УДК 519.8

С.О. МАЩЕНКО

ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМ МНОЖЕСТВОМ ИНДЕКСОВ ОГРАНИЧЕНИЙ

Ключевые слова: *нечеткое множество, нечеткое множество типа 2, нечеткое математическое программирование, принятие решений.*

Классическая постановка задачи математического программировании состоит в поиске экстремума так называемой целевой функции $g(x)$ на множестве F допустимых альтернатив x — элементов некоторого множества X. Целевая функция характеризует полезность альтернатив для лица, принимающего решение (ЛПР), и представляет одно из свойств: цену, вес и т.п. Множество допустимых альтернатив F задается на X некоторой совокупностью $M = \{1, 2, \dots, m\}$ ограничений-неравенств вида $f_i(x) \le 0,\ i \in M$.

Различные формы описания нечетких исходных данных могут приводить к различным постановкам задач нечеткого математического программирования (НМП): достижения нечетко поставленной цели при нечетких ограничениях [1]; с нечетким множеством альтернатив [2]; с целью, заданной нечетким отображением [2]; со «смягченной» целевой функцией и (или) ограничениями [3]; с нечеткими коэффициентами [3]; векторной оптимизации на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив [4] и др.

В отмеченных постановках задач НМП нечеткость проявляется как в описании целевой функции, так и множества альтернатив, не касаясь множества ограничений. В настоящей работе исследуется задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений.

Предположим, что ЛПР не может четко указать, какие ограничения из множества $M = \{1, 2, \dots, m\}$ в действительности должны определять допустимые альтернативы, а может лишь задать функцию принадлежности $\mu(i)$, $i \in M$, нечеткого множества индексов $\widetilde{M} \subseteq M$ актуальных, по его мнению, ограничений. Без ограничения общности будем считать, что ЛПР максимизирует целевую функцию. Тогда возникает задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений в следующей постановке:

$$g(x) \to \max,\ x \in X,\ f_i(x) \le 0,\ i \in \widetilde{M}. \tag{1}$$

Обозначим $F_i = \{x \in X \mid f_i(x) \le 0\}$ множество альтернатив, удовлетворяющих ограничению с индексом $i \in M$. Тогда задачу (1) можно представить в виде

$$g(x) \to \max,\ x \in \widetilde{F}, \tag{2}$$

где $\widetilde{F} = \bigcap_{i \in \widetilde{M}} F_i$ — множество, являющееся пересечением нечеткого подмножества $\widetilde{M} \subseteq M$ четких множеств F_i, $i \in M$. Определим это понятие в соответствии с подходом, предложенным в [5].

На множестве альтернатив X определим $\forall\, i \in M$ функцию принадлежности (характеристическую функцию) четкого множества F_i, которую обозначим

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & f_i(x) \le 0, \\ 0, & f_i(x) > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим множество $F = \bigcap_{i \in M} F_i$, являющееся пересечением четкого множества M четких множеств F_i, $i \in M$. В соответствии с классической теорией оно представляет собой четкое множество, которое на X задается функцией принадлежности $\varphi(x) = \min_{i \in M} \varphi_i(x)$, $x \in X$. Нетрудно заметить, что значение функции принадлежности $\varphi(x)$ при каждом фиксированном значении альтернативы $x \in X$ фактически определяется как значение целевой функции тривиальной задачи «четкого» математического программирования $\varphi = \min_{i \in M} \varphi_i$ (в данной записи не указано фиксированное значение $x \in X$).

Рассмотрим теперь пересечение $\widetilde{F} = \bigcap_{i \in \widetilde{M}} F_i$ нечеткого множества $\widetilde{M}$ четких множеств F_i, $i \in M$. Естественное обобщение классической операции пересечения четкого множества M четких множеств приводит к тому, что множество $\widetilde{F}$ задается функцией принадлежности

$$y(x) = \min_{i \in \widetilde{M}} \varphi_i(x), \quad x \in X. \tag{3}$$

Очевидно, что значение функции принадлежности $y(x)$ для каждой фиксированной альтернативы $x \in X$ определяется как значение целевой функции задачи НМП

$$y = \min_{i \in \widetilde{M}} \varphi_i \tag{4}$$

(в данной записи, как и в предыдущем случае, не указано фиксированное значение $x \in X$).

Задачи НМП достаточно хорошо изучены. Согласно [2] решением задачи (4) называется нечеткое множество $\widetilde{M}^*$, носителем которого является множество оптимальных по Парето альтернатив (обозначим его M^{PO}) двухкритериальной задачи дискретной оптимизации

$$\varphi_i \to \min, \;\; \mu(i) \to \max, \;\; i \in M. \tag{5}$$

Функцией принадлежности $\widetilde{\mu}$ нечеткого множества $\widetilde{M}^*$ является сужение функции принадлежности $\mu(i)$, $i \in M$, с универсального множества индексов ограничений M на множество $M^{PO} \subseteq M$. Иными словами, эта функция принадлежности имеет вид

$$\widetilde{\mu}(i) = \begin{cases} \mu(i), & i \in M^{PO}, \\ 0, & i \notin M^{PO}. \end{cases}$$

Множеству решений задачи (4), которым является нечеткое множество $\widetilde{M}^*$ с функцией принадлежности $\widetilde{\mu}(i)$, $i \in M$, согласно [2] соответствует нечеткое множество $\Psi \subseteq \{0,1\}$ оптимальных значений целевой функции этой задачи с функцией принадлежности $\psi : \{0,1\} \to [0,1]$, $\psi(y) = \max_{\varphi_i = y} \widetilde{\mu}(i)$, $y \in \{0,1\}$. Отметим, что универсальным множеством нечеткого множества Ψ оптимальных значений целевой функции задачи (4) является множество $\{0,1\}$, состоящее из двух элементов: $y=0$, $y=1$. Это объясняется тем, что переменная y может принимать значения, равные только $\varphi_i(x)$, $i \in M$, которые, в свою очередь, при любой фиксированной альтернативе $x \in X$ могут быть равны нулю или единице.

Таким образом, для каждой фиксированной альтернативы $x \in X$ значения $y(x)$ функции принадлежности (3) нечеткого множества $\widetilde{F} = \bigcap_{i \in \widetilde{M}} F_i$ образуют также нечеткое подмножество Ψ универсального множества $Y = \{0,1\}$. Отсюда следует, что нечеткое множество $\widetilde{F}$ представляет собой так называемое [7] нечеткое множество типа 2.

Формализуем понятие пересечения $\widetilde{F} = \bigcap_{i \in \widetilde{M}} F_i$ нечеткого множества $\widetilde{M}$ четких множеств F_i, $i \in M$.

Для произвольной альтернативы $x \in X$ рассмотрим отношение доминирования, которое порождается целевыми функциями задачи (5) на множестве ограничений M.

Будем полагать, что ограничение с индексом $i \in M$ доминирует ограничение с индексом $j \in M$ для альтернативы $x \in X$ и обозначать это $i \overset{x}{\succ} j$, если справедливы неравенства $\varphi_i(x) \le \varphi_j(x)$, $\mu(i) \ge \mu(j)$ и хотя бы одно из них строгое.

Данное понятие позволяет определить множество оптимальных по Парето альтернатив двухкритериальной задачи (5), которое будет носителем нечеткого множества решений задачи (4). Для $x \in X$ обозначим его в виде

$$M^{PO}(x) = \{i \in M \mid j \overset{x}{\not\succ} i \quad \forall j \in M\}. \tag{6}$$

Для произвольных $x \in X$, $i \in M$ определим функцию принадлежности нечеткого множества решений задачи (2):

$$\widetilde{\mu}(x,i) = \begin{cases} \mu(i), & i \in M^{PO}(x), \\ 0, & i \notin M^{PO}(x). \end{cases} \tag{7}$$

Пересечением нечеткого множества $\widetilde{M}$ четких множеств F_i, $i \in M$, назовем $\widetilde{F} = \bigcap_{i \in \widetilde{M}} F_i$ — нечеткое множество типа 2, которое задается тройками $(x, \psi(x, y))$, где $\psi : X \times Y \to [0,1]$ — нечеткое отображение, выполняющее роль нечеткой функции принадлежности и определенное следующим образом:

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \max\limits_{i \in M} \{\widetilde{\mu}(x,i) \mid \varphi_i(x) = y\}, & \exists\, i \in M : \varphi_i(x) = y, \\ 0, & \varphi_i(x) \ne y \ \forall\, i \in M; \end{cases} \tag{8}$$

x — элемент множества альтернатив X; y — элемент универсального множества $Y = \{0,1\}$ значений отображения принадлежности $\psi(x, y)$ нечеткого множества $\widetilde{F}$ типа 2.

Значения нечеткого отображения принадлежности $\psi(x, y)$ для фиксированной альтернативы $x^0 \in X$ образуют нечеткое подмножество $\Psi_Y(x^0)$ множества $Y = \{0,1\}$ с функцией принадлежности $\psi(x^0, y)$, $y \in \{0,1\}$. Значение $\psi(x^0,1)$ будем понимать как степень принадлежности альтернативы $x^0 \in X$ множеству $\widetilde{F}$, соответственно значение $\psi(x^0,0)$ — как степень отсутствия принадлежности $x^0 \in X$ этому множеству.

В то же время, если в отображении $\psi(x, y)$ зафиксировать $y=1$, то получим нечеткое множество альтернатив $x \in X$, принадлежащих множеству $\widetilde{F}$, с функцией принадлежности $\psi(x,1)$. Обозначим это множество Ψ_X (1). Аналогично для фиксированного значения $y=0$ получим нечеткое множество альтернатив $x \in X$, не принадлежащих множеству $\widetilde{F}$, с функцией принадлежности $\psi(x,0)$. Обозначим его Ψ_X (0). Отметим, что в общем случае $\Psi_X(0) \neq \overline{\Psi_X(1)}$ и соответственно $\psi(x,0) \neq 1-\psi(x,1)$. Поэтому как нечеткое множество $\Psi_X(0)$, так и $\Psi_X(1)$ представляют собой нечеткие множества сечений соответственно при $y=0$ и $y=1$ нечеткого множества $\widetilde{F}$ типа 2 и являются его неотъемлемыми составляющими.

Упростить построение отображения принадлежности $\psi(x, y)$ позволяет следующая теорема.

Теорема. Пусть F_i, $i \in M$, — четкие множества, заданные на множестве X соответствующими характеристическими функциями $\varphi_i(x)$, $x \in X$, $i \in M$; $\mu(i)$, $i \in M$, — функция принадлежности нечеткого множества $\widetilde{M}$. Для того чтобы нечеткое множество $\widetilde{F}$ типа 2, заданное отображением принадлежности $\psi(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$, было пересечением нечеткого множества $\widetilde{M}$ четких множеств F_i, $i \in M$, т.е. $\widetilde{F} = \bigcap_{i \in \widetilde{M}} F_i$, необходимо и достаточно для $x \in X$:

$$\psi(x,0)=\begin{cases} \max\limits_{\varphi_i(x)=0} \mu(i), & \exists\, i \in M: \varphi_i(x)=0, \\ 0, & \varphi_i(x)=1 \quad \forall\, i \in M; \end{cases}$$

$$\psi(x,1)=\begin{cases} \max\limits_{i \in M} \mu(i), & \varphi_i(x)=1 \quad \forall\, i \in \operatorname{Arg}\max\limits_{j \in M} \mu(j), \\ 0, & \exists\, i \in \operatorname{Arg}\max\limits_{j \in M} \mu(j): \varphi_i(x)=0. \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Покажем, что формула (8) эквивалентна следующей формуле:

$$\psi(x, y)=\begin{cases} \max\limits_{i \in M(x, y)} \mu(i), & M(x, y) \neq \varnothing, \\ 0, & M(x, y)=\varnothing, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$M(x, y)=\{i \in M \mid y=\varphi_i(x)=\min_{\mu(j) \geq \mu(i)} \varphi_j(x),\ \mu(i)=\max_{\varphi_j(x) \leq \varphi_i(x)} \mu(j)\}. \tag{11}$$

Отметим, что из (7), (8) очевидно следует

$$\psi(x, y)=\begin{cases} \max\limits_{i \in M^{PO}(x)} \{\mu(i) \mid \varphi_i(x)=y\}, & \exists\, i \in M: \varphi_i(x)=y, \\ 0, & \varphi_i(x) \neq y \quad \forall\, i \in M. \end{cases} \tag{12}$$

Поэтому для доказательства эквивалентности (8) и (10) достаточно показать, что формула (12) эквивалентна (10). Для этого докажем, что

$$M^{PO}(x)=\{i \in M \mid \varphi_i(x)=\min_{\mu(j) \geq \mu(i)} \varphi_j(x),\ \ \mu(i)=\max_{\varphi_j(x) \leq \varphi_i(x)} \mu(j)\}. \tag{13}$$

Пусть для некоторых $x \in X$, $i \in M$ выполняется соотношение

$$\varphi_i(x)=\min_{\mu(j) \geq \mu(i)} \varphi_j(x),\quad \mu(i)=\max_{\varphi_j(x) \leq \varphi_i(x)} \mu(j). \tag{14}$$

Предположим противное, что $i \notin M^{PO}(x)$. Тогда согласно (6) $\exists\, l \in M$, для которого $l \overset{x}{\succ} i$, т.е. $\varphi_l(x) < \varphi_i(x)$, $\mu(l) \ge \mu(i)$, или $\varphi_l(x) \le \varphi_i(x)$, $\mu(l) > \mu(i)$.

В первом случае получим неравенство $\varphi_l(x) < \min\limits_{\mu(j) \ge \mu(i)} \varphi_j(x)$, во втором — неравенство $\mu(l) > \max\limits_{\varphi_j(x) \le \varphi_i(x)} \mu(j)$. Оба неравенства противоречат (14), поэтому имеем $i \in M^{PO}(x)$.

Пусть $i \in M^{PO}(x)$. Предположим противное, т.е. выполняется хотя бы одно из неравенств: $\varphi_i(x) > \min\limits_{\mu(j) \ge \mu(i)} \varphi_j(x)$ или $\mu(i) < \max\limits_{\varphi_j(x) \le \varphi_i(x)} \mu(j)$.

Относительно первого неравенства делаем вывод, что $\exists\, l \in M$, для которого $\varphi_l(x) < \varphi_i(x)$, $\mu(l) \ge \mu(i)$. Тогда $l \overset{x}{\succ} i$ и согласно (6) $i \notin M^{PO}(x)$.

Аналогично для второго неравенства $\exists\, k \in M$, для которого $\mu(k) > \mu(i)$, $\varphi_k(x) \le \varphi_i(x)$. Тогда $k \overset{x}{\succ} i$ и согласно (6) $i \notin M^{PO}(x)$. Таким образом, в обоих случаях получили противоречие, поэтому имеет место равенство (13). Отметим, что доказательство (13) можно получить также с использованием критерия оптимальности по Парето [6].

Из (11), (13) очевидно следует равенство $M(x, y) = M^{PO}(x) \cap \{i \in M | \varphi_i(x) = = y\}$, поэтому формула (12) эквивалентна (10). Отсюда формула (8) также эквивалентна (10).

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать эквивалентность формул (9) и (10).

Сначала рассмотрим (9) и (10) при $y = 0$ в двух возможных случаях. Пусть $\varphi_i(x) = 1 \ \forall\, i \in M$. Тогда согласно (9) $\psi(x, 0) = 0$. В то же время из (11) следует $M(x, 0) = \varnothing$. Поэтому согласно (10) получим $\psi(x, 0) = 0$.

Пусть $\exists\, i \in M : \varphi_i(x) = 0$. Определим из (10) значение $\psi(x, 0)$. Для этого в соответствии с (11) построим множество $M(x, 0) = \{i \in M | 0 = \varphi_i(x) = = \min\limits_{\mu(j) \ge \mu(i)} \varphi_j(x),\ \mu(i) = \max\limits_{\varphi_j(x) = 0} \mu(j)\}$. Покажем, что $M(x, 0) = \operatorname{Arg} \max\limits_{\varphi_j(x) = 0} \mu(j)$. Обозначим $\mu_0^*(x) = \max\limits_{\varphi_j(x) = 0} \mu(j)$. Пусть $i \in \operatorname{Arg} \max\limits_{\varphi_j(x) = 0} \mu(j)$. Тогда $\mu(i) = \mu_0^*(x)$ и

$$\min_{\mu(j) \ge \mu(i)} \varphi_j(x) = \min\{\min_{\mu(j) = \mu_0^*(x)} \varphi_j(x),\ \min_{\mu(j) > \mu_0^*(x)} \varphi_j(x)\} = \min\{0,\ \min_{\mu(j) > \mu_0^*(x)} \varphi_j(x)\} = = 0 = \varphi_i(x).$$

Отсюда вытекает, что $i \in M(x, 0)$.

И наоборот, пусть $i \in M(x, 0)$. Тогда $0 = \varphi_i(x) = \min\limits_{\mu(j) \ge \mu(i)} \varphi_j(x)$ и $\mu(i) = = \mu_0^*(x)$. Отсюда $i \in \operatorname{Arg} \max\limits_{\varphi_j(x) = 0} \mu(j)$. Тогда согласно (9) $\psi(x, 0) = \mu_0^*$. Таким образом, формулы (9), (10) эквивалентны при $y = 0$.

Далее сравним (9) и (10) при $y = 1$ в двух возможных случаях. Обозначим $\mu_1^* = \max\limits_{j \in M} \mu(j)$, $I^* = \operatorname{Arg} \max\limits_{j \in M} \mu(j)$. Пусть $\varphi_i(x) = 1 \ \forall\, i \in I^*$. Тогда согласно (9) $\psi(x, 1) = \mu_1^*$. Определим значение $\psi(x, 1)$ по формуле (10). Для этого построим в соответствии с (11) множество $M(x,1)=\{i\in M \mid 1=\varphi_i(x)=\min\limits_{\mu(j)\ge\mu(i)}\varphi_j(x)$, $\mu(i)=\max\limits_{j\in M}\mu(j)\}=\{i\in I^*\mid 1=\varphi_i(x)=\min\limits_{j\in I^*}\varphi_j(x)\}=I^*$. Отсюда согласно (9) $\psi(x,1)=$ $=\mu_1^*$. Таким образом, в данном случае значения (9) и (10) при $y=1$ совпадают.

Рассмотрим другой случай. Пусть $\exists\, i\in I^*: \varphi_i(x)=0$. Тогда согласно (9) $\psi(x,1)=0$ Определим значение $\psi(x,1)$ из (10). На основании (11) $M(x,1)=$ $=\{i\in M \mid 1=\varphi_i(x)=\min\limits_{\mu(j)\ge\mu(i)}\varphi_j(x),\quad \mu(i)=\max\limits_{j\in M}\mu(j)=\mu_1^*\}=\{i\in I^*\mid 1=\varphi_i(x)=$ $=\min\limits_{j\in I^*}\varphi_j(x)=0\}=\varnothing$. Отсюда согласно (10) $\psi(x,1)=0$, поэтому формулы (8), (9) эквивалентны при $y=1$.

Теорема доказана.

На основании изложенного очевидно, что множество $\widetilde{F}$ допустимых альтернатив задачи (1) представляет собой нечеткое множество типа 2, которое задается отображением принадлежности $\psi(x, y)$, $x\in X$, $y\in\{0,1\}$, где

$$\psi(x,0)=\begin{cases}\max\limits_{f_i(x)>0}\mu(i), & \exists\, i\in M: f_i(x)>0,\\ 0, & f_i(x)\le 0\ \ \forall\, i\in M,\end{cases}\tag{15}$$

является степенью недопустимости альтернативы $x\in X$;

$$\psi(x,1)=\begin{cases}\max\limits_{i\in M}\mu(i), & f_i(x)\le 0\ \ \forall\, i\in \operatorname{Arg}\max\limits_{i\in M}\mu(i),\\ 0, & \exists\, i\in\operatorname{Arg}\max\limits_{i\in M}\mu(i): f_i(x)>0,\end{cases}\tag{16}$$

является степенью ее допустимости.

Чтобы определить, каким образом ЛПР может использовать нечеткое множество типа 2 для рационального выбора альтернатив в задаче (1), рассмотрим «идеальный случай». Предположим, ЛПР может четко сказать, что все ограничения из множества $M=\{1,2,\dots,m\}$ актуальны, т.е. $\widetilde{M}=M$, и поэтому функция принадлежности $\mu(i)\equiv 1$.

Выберем некоторую альтернативу $x\in X$ и рассмотрим следующие случаи.

Предположим, что $f_i(x)\le 0\ \ \forall\, i\in M$, т.е. альтернатива x допустима. Тогда согласно (15), (16) степень ее недопустимости $\psi(x,0)=0$, а степень допустимости $\psi(x,1)=\max\limits_{i\in M}\mu(i)=1$.

Предположим, что $\exists\, j\in M: f_j(x)>0$, т.е. альтернатива x недопустима. Тогда степень ее недопустимости $\psi(x,0)=\max\limits_{f_i(x)>0}\mu(i)=1$, а степень допустимости $\psi(x,1)=0$.

Таким образом, если x^* — решение задачи (1), то $\psi(x^*,1)=\max\limits_{x\in\widetilde{F}}\psi(x,1)=1$, $\psi(x^*,0)=\min\limits_{x\in\widetilde{F}}\psi(x,0)=0$.

Поэтому ЛПР, стремясь к «идеальному случаю», в реальной ситуации принятия решения будет максимизировать помимо целевой функции $g(x)$ также степень $\psi(x,1)$ допустимости альтернатив и минимизировать степень $\psi(x,0)$ их недопустимости.

Иными словами, перед ЛПР возникает следующая трехкритериальная задача:

$$g(x) \to \max,\ \ \psi(x,1) \to \max,\ \ \psi(x,0) \to \min,\ \ x \in X. \qquad (17)$$

Обозначим PO множество оптимальных по Парето альтернатив данной задачи.

Очевидно, что в определение рационального решения задачи (1) следует включать лишь альтернативы из множества PO. Эти рассуждения приводят к следующему определению.

Определение. Общим решением задачи (1) математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений назовем нечеткое множество $\widetilde{F}^*$ типа 2 с отображением принадлежности

$$\psi^*(x, y) = \begin{cases} \psi(x, y), & x \in PO, \\ 0, & x \notin PO, \end{cases}$$

где $x \in X$, $y \in Y = \{0, 1\}$.

Конкретную альтернативу для ЛПР можно выбрать с помощью любого из методов многокритериальной оптимизации, решив задачу (17).

Поскольку функции $\psi(x,0)$ и $\psi(x,1)$ достаточно сложны, несколько упростим задачу (17). Для этого сначала установим некоторые свойства множества PO-оптимальных по Парето альтернатив.

Обозначим F и X^* множество соответственно допустимых и оптимальных альтернатив задачи, в которой, по мнению ЛПР, все ограничения из множества M актуальны и определяют допустимые альтернативы (т.е. множество индексов ограничений четкое и равно M):

$$g(x) \to \max,\ x \in X,\ f_i(x) \le 0,\ i \in M. \qquad (18)$$

Несмотря на то что в общем случае множество допустимых альтернатив задачи (1) математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений несравнимо с множеством допустимых альтернатив задачи (18), из (15), (16) непосредственно вытекает следующее свойство.

Свойство 1 . Любая альтернатива x^* из множества F допустимых альтернатив задачи (18) имеет в задаче (17) наилучшие значения степеней: допустимости $\psi(x^*,1)$ и недопустимости $\psi(x^*,0)$, т.е. $\psi(x^*,1) = \max\limits_{i \in M} \mu(i)$, $\psi(x^*, 0) = 0\ \forall\ x^* \in F$.

Отсюда вытекает следующее свойство.

Свойство 2. Множество оптимальных решений задачи (18) включается во множество оптимальных по Парето альтернатив задачи (17), т.е. $X^* \subseteq PO$.

Из этих свойств следует, что если ЛПР удовлетворено оптимальным значением целевой функции $g(x^*)$, $x^* \in X^*$, задачи (18) с четким множеством индексов ограничений M, то альтернатива $x^* \in X^*$ оптимальна по Парето в задаче (17). При этом она будет иметь наилучшие значения степеней: допустимости $\psi(x^*,1)$ и недопустимости $\psi(x^*,0)$. Таким образом, решив задачу (18) с четким множеством ограничений M, получим приближенное решение задачи (1) математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений.

Для получения значений целевой функции задачи (1) больших, чем $g(x^*)$, $x^* \in X^*$, можно использовать двухкритериальную задачу

$$g(x) \to \max;\ \psi(x,0) \to \min;\ f_i(x) \le 0,\ i \in I^* = \operatorname{Arg}\max_{i \in M} \mu(i);\ x \in X. \qquad (19)$$

Обозначим PO_1 множество оптимальных по Парето альтернатив данной задачи.

Свойство 3. Множество PO_1 оптимальных по Парето альтернатив задачи (19) включается во множество оптимальных по Парето альтернатив задачи (17), т.е. $PO_1 \subseteq PO$.

Отметим, что в задаче (19) отсутствуют альтернативы задачи (17), имеющие наихудшее из возможных значений $\max\limits_{i \in M} \mu(i)$ критериальной функции $\psi(x,0)$. Если это приемлемо, то ЛПР получит для всех альтернатив задачи (19) максимально возможное значение $\max\limits_{i \in M} \mu(i)$ критериальной функции $\psi(x,1)$. Таким образом, задача (19) представляется логичным упрощением задачи (17).

Критериальную функцию (15) $\psi(x,0)$ в задаче (19) можно упростить до вида $\psi(x,0) = \max\limits_{i \in M} \{\mu(i) | \ f_i \ (x) > 0\}$, если исключить из рассмотрения альтернативы, допустимые в задаче (18) (множество F). Это возможно, если ЛПР решит получить в задаче (1) с нечетким множеством ограничений значение целевой функции $g(x)$ большее (что естественно), чем в случае четкого множества индексов ограничений M, т.е. $g(x) > g(x^*)$. Тогда задача (19) может быть упрощена до следующего вида:

$$g(x) \to \max; \ \max_{i \in M} \{\mu(i) | f_i(x) > 0\} \to \min; \ f_i(x) \le 0, \ i \in I^*; \ g(x) > g(x^*); \ x \in X. \tag{20}$$

В заключение отметим, что рассмотренный метод не только расширяет область применения математического программирования на случай нечеткого множества индексов ограничений, но и предполагает новый подход к решению четких задач математического программирования с несовместной системой ограничений, суть которого заключается в фаззификации множества индексов ограничений задачи.

ПРИМЕР

Для иллюстрации предложенного подхода решим следующую задачу математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений:

$$g(x) = x_1 + x_2 \to \max, \ f_1(x) = 2x_1 + x_2 - 3 \le 0,$$

$$f_2(x) = x_1 + 2x_2 - 4 \le 0, \ x \in X = \{0,1\} \times \{0,1,2,3\}.$$

Предположим, что ЛПР не знает, какие ограничения из множества индексов ограничений $M = \{1,2\}$ в действительности должны определять допустимые альтернативы, а может только задать функцию принадлежности $\mu(1) = 0{,}7$; $\mu(2) = 0{,}4$ нечеткого множества индексов $\widetilde{M} \subseteq M$ актуальных, по его мнению, ограничений.

В табл. 1 приведены: значения переменных $x_1 \in \{0,1\}$, $x_2 \in \{0,1,2,3\}$; значения характеристических функций ограничений

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & 2x_1 + x_2 - 3 \le 0, \\ 0, & 2x_1 + x_2 - 3 > 0, \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 1, & x_1 + 2x_2 - 4 \le 0, \\ 0, & x_1 + 2x_2 - 4 > 0; \end{cases}$$

значения $\psi(x,0)$, $\psi(x,1)$, $x \in X$, отображения принадлежности нечеткого множества $\widetilde{F}$ типа 2; значения целевой функции $g(x)$, $x \in X$.

В строках 1–3, 5, 6 таблицы представлены допустимые альтернативы, а в строках 3 и 6 — оптимальные альтернативы, доставляющее максимальное значение 2 целевой функции $g(x)$ задачи (18) с четким множеством индексов ограничений M.

Т а б л и ц а 1

Номер строки	x_1	x_2	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\psi(x,0)$	$\psi(x,1)$	$g(x)$
1	0	0	1	1	0	0,7	0
2	0	1	1	1	0	0,7	1
3	0	2	1	1	0	0,7	2
4	0	3	1	0	0,4	0,7	3
5	1	0	1	1	0	0,7	1
6	1	1	1	1	0	0,7	2
7	1	2	0	0	0,7	0	3
8	1	3	0	0	0,7	0	4

Общее решение задачи (1) математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений (нечеткое множество $\widetilde{F}^*$ типа 2), которое определяется оптимальными по Парето альтернативами множества PO задачи (17), записано в строках 3, 4, 6, 8. Кроме допустимых в задаче (18) альтернатив в строках 4 и 8 приведены недопустимые альтернативы с различными значениями степеней принадлежности $\psi(x,0)$, $\psi(x,1)$. Они обеспечивают соответственно значения 3 и 4 целевой функции $g(x)$. ЛПР может выбрать конкретную альтернативу из множества PO в зависимости от своего предпочтения на множестве критериев задачи (17) с помощью любого из методов многокритериальной оптимизации.

Допустимые альтернативы двухкритериальной задачи (19) представлены в строках 1–6. Из них оптимальны по Парето (множество PO_1) альтернативы в строках 3, 4, 6. Задача (19) проще с вычислительной точки зрения, чем (17), но альтернатива, представленная в строке 6, в ней недопустима. С одной стороны, она имеет наихудшее значение 0,7 степени недопустимости $\psi(x,0)$, с другой — обеспечивает наилучшее значение 4 целевой функции $g(x)$.

Допустимые альтернативы наиболее простой задачи (20) приведены в строках 4, 6. Из них оптимальная по Парето альтернатива записана в строке 4.

Следует отметить, что альтернатива исходной задачи из строки 4, которую можно получить, решив как задачу (19), так и (20), может представлять для ЛПР разумный компромисс между наилучшими значениями целевой функции $g(x)$, степенями допустимости $\psi(x,1)$ и недопустимости $\psi(x,0)$ альтернатив в задаче (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bellman R. Decision making in a fuzzy environment / R. Bellman, L.A. Zadeh // Manag. Sci. — 1970. — **17**. — P. 141–162.
2. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — 208 с.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие. — К.: Вища шк., 1991. — 191 с.
4. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 2. — С. 77–87.
5. Мащенко С.О. Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия // Кибернетика и вычислительная техника. — 2010. — Вып. 159. — С. 19–29.
6. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Физматлит, 2007. — 255 с.
7. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня. — М.: Знание, 1974. — С. 5–49.

Поступила 17.02.2011