требовали минимизации;

— определить допустимое предельное значение для каждого критерия;

— выделить набор параметров (независимых переменных), от которых зависят частные критерии;

— определить диапазон изменения каждого параметра (минимальное, стартовое и максимальное значения);

— задать ограничения для параметров, имеющие вид неравенств $g_j(r) \le 0,\ j \in [1, k]$, где k — число ограничений;

— определить вид зависимости частных критериев от параметров.

Программа позволяет решать задачи оптимизации для следующих случаев связи частных критериев с аргументами оптимизации (параметрами):

• критерии выражаются через параметры явно, известны аналитические зависимости;

• критерии являются некоторыми функционалами, и для расчета их значений требуется решение системы дифференциальных уравнений;

• зависимости критериев от параметров неизвестны, и для определения значений параметров необходимо проведение экспериментов;

• значения критериев можно получить, выполнив написанную пользователем программу;

• имеется таблица зависимости частных критериев от параметров.

В каждом случае программа представляет пользователю средства нахождения минимума обобщенного критерия, построенного по нелинейной схеме компромиссов, одним из методов оптимизации: 1) метод симплекс-планирования в модификации Нелдера–Мида; 2) нелокальный метод нелинейного программирования (дуальный метод оптимизации).

Используя этапы работы с программой, устанавливаем режим «аналитика», метод оптимизации «симплекс-планирование» (по умолчанию) и далее вводим числовые данные:

$$x_{1\min} = 0;\ x_{1\text{start}} = 2;\ x_{1\max} = A_1 = 4,$$
$$x_{2\min} = 0;\ x_{2\text{start}} = 2;\ x_{2\max} = A_2 = 3,$$
$$y_{1\max} = \psi_{1\max} = A_1 = 4;\ y_{2\max} = \psi_{2\max} = A_2 = 3;\ y_{3\max} = f_{\max} = B = 25.$$

Затем даем команду «выполнить», и программа определяет искомые значения аргументов оптимизации: $x_1{}^* = 1{,}82$; $x_2{}^* = 0{,}45$ и компромиссно-оптимальное значение целевой функции $f(x)^* = 13{,}89$.

Описанный подход может в некоторых случаях быть альтернативой как методу множителей Лагранжа, так и методу, вытекающему из теоремы Куна–Таккера для ограничений типа неравенств. Изложим кратко идею метода.

Если заданы неравенства $\psi(x) \le 0$, а функции $f(x)$ и $\psi(x)$ выпуклые, то для решения задачи используется теорема Куна–Таккера, которая обобщает теорему Лагранжа для неклассических задач. Краткая формулировка теоремы Куна–Таккера: для того чтобы целевая функция $f(x)$ достигала в точке x^* глобального условного экстремума, необходимо и достаточно, чтобы x^*, λ^* являлась глобальной седловой точкой функции Лагранжа. Это значит, что $\Phi(x, \lambda^*) \ge \Phi(x^*, \lambda^*) \ge \Phi(x^*, \lambda)$ для всех x, λ из области определения задачи.

Согласно этой теореме при заданных предположениях поверхность функции Лагранжа в пространстве (x, λ) имеет оптимальную точку x^*, λ^*, которая является седловой и определяется как

$$x^*, \lambda^* = \arg \min_x \max_\lambda \Phi(x, \lambda).$$

Алгоритм решения задач поиска экстремумов в случае функций с седловыми точками обычно сводится к решению системы уравнений

$$x_i^* \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_{x_i^*} = 0, \ i \in [1, n]; \ \ \lambda_j^* \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} \right)_{\lambda_j^*} = 0, \ j \in [1, m].$$

Предложенный компромиссный метод позволяет не применять вспомогательной категории неопределенных множителей Лагранжа, используемой как при решении изопериметрических задач, так и в процедуре седловых точек Куна–Таккера. Иногда даже незначительный отход от строгого выполнения ограничений (или от седловой точки) позволяет существенно улучшить целевую функцию. Возможность назначения допустимых пределов для изменения ограничений и целевой функции по физическим соображениям дает ЛПР дополнительные возможности при решении практических оптимизационных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Козлов А.И. Векторная оптимизация динамических систем. — К.: Техніка, 1999. — 284 с.
2. Воронин А.Н. Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах оценивания и оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 4. — С. 106–114.

Поступила 10.11.2011