УДК 519.237.5

А.С. КОРХИН

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ

Ключевые слова: *стационарная и нестационарная регрессии, априорная информация, нечеткие ограничения, двухкритериальное оценивание, смешанная регрессия, сочетание методов оценивания.*

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Априорная информация является важным средством для повышения точности регрессионных моделей. Она также необходима для получения их заданных свойств, которые формулируются разработчиками, исходя из цели создания той или иной модели. Использование априорной информации весьма актуально, в частности, когда исходные данные для построения регрессии представляют собой малую выборку. Такая ситуация нередка в задачах эконометрии.

В настоящей работе под априорной информацией будем понимать информацию о параметрах модели, которой располагает разработчик. Примерами такой информации могут быть знаки параметров, возможные пределы, в которых они находятся, функциональные связи между параметрами.

Все рассуждения в данной статье применяются к модели линейной регрессии. В качестве ее общего вида рассмотрим регрессию с переключениями с переключателем, который зависит от времени t:

$$y_t = \mathbf{x}'_t \mathbf{A}_t + \varepsilon_t, \ \mathbf{A}_t = \boldsymbol{\alpha}_i^0, \quad t \in I_i = [t_i, T_i], \ i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где $y_t \in \mathbb{R}^1$ — зависимая переменная; $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — регрессор (независимая переменная); $\boldsymbol{\alpha}_i^0 \in \mathbb{R}^n$ — истинная величина параметра регрессии на интервале I_i (неизвестная величина); ε_i — случайная величина.

Величины y_t и $\mathbf{x}_t$, $t = \overline{1, T}$, считаются известными. Здесь $T = T_N$ — длина интервала наблюдения.

В формуле (1) и далее штрихом обозначено транспонирование, жирным шрифтом выделены вектор и матрица.

Параметр регрессии (1) постоянен и равен $\boldsymbol{\alpha}_i^0$ на интервале времени I_i с числом наблюдений m_i. Положим $t_1 = 1$, $t_i = T_{i-1} + 1$, $i = \overline{2, N}$. Тогда $m_i = T_i - t_i + 1$, $i = \overline{1, N}$, длина интервала наблюдения $T = \sum_{i=1}^{N} m_i$. Считаем, что точки переключения t_i, $i = \overline{2, N}$, известны: они могут задаваться разработчиком модели или определяться на основе некоторой теории, рассмотрение которой представляет самостоятельную задачу и выходит за рамки данной работы.

На величины m_i, $i = \overline{1, N}$, не накладываются ограничения, кроме очевидных: $m_i \geq 1$, $i = \overline{1, N}$. Следовательно, m_i может быть меньше n. В этом состоит отличие модели (1) от описанных в литературе регрессий с переключениями.

Обозначим вектор величин параметра регрессии с переключениями $\boldsymbol{\alpha}^0 = [(\boldsymbol{\alpha}_1^0)' \ldots (\boldsymbol{\alpha}_N^0)']'$. Таким образом, размерность $\boldsymbol{\alpha}^0$ зависит от числа наблюдений T, так как согласно (1) N зависит от T.

Рассмотрим два важных частных случая (1). Пусть $m_i = 1$, $i = \overline{1, N}$. Тогда регрессия (1) примет вид

$$y_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\alpha}_t^0 + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$. В этом случае размерность вектора величин параметра регрессии с переключениями $\boldsymbol{\alpha}^0 = [(\boldsymbol{\alpha}_1^0)' \ldots (\boldsymbol{\alpha}_T^0)']'$ зависит от T.

Другой случай (1) получим из (2) при $\boldsymbol{\alpha}_t^0 = \boldsymbol{\alpha}^0$, $t = \overline{1, T}$. Соответствующая модель регрессии

$$y_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\alpha}^0 + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}, \tag{3}$$

является линейной регрессией с постоянным параметром.

В регрессиях (1), (2) вектор значений параметра модели $\boldsymbol{\alpha}^0$ имеет размерность, зависящую от числа наблюдений; назовем такие регрессии нестационарными. В регрессии (3) размерность $\boldsymbol{\alpha}^0$ постоянная и не зависит от числа наблюдений; назовем эту регрессию стационарной. Поэтому с точки зрения методологии оценивания $\boldsymbol{\alpha}^0$ далее рассматриваются две модели: нестационарная (1) и стационарная (3), так как регрессия (2) — частный случай регрессии (1).

Оценим параметр $\boldsymbol{\alpha}^0$ моделей (1) и (3) методом наименьших квадратов (м.н.к.), используя соответственно критерии

$$F_1(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=t_i}^{T_i} (y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\alpha}_i)^2 \to \min, \tag{4}$$

$$F_1(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\alpha})^2 \to \min, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, N}$; $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$.

Для повышения точности регрессионных моделей и придания им требуемых свойств используем априорную информацию об $\boldsymbol{\alpha}^0$. Классифицируем ее в виде двух форм: неопределенная и определенная.

К первой форме отнесем информацию двух видов: нечеткую и стохастическую. Нечеткая априорная информация формулируется на основе нечетких представлений разработчика модели. Она может быть формализована в виде нечетких ограничений-неравенств и ограничений-равенств [1, 2]. К другому виду неопределенной информации отнесем стохастические уравнения относительно $\boldsymbol{\alpha}^0$, которые могут быть получены на основе предшествующих статистических исследований. Эти уравнения предложены в [3, 4] применительно к регрессии (3). Оценка $\boldsymbol{\alpha}^0$, получаемая с учетом указанных уравнений и критерия (5), названа смешанной; она исследована и дополнена в ряде работ (см., например, [5]).

Под определенной априорной информацией будем понимать обычные ограничения-равенства и ограничения-неравенства, наложенные на параметры регрессии:

$$g_i(\boldsymbol{\alpha}) = 0, \; i \in I^0, \quad g_i(\boldsymbol{\alpha}) \le 0, \; i \in I^-,$$

где I^0 и I^- — некоторые непересекающиеся множества индексов.

Вычисление и свойства оценки $\boldsymbol{\alpha}^0$ в регрессии (3) с учетом ограничений-равенств рассмотрены в ряде монографий [6, 7]. Оцениванию с учетом ограничений-неравенств посвящены работы [8–12]. В качестве критерия оценивания в этих работах принято выражение (5); в [12] рассмотрены также другие критерии.

Очевидно, что в одной и той же модели оценивания могут использоваться обе формы представления априорной информации. Например, критерием оценивания является (5), неопределенная априорная информация задается стохастическими уравнениями, а на многомерный параметр регрессии наложены ограничения-неравенства вида $g_i(\boldsymbol{\alpha}) \le 0,\ i \in I^-$.

Рассмотрим некоторые наиболее важные модели оценивания параметров регрессий (1) и (3), использующие неопределенную априорную информацию, как нечеткую, так и стохастическую.

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЧЕТКОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ МНОГОМЕРНОГО ПАРАМЕТРА РЕГРЕССИИ

Стационарная регрессия. Такая регрессия имеет вид (3), ее параметр $\boldsymbol{\alpha}^0$ оценивается согласно критерию (5). В соответствии с [1] имеем нечеткие ограничения-неравенства и ограничения-равенства на параметр регрессии

$$\mathbf{a}'_i\boldsymbol{\alpha}^0 \le \beta_i,\ i \in I_{ie}, \tag{6}$$

$$\mathbf{a}'_i\boldsymbol{\alpha}^0 = \beta_i,\ i \in I_e, \tag{7}$$

где индекс *ie* — сокращение от inequality, индекс *e* — от equality.

В формулах (6), (7) β_i — нечеткая величина, принадлежащая нечеткому подмножеству числовой оси B_i. В [1] введены следующие функции принадлежности β_i:

$$\varphi_{\mathrm{B}_i}(\beta_i) = \exp\left(-\frac{k_i}{2}(\beta_i - b_i)^2\right), \tag{8}$$

$$\varphi_{\mathrm{B}_i}(\beta_i) = \exp\left(-\frac{k_i}{2}[\max(0, \beta_i - b_i)]^2\right), \tag{9}$$

где b_i находится на основе априорной информации, $k_i > 0$ — коэффициент. Определим его по формуле $k_i = -2\ln\delta_i / (\beta_{i0} - b_i)^2$, где $\delta_i = \varphi_{\mathrm{B}_i}(\beta_{i0})$, $\beta_{i0} > b_i$, пара (β_{i0}, δ_i) задается разработчиком модели.

Согласно результатам в [1] получим следующую теорему.

Теорема 1. Пусть имеются ограничения-неравенства (6) и ограничения-равенства (7), где правые части β_i описаны нечетко в виде нечетких подмножеств числовой оси с функциями принадлежности (8) или (9). Тогда нечеткое допустимое множество оценок параметра регрессии O имеет функцию принадлежности

$$\phi_O(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(-F_2(\boldsymbol{\alpha})),\ F_2(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\sum_{i \in I_{ie}} k_i[\max(0, \mathbf{a}'_i\boldsymbol{\alpha} - b_i)]^2 + \sum_{i \in I_e}\frac{k_i}{2}(\mathbf{a}'_i\boldsymbol{\alpha} - b_i)^2. \tag{10}$$

Если имеется нечеткая априорная информация, то разработчик модели должен выбрать такую оценку параметра $\boldsymbol{\alpha}$, чтобы она минимизировала ошибку модели согласно (5) и в то же время ее степень принадлежности допустимому множеству O была максимальна. Таким образом, приходим к двухкритериальной задаче оценивания $F_1(\boldsymbol{\alpha}) \to \min$, $\phi_O(\boldsymbol{\alpha}) \to \max$, эквивалентной согласно [1] задаче

$$F_1(\boldsymbol{\alpha}) \to \min,\ F_2(\boldsymbol{\alpha}) \to \min. \tag{11}$$

В качестве ее решений рассмотрим решения, оптимальные по Парето (в [1] они названы P-оценками параметра регрессии).

Обозначим $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_T \end{bmatrix}$. Основываясь на [1], имеем следующий результат.

Утверждение 1. Пусть матрица $\mathbf{X}$ имеет полный ранг, нечеткое допустимое множество оценок параметра — функцию принадлежности (10). Тогда P-оценки параметра регрессии в задаче (11) — решения задачи

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = F_1(\boldsymbol{\alpha}) + rF_2(\boldsymbol{\alpha}) \to \min,\ r \ge 0. \tag{12}$$

Согласно (12) P-оценки являются функцией r; обозначим их $\boldsymbol{\alpha}(r)$. В пространстве параметров $\boldsymbol{\alpha}(r)$ представляет собой компромиссную кривую (КК). Таким образом, в отличие от классического регрессионного анализа, согласно которому для условия утверждения 1 существует единственная оценка $\boldsymbol{\alpha}^0$, в двухкритериальной задаче оценивания их бесконечное множество. Причем каждая точка на КК в соответствии с определением оптимального решения по Парето является неулучшаемой: улучшение решения задачи (11) по одному критерию ведет к его ухудшению по другому. Например, изменяя r, т.е. двигаясь по КК, можно найти другую точку с меньшим значением первого критерия, но при этом второй критерий обязательно увеличится.

Рассмотрим точки КК, соответствующие крайним значениям r: $r=0$ и $r\to\infty$. Очевидно, что $\boldsymbol{\alpha}(0)$ — оценка м.н.к. При $r\to\infty$ решение задачи (12) можно трактовать как решение методом штрафных функций задачи оптимизации

$$F_1(\boldsymbol{\alpha})\to\min,\ \mathbf{a}'_i\boldsymbol{\alpha}\le b_i,\ \ i\in I_{ie};\ \mathbf{a}'_i\boldsymbol{\alpha}=b_i,\ i\in I_e. \tag{13}$$

Следовательно, $\boldsymbol{\alpha}(\infty)$ — решение задачи (13).

Рассмотрим процедуру выбора точки на КК, которая будет определять оценку параметра модели. Для упрощения изложения далее рассматривается случай, когда имеются только нечеткие ограничения-равенства ($I_{ie}=\varnothing$). Обозначим $\mathbf{Y}=[y_1\ \ldots\ y_T]'$, $\widetilde{\mathbf{A}}$ — матрицу, составленную из строк $\mathbf{a}'_i$, $i\in I_e$; $\widetilde{\mathbf{b}}=[b_1\ \ldots\ b_m]'$, где m — число элементов множества I_e. Положим

$$\mathbf{A}=\mathbf{K}^{1/2}\widetilde{\mathbf{A}},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{K}^{1/2}\widetilde{\mathbf{b}}, \tag{14}$$

где $\mathbf{K}=\operatorname{diag}(k_1,k_2,\ldots,k_m)$.

Из (10), (12), (14) с учетом введенных обозначений и условия $I_{ie}=\varnothing$ имеем задачу определения P-оценок

$$F(\boldsymbol{\alpha})=F_1(\boldsymbol{\alpha})+rF_2(\boldsymbol{\alpha})\ =\frac{1}{2}||\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}||^2+\frac{r}{2}||\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{b}||^2\to\min,\ r\ge 0. \tag{15}$$

Будем считать, что в (15) $\mathbf{Y},\mathbf{X},\mathbf{A}$ — известные величины. Таким образом, решение (15) — функция r и $\mathbf{b}$, которую обозначим как $\boldsymbol{\alpha}(r,\mathbf{b})\in\mathbb{R}^n$.

Для случая, когда имеются только нечеткие ограничения-равенства, можно ослабить условие существования P-оценки (в утверждении 1). С этой целью введем матрицу $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \sqrt{r}\mathbf{A}\end{bmatrix}$. Будет справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть матрица $\mathbf{M}$ имеет полный ранг, допустимое множество оценок параметра задается нечеткими ограничениями-равенствами (7). Тогда для каждого $r>0$ решение задачи (15) является P-оценкой параметра регрессии (3).

Доказательство. Из (15) получаем

$$F(\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{2}\mathbf{Y}'\mathbf{Y}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{R}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}-r\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{A}'\mathbf{b}+r\mathbf{b}'\mathbf{b}\to\min, \tag{16}$$

где согласно условию утверждения матрица

$$\mathbf{R}=\mathbf{M}'\mathbf{M}=\mathbf{X}'\mathbf{X}+r\mathbf{A}'\mathbf{A} \tag{17}$$

положительно определена для $r>0$, что влечет строгую выпуклость функции $F(\boldsymbol{\alpha})$. Следовательно, для любого $r>0$ решение (16) единственное. Поэтому оно является оптимальным по Парето решением задачи оценивания (11).

Из (15) при $m=n$, $k_i=1$, $i=\overline{1,m}$, $\widetilde{\mathbf{A}}=\mathbf{J}_n$ и $\mathbf{b}=\mathbf{O}_n$, где $\mathbf{J}_n$ — единичная матрица порядка n, $\mathbf{O}_n$ — нулевой n-мерный вектор, получаем задачу оценивания параметра гребневой регрессии. По этой причине задача (15) названа обобщенной гребневой регрессией [13]. Ее суть заключается в следующем.

Для гребневой оценки КК соединяет начало координат и оценку м.н.к. Понятно, что такая кривая может проходить достаточно далеко от $\boldsymbol{\alpha}^0$. При переменном $\mathbf{b}$ оценка выбирается из всего пространства параметров (в случае отсутствия определенной априорной информации о параметре). Поэтому появляется возможность выбрать КК, проходящую в окрестности $\boldsymbol{\alpha}^0$. Таким образом, введение дополнительных параметров r и $\mathbf{b}$ позволяет увеличить степень «свободы» при оценивании.

В [13] предложен двухэтапный алгоритм определения P-оценки для случая $m = n$: сначала находится вектор $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$ (некоторая КК), затем вычисляется $r = r^*$ (находится точка на ней). Эти величины определяют искомую P-оценку $\boldsymbol{\alpha}(r^*, \mathbf{b}^*)$. Вектор $\mathbf{b}^*$ является решением оптимизационной задачи; ее формулировка и метод решения приведены в [13].

Определение точки на фиксированной КК основывается на следующем результате.

Теорема 2. Пусть выполняется условие утверждения 2 и вектор $\mathbf{b}$ фиксирован. Тогда имеют место следующие свойства критериев оценивания в функции r, которые обозначим как $f_i(r) = F_i(\boldsymbol{\alpha}(r)),\ i = 1, 2$:

1) функции $f_i(r),\ i = 1, 2$, дифференцируемы для $r > 0$;

2) функция $f_2(r)$ строго монотонно убывает при $r \geq 0$;

3) функция $f_1(r)$ строго монотонно возрастает при $r \geq 0$.

Доказательство. Докажем свойства критериев последовательно.

1. Решение задачи (16) для фиксированного $\mathbf{b}$ (оценка параметра обобщенной гребневой регрессии) имеет вид

$$\boldsymbol{\alpha}(r) = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Y} + r\mathbf{A}'\mathbf{b}). \tag{18}$$

Для $r > 0$ справедливо соотношение $\dfrac{d\mathbf{R}^{-1}}{dr}\mathbf{R} + \mathbf{R}^{-1}\dfrac{d\mathbf{R}}{dr} = \dfrac{d\mathbf{J}_T}{dr} = \mathbf{O}_{TT}$, откуда вытекает $\dfrac{d\mathbf{R}^{-1}}{dr} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1},\ r > 0.$

Согласно (17), (18) имеем

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}(r)}{dr} = \frac{d\mathbf{R}^{-1}}{dr}(\mathbf{X}\mathbf{Y} + r\,\mathbf{A}'\mathbf{b}) + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{b},\ r > 0.$$

Из последних двух выражений следует дифференцируемость функции $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(r)$ для $r > 0$. В то же время функции $F_1(\boldsymbol{\alpha}) = \dfrac{1}{2}||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}||^2$, $F_2(\boldsymbol{\alpha}) = \dfrac{1}{2}||\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}||^2$ дифференцируемы по $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, свойство 1 доказано.

2. Согласно доказательству утверждения 2 решение задачи (16) единственное. В силу этого ее свойства для произвольных чисел $r_2 > r_1 \geq 0$ имеем

$$f_1(r_1) + r_1 f_2(r_1) < f_1(r_2) + r_1 f_2(r_2),\ \ f_1(r_2) + r_2 f_2(r_2) < f_1(r_1) + r_2 f_2(r_1).$$

Из приведенных неравенств получим $(r_2 - r_1)(f_2(r_2) - f_2(r_1)) < 0,$ откуда следует свойство 2 критериев.

3. Из свойства 1, выпуклости функций $F_1(\boldsymbol{\alpha})$, $F_2(\boldsymbol{\alpha})$ и поскольку по условию теоремы $\boldsymbol{\alpha}(r)$ — P-оценка, имеем из леммы 3 [14] $r = -df_1 / df_2$ в соотношении (15).

Функции $f_i = f_i(r),\ i = 1, 2,$ дифференцируемы согласно свойству 1, поэтому $r = -(df_1(r)/dr)(df_2(r)/dr)^{-1}$. Тогда $(df_1(r)/dr) = -r(df_2(r)/dr)$ для $r > 0$. Отсюда следует монотонное возрастание $f_1(r)$ для $r > 0$. Кроме того, для произвольного $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\alpha}(0)$, где $\boldsymbol{\alpha}(0)$ — решение задачи $\min\limits_{\boldsymbol{\alpha}} F_1(\boldsymbol{\alpha})$, имеем $f_1(0) = F_1(\boldsymbol{\alpha}(0)) > F_1(\boldsymbol{\alpha})$. Следовательно, $f_1(0) > f_1(r)$ для любого $r > 0$. Таким образом, доказано свойство 3, что завершает доказательство теоремы.

Положим $f_i(r, \mathbf{b}) = F_i(\boldsymbol{\alpha}(r, \mathbf{b})),\ i = 1, 2$. Пусть вектор $\mathbf{b}^*$ найден. Определим отрезок $Z = [r_0, r_1]$, которому принадлежит искомая величина r^*. Величина r_1 определяется предельно допустимой погрешностью модели, так как она пропорциональна $f_1(r_1, \mathbf{b})$ и $f_1(r^*, \mathbf{b}) < f_1(r_1, \mathbf{b})$ (согласно утверждению 3 теоремы 2). В качестве $r_0 \geq 0$ выбирается наименьшее значение r, при котором удовлетворяются нечеткие представления о параметре регрессии. Например, при $r_0 \geq 0$ знаки компонент многомерного параметра имеют требуемый знак.

Рассматривая двухкритериальную задачу как задачу с двумя нечеткими целями выбора и используя принцип Беллмана–Заде, получаем следующее соотношение для определения r^* [13]:

$$r^* = \arg\max_{z \in Z} [\min_{i=1,2} \{\varphi_i(r, \mathbf{b}^*)\}]. \tag{19}$$

Здесь

$$\varphi_i(r, \mathbf{b}^*) = \frac{f_{i2}(\mathbf{b}^*) - f_i(r, \mathbf{b}^*)}{f_{i2}(\mathbf{b}^*) - f_{i1}(\mathbf{b}^*)},$$

где $f_{i1}(\mathbf{b}^*) = \min_{z \in Z} f_i(r, \mathbf{b}^*)$, $f_{i2}(\mathbf{b}^*) = \max_{z \in Z} f_i(r, \mathbf{b}^*)$.

Изучим статистические свойства P-оценки. Обозначим $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_T]'$, $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}}, \ldots, \sqrt{d_{nn}})$, где d_{ii} — элемент на главной диагонали $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, и введем следующие допущения.

Допущение 1. Случайные величины $\varepsilon_t,\ t = 1, 2, \ldots$, в (3) центрированы и независимы. Они не зависят от $\mathbf{x}_t,\ t = 1, 2, \ldots$, имеют дисперсии σ^2 и функции распределения $\Phi_t(u),\ t = 1, 2, \ldots$ Причем $\sup\limits_{t=1,2,\ldots} \int\limits_{\|u\| > c} u^2 d\Phi_t(u) \to 0$ при $c \to \infty$. Таким образом, $E\{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\} = \sigma^2 \mathbf{J}_T$, где $\mathbf{J}_T$ — единичная матрица порядка T.

Допущение 2. Матрица $\mathbf{X}$ имеет полный ранг для всех T. Матрица $\mathbf{P} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{D}^{-1} \to \mathbf{P}^0$ при $T \to \infty$, где $\mathbf{P}^0$ — положительно-определенная матрица. При $T \to \infty$ имеем $d_{jj} \to \infty$, $x_{T+1,j}^2 / d_{jj} \to 0$, $j = \overline{1, n}$, где x_{tj} — j-я компонента $\mathbf{x}_t$ в (3).

Условие, налагаемое на матрицу $\mathbf{X}$ этим допущением, — частный случай условия существования P-оценки в утверждении 2.

Теорема 3. Если выполняются допущения 1, 2, то для $r \geq 0$ величина $\mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}(r) - \boldsymbol{\alpha}^0)$ имеет предельное нормальное распределение.

Доказательство. Из матричной записи модели (3) $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}$ и (17), (18) имеем в силу невырожденности матрицы $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ (допущение 2) для $r \geq 0$

$$\boldsymbol{\alpha}(r) - \boldsymbol{\alpha}^0 = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + r\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + r\mathbf{A}'\mathbf{b} - r\mathbf{A}'\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}^0). \tag{20}$$

Отметим, что матрица $\mathbf{X}$ и вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ зависят от объема выборки T.

Если соблюдаются допущения 1 и 2, то согласно теореме 2.6.1 [15, с. 35] случайная величина $\mathbf{Q} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \overset{p}{\Rightarrow} \mathbf{Q}^0$, $T \to \infty$, где $\overset{p}{\Rightarrow}$ — символ сходимости по распределению, $\mathbf{Q}^0 \sim N(\mathbf{O}_n, \sigma^2 \mathbf{P}^0)$.

Из (20) имеем

$$\mathbf{U}(r) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}(r) - \boldsymbol{\alpha}^0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}^{-1} r[\mathbf{A}'\mathbf{b} - \mathbf{A}'\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}^0], \tag{21}$$

где матрица $\mathbf{P}$ определена в допущении 2.

Первое слагаемое в правой части (21) в пределе нормально распределено, а второе слагаемое для конечного r стремится к $\mathbf{O}_n$ при $T \to \infty$. Таким образом, $\mathbf{U}(r)$ имеет асимптотическое нормальное распределение $N(\mathbf{O}_n, \sigma^2(\mathbf{P}^0)^{-1})$, где σ^2 — дисперсия ε_t.

Теорема доказана.

Предельное распределение $\mathbf{U}(r)$ не зависит от r и совпадает с предельным распределением оценки м.н.к. Следовательно, влияние нечетких ограничений на точность оценивания может проявляться только для конечных выборок. Причем оно уменьшается с увеличением T. Здесь имеется отличие от обычных ограничений-неравенств, влияние которых сохраняется для больших T согласно [12], если $\boldsymbol{\alpha}^0$ обращает в равенство по крайней мере одно ограничение.

Из теоремы 3 вытекает как следствие состоятельность оценки $\boldsymbol{\alpha}(r)$ для $r \ge 0$.

Рассмотрим статистические свойства P-оценок для конечного T. Из (20) имеем $E\{\boldsymbol{\alpha}(r)\} \ne \boldsymbol{\alpha}^0$ для $r > 0$, т.е. P-оценка смещенная. Поэтому для измерения ее точности необходимо использовать матрицу средних квадратов ошибок (с.к.о.) оценки параметра. Учитывая состоятельность $\boldsymbol{\alpha}(r)$, из (20) получаем следующий результат.

Теорема 4. Пусть выполняются условие утверждения 2 и допущение 1. Тогда оценкой матрицы с.к.о. P-оценки параметра регрессии с нечеткими ограничениями-неравенствами $E\{\mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}(r)-\boldsymbol{\alpha}^0)(\boldsymbol{\alpha}(r)-\boldsymbol{\alpha}^0)'\mathbf{D}\}$, где $\boldsymbol{\alpha}(r)$ определяется формулой (18), для конечного r является матрица

$$s^2(r)\mathbf{H}_1\mathbf{P}\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_1\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}_2\mathbf{H}_2'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}_1, \qquad (22)$$

где $s^2(r) = ||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}(r)||^2/(T-n)$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{D}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + r\,\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}$, матрица $\mathbf{P}$ определена в допущении 2, $\mathbf{H}_2 = r[\mathbf{A}'\mathbf{b} - \mathbf{A}'\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}^0]$.

Соотношение (22) — состоятельная оценка матрицы с.к.о. P-оценки: ее пределом по вероятности будет $\sigma^2(\mathbf{P}^0)^{-1}$, т.е. предельная ковариационная матрица оценки м.н.к.

Доказательство. Оценка (22) сразу вытекает из (20). Ее состоятельность следует непосредственно из трех пределов:

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{H}_1 = (\mathbf{P}^0)^{-1}, \quad \lim_{T\to\infty} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}_2\mathbf{H}_2'\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{O}_n,$$

$$p\lim_{T\to\infty} s^2(r) = \frac{\mathbf{U}'(r)\mathbf{P}\mathbf{U}(r) - 2\mathbf{U}'(r)\mathbf{Q}}{T-n} + \frac{\mathbf{D}'\mathbf{D}}{T}\frac{T}{T-n} = \sigma^2.$$

Нестационарная регрессия. Регрессия имеет вид (1), ее параметр $\boldsymbol{\alpha}^0 \in \mathbb{R}^{nN}$ оценивается согласно критерию (4).

Предположим, что у данной регрессии разность между некоторым линейным преобразованием величины параметра на интервале I_i и его величиной на интервале I_{i+1} достаточно мала и сосредоточена в окрестности некоторой заданной точки $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$. Изложенное можно сформулировать как нечеткое ограничение-равенство

$$\boldsymbol{\alpha}_{i+1}^0 - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_i^0 = \boldsymbol{\beta}_i, \ i = \overline{1, N-1}, \qquad (23)$$

где $\boldsymbol{\alpha}_i^0$, $\boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\Phi}$ — известная матрица $(n \times n)$. Здесь $\boldsymbol{\beta}_i$, $i = \overline{1, N-1}$, — нечеткие многомерные величины, функции принадлежности которых концентрируются в окрестности точек $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, N-1}$. Эти функции являются обобщением формулы (8), которое имеет вид

$$\phi_{\mathrm{B}_i}(\boldsymbol{\beta}_i) = \exp\left(-\frac{k_i(\boldsymbol{\beta}_i - \mathbf{b}_i)'(\boldsymbol{\beta}_i - \mathbf{b}_i)}{2}\right), \ i = \overline{1, N}, \qquad (24)$$

где B_i — нечеткое подмножество $\mathbb{R}^n$.

Ограничение (23) можно записать как

$$\mathbf{a}'_i \boldsymbol{\alpha}^0 = \boldsymbol{\beta}_i, \ i = \overline{1, N-1}, \tag{25}$$

где

$$\mathbf{a}'_i = [\mathbf{O}_{n,(i-1)n} \ \ -\boldsymbol{\Phi} \ \mathbf{J}_n \ \mathbf{O}_{n,(N-i-1)n}], \ i = \overline{1, N-1}. \tag{26}$$

Равенство (25) представляет собой систему из $n(N-1)$ уравнений, которая является обобщением равенства (7).

Таким образом, для рассматриваемой задачи справедлива теорема 1 при $I_{ie} = \varnothing$, $I_e = \{1, \dots, N-1\}$ и замене b_i на $\mathbf{b}_i$, что дает следующее выражение для функции принадлежности допустимого множества оценок параметра регрессии O:

$$\phi_O(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(-F_2(\boldsymbol{\alpha})), \ F_2(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{k_i}{2} || \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}_i ||^2 = \frac{1}{2} || \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b} ||^2, \tag{27}$$

где матрица $\mathbf{A}$ состоит из строк $\sqrt{k_i}\,\mathbf{a}'_i$, $i = \overline{1, N-1}$ (см. (26)); $\mathbf{b} = [k_i \ \mathbf{b}_i]$, $i = \overline{1, N-1}$. Поэтому задача оценивания переменного параметра регрессии будет иметь вид (11), где $F_1(\boldsymbol{\alpha})$ определяется формулой (4), $F_2(\boldsymbol{\alpha})$ — формулой (27). Тогда P-оценка этого параметра — решение задачи (15), в которой для рассматриваемой задачи оценивания смысл обозначений согласно формулам (1), (4), (26) и пояснений к формуле (27) следующий:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_N \end{bmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1) & \mathbf{O}_{m_1,n} & \cdots & \mathbf{O}_{m_1,n} \\ \mathbf{O}_{m_2,n} & \mathbf{X}(2) & \cdots & \mathbf{O}_{m_2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{O}_{m_N,n} & \mathbf{O}_{m_N,n} & \cdots & \mathbf{X}(N) \end{bmatrix}, \ (T \times nN);$$

$$\mathbf{X}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_{t_i} \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{T_i} \end{bmatrix}, \ i = \overline{1, N};$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{k_1}\boldsymbol{\Phi} & \sqrt{k_1}\mathbf{J}_n & \mathbf{O}_{nn} & \cdots & \mathbf{O}_{nn} & \mathbf{O}_{nn} \\ \mathbf{O}_{nn} & -\sqrt{k_2}\boldsymbol{\Phi} & \sqrt{k_2}\mathbf{J}_n & \cdots & \mathbf{O}_{nn} & \mathbf{O}_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{O}_{nn} & \mathbf{O}_{nn} & \mathbf{O}_{nn} & \cdots & -\sqrt{k_{N-1}}\boldsymbol{\Phi} & \sqrt{k_{N-1}}\mathbf{J}_n \end{bmatrix}, \ (n(N-1) \times nN);$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{k_1}\,\mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \sqrt{k_{N-1}}\,\mathbf{b}_{N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)n}. \tag{28}$$

В формуле (28) T — длина интервала наблюдения, $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, N}$.

Решение задачи (15) определяется выражениями (17), (18) в соответствии с обозначениями (28). С учетом этих обозначений все результаты, полученные для стационарной регрессии, т.е. утверждение 2 и последующие результаты, остаются верными для нестационарной регрессии.

Сделаем одно уточнение о требовании полного ранга матрицы $\mathbf{M}$, сформулированном в утверждении 2. Достаточным условием его существования является наличие полного ранга у матрицы $\mathbf{X}$. Как следует из блочно-диагональной структуры $\mathbf{X}$ (см. (28)), для этого достаточно, чтобы выполнялись условия: $m_i \geq n$, $i = \overline{1, N}$; строки подматриц $\mathbf{X}$, т.е. матриц $\mathbf{X}(i)$, размера $m_i \times n$, $i = \overline{1, N}$, линейно независимы.

Эти условия являются стандартным требованием, используемым в литературе, при исследовании регрессии с переключениями (1).

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРА РЕГРЕССИИ

Стационарная регрессия. Как и в разд. 2, рассмотрим сначала регрессию (3). Ее параметр $\boldsymbol{\alpha}^0$ — детерминированный вектор оценим по критерию (5). В качестве априорной информации используем m линейных стохастических ограничений-равенств на оценки параметра регрессии. Они имеют вид (7), где $I_e = \{1, \ldots, m\}$, однако, в отличие от предыдущего раздела данной работы, правую часть ограничения β_i будем считать случайной величиной. Положим $\beta_i = b_i - \xi_i$, где b_i — известная величина, ξ_i — случайная величина, $E\{\xi_i\} = 0$. Тогда с учетом (7) получаем стохастические системы уравнений, формализующие априорную информацию:

$$b_i - \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\alpha}^0 = \xi_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{29}$$

Положим $\widetilde{\mathbf{b}} = [b_i]$, $i = \overline{1, m}$; $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \ldots \xi_m]'$. С учетом обозначений в разд. 2 к формуле (15) имеем запись в векторном виде системы равенств (29)

$$\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\alpha}^0 = \boldsymbol{\xi}, \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\alpha}^0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\mathbf{A}}$ — матрица $(m \times n)$, составленная из строк $\mathbf{a}'_i$, $i = \overline{1, m}$.

Относительно $\boldsymbol{\xi}$ сделаем следующее допущение.

Допущение 3. Случайная величина $\boldsymbol{\xi}$ имеет такие характеристики: $E\{\boldsymbol{\xi}\} = \mathbf{O}_m$, $E\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}'\} = \sigma_{\xi}^2 \mathbf{K}^{-1}$, где $\mathbf{K}$ — положительно-определенная матрица. Причем $\boldsymbol{\xi}$ и шум $\boldsymbol{\varepsilon}$ в регрессии (3) — некоррелированные случайные величины, т.е. $E\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\varepsilon}'\} = \mathbf{O}_{mn}$.

Объединив матричную запись модели (3) $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}$ с (30), получим смешанную регрессию Тейла и Голдбергера [3]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \widetilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \widetilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^0 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Задача оценивания параметра $\boldsymbol{\alpha}^0$ м.н.к. с учетом допущений 1, 3 имеет вид

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} ||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}||^2 + \frac{r}{2} (\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha})' \mathbf{K} (\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha}) \to \min, \quad r = \sigma^2 / \sigma_{\xi}^2 > 0. \tag{32}$$

Ее решение:

$$\boldsymbol{\alpha}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + r\widetilde{\mathbf{A}}'\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{A}})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{Y} + r\widetilde{\mathbf{A}}'\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{b}}). \tag{33}$$

Оценка $\boldsymbol{\alpha}^*$ — наилучшая линейная несмещенная оценка $\boldsymbol{\alpha}^0$. Ее ковариационная матрица имеет вид

$$E\{(\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}^0)(\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha}^0)'\} = \mathbf{C}^* = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X} + r\widetilde{\mathbf{A}}'\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{A}})^{-1}. \tag{34}$$

Можно также показать, основываясь на допущении 2, что $\boldsymbol{\alpha}^*$ — состоятельная оценка.

Утверждение 3. Если выполняются допущения 2, 3, матрица $\mathbf{A}$ имеет полный ранг, то разность $\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}^*$ — положительно-определенная матрица. Здесь $\hat{\mathbf{C}} = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ — ковариационная матрица оценки параметра, полученной с помощью м.н.к., $\mathbf{C}^*$ — ковариационная матрица оценки параметра смешанной регрессии.

Доказательство. Согласно допущениям 2, 3 матрицы $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ и $\mathbf{K}$ невырожденные. Тогда, используя лемму об обращении матриц, получаем из (34) при $r>0$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X}+r\widetilde{\mathbf{A}}'\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{A}})^{-1}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}-(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}'[r^{-1}\mathbf{K}^{-1}+\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}']^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

Из данного выражения имеем

$$\hat{\mathbf{C}}-\mathbf{C}^*=\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}'[r^{-1}\mathbf{K}^{-1}+\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}']^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

Матрица в правой части равенства положительно-определенная, что завершает доказательство утверждения.

Основным недостатком смешанной регрессии является требование достаточно полной априорной информации: необходимо знать дисперсию шума σ^2 в регрессии (3) и $\sigma_\xi^2\mathbf{K}^{-1}$ — ковариационную матрицу $\boldsymbol{\xi}$ в (30). В [4] и последующих работах на эту тему предлагается вместо дисперсии σ^2 использовать ее оценку s^2, соответствующую оценке м.н.к. $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$:

$$s^2=\frac{||\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}}||^2}{T-n}. \tag{35}$$

Смешанная регрессия заключается в объединении априорной информации и исходных данных в виде регрессии (31). Но это не единственный путь учета априорной информации вида (30). Если $\widetilde{\mathbf{A}}=\mathbf{J}_n$, распределения $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ известны, то оценку параметра регрессии $\boldsymbol{\alpha}^0$ можно также получить, используя байесовский метод. (Подробнее об особенностях таких моделей изложено в [16].) Недостаток этого метода для его практического применения очевиден: необходимо знать распределения $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Пусть в (32) матрица $\mathbf{K}$ диагональная, $\mathbf{K}=\mathrm{diag}(k_1,k_2,\dots,k_m)$, где коэффициенты $k_i>0$, $i=\overline{1,m}$, определяются, как в выражениях (8) и (9). Используя обозначения (14), получаем из (33)

$$\boldsymbol{\alpha}^*=(\mathbf{X}'\mathbf{X}+r\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Y}+r\mathbf{A}'\mathbf{b}). \tag{36}$$

Эта оценка совпадает с P-оценкой (17), (18) параметра регрессии (3) при $r=\sigma^2/\sigma_\xi^2$. Следовательно, для диагональной матрицы $\mathbf{K}$ оценку параметра смешанной регрессии можно рассматривать как частный случай P-оценки.

Нестационарная регрессия. Такая регрессия имеет вид (1). Параметр регрессии $\boldsymbol{\alpha}^0\in\mathbb{R}^{nN}$ оценивается по критерию (4). Согласно разд. 1 $\boldsymbol{\alpha}^0$ состоит из подвекторов $\boldsymbol{\alpha}_i^0\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,N}$. Будем считать, что закон изменения этих подвекторов описывается выражением (23), где $\boldsymbol{\beta}_i\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,N-1}$, — случайная величина.

Положим $\boldsymbol{\beta}_i=\mathbf{b}_i-\boldsymbol{\xi}_i$, где $\mathbf{b}_i\in\mathbb{R}^n$ — известный детерминированный вектор, $\boldsymbol{\xi}_i\in\mathbb{R}^n$ — случайная величина, $E\{\boldsymbol{\xi}_i\}=\mathbf{O}_n$, $E\{\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\xi}_i'\}=\sigma_\xi^2\mathbf{k}_i$, $E\{\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\xi}_j'\}=\mathbf{O}_{nn}$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$. Здесь $\mathbf{k}_i$ — квадратная матрица $n\times n$. Тогда из (23) получим

$$\mathbf{b}_i=\boldsymbol{\alpha}_{i+1}^0-\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_i^0+\boldsymbol{\xi}_i,\ \ i=\overline{1,N-1}. \tag{37}$$

Матричная запись этого выражения будет иметь вид (30), где

$$\widetilde{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \vdots\\ \mathbf{b}_{N-1}\end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1\\ \boldsymbol{\xi}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\xi}_{N-1}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n(N-1)},$$

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{\Phi} & \mathbf{J}_n & \mathbf{O}_{nn} & \cdots & \mathbf{O}_{nn} & \mathbf{O}_{nn} \\ \mathbf{O}_{nn} & -\mathbf{\Phi} & \mathbf{J}_n & \cdots & \mathbf{O}_{nn} & \mathbf{O}_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{O}_{nn} & \mathbf{O}_{nn} & \mathbf{O}_{nn} & \cdots & -\mathbf{\Phi} & \mathbf{J}_n \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{A}}$ — матрица размера $(n(N-1)\times nN)$.

Объединив формулу (30), в которой $\boldsymbol{\alpha}^0 \in \mathbb{R}^{nN}$, $\widetilde{\mathbf{b}}$, $\boldsymbol{\xi}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}$ определены в (38), с регрессией $\mathbf{Y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}^0+\boldsymbol{\varepsilon}$, соответствующей выборочным данным, где $\mathbf{Y}, \mathbf{X}$ определены в (28), $\boldsymbol{\alpha}^0 \in \mathbb{R}^{nN}$, получим выражение (31). В нем параметр $\boldsymbol{\alpha}^0$ — случайная величина. Это выражение можно трактовать как расширение понятия смешанной регрессии [3], где ее параметр предполагается константой, на нестационарный случай. Поэтому назовем рассматриваемую регрессию нестационарной смешанной. Задача оценивания параметра такой регрессии, очевидно, будет иметь вид (32), где $\mathbf{K}=\mathrm{diag}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_{N-1})$ — квадратная блочно-диагональная матрица порядка $N-1$, а ее решением является (33).

Пусть
$$\mathbf{k}_i = k_i \mathbf{J}_n,\ k_i > 0,\ i=\overline{1, N-1}. \tag{39}$$

Подставим в (33) матрицу $\mathbf{K}$, у которой подматрицы на главной диагонали имеют вид (39). Нетрудно увидеть, что для такой матрицы справедливо выражение (14), в котором $\mathbf{A}$ — матрица, приведенная в (28). Следовательно, из (33) с учетом (14) имеем оценку (36), в которой $\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{b}$ определены в (28), $r=\sigma^2/\sigma_{\xi}^2$. Эта оценка совпадает для указанного r с P-оценкой параметра нестационарной регрессии с нечеткой априорной информацией (см. (17) и (18)).

Таким образом, как и в случае стационарной смешанной регрессии, если выполняется условие (39), нестационарная смешанная регрессия является частным случаем P-оценки.

Покажем, что этот результат справедлив в общем случае. Обобщим выражение для функции принадлежности нечеткой допустимой области в пространстве параметров (27), положив
$$\phi_O(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(-F_2(\boldsymbol{\alpha})),\ F_2(\boldsymbol{\alpha}) = (\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha})' \mathbf{K} (\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha}), \tag{40}$$
где $\widetilde{\mathbf{b}}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}$ приведены в (38), $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{nN}$, $\mathbf{K}$ — произвольная положительно-определенная матрица. Тогда задача оценивания согласно (4), (12) и (40) примет вид
$$F(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}||\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}||^2 + \frac{r}{2}(\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha})' \mathbf{K} (\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha}) \to \min,\ r \ge 0,$$
где величины $\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}$ заданы в (28).

Решение этой задачи $\boldsymbol{\alpha}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + r\widetilde{\mathbf{A}}'\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{A}})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Y} + r\widetilde{\mathbf{A}}'\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{b}})$ совпадает при $r=\sigma^2/\sigma_{\xi}^2$ с оценкой параметра нестационарной смешанной регрессии (33), что и требовалось установить.

Оценка параметров смешанной нестационарной регрессии $\boldsymbol{\alpha}^*$, определяемая формулой (36), состоит из N подвекторов — оценок $\boldsymbol{\alpha}_i^0$, $i=\overline{1, N}$ (см. (1)). Обозначим эти оценки $\boldsymbol{\alpha}_{i|N}$, $i=\overline{1, N}$, где i — индекс интервала I_i (см. (1)), N — число интервалов времени, по которым оценен вектор $\boldsymbol{\alpha}_i^0$. Таким образом, в (36) $\boldsymbol{\alpha}^* = [\boldsymbol{\alpha}_{1|N}\ \boldsymbol{\alpha}_{2|N}\ \ldots\ \boldsymbol{\alpha}_{N|N}]'$. Оценки $\boldsymbol{\alpha}_{i|N}$, $i=\overline{1, N}$, представляют интерес при решении, например, задач эконометрии для определения динамики изменения той или иной характеристики экономического процесса.

При решении многих технических задач, в частности задач управления технологическими процессами, требуется знать оценку параметра модели (1) $\boldsymbol{\alpha}_i^0$ для текущего i-го интервала времени I_i. Эта оценка, как и модель регрессии, которую она определяет (см. (1)), справедлива для любого периода времени $t \in I_i$. Такую модель можно назвать текущей: она используется в выработке управляющих воздействий для $t \in I_i$. Следовательно, необходимо, чтобы система управления отслеживала изменение параметра регрессии с переключениями, а знание предыстории, как в задачах экономики, необязательно.

Последовательность, о которой идет речь, имеет вид

$$\boldsymbol{\alpha}_{1|1}, \boldsymbol{\alpha}_{2|2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i|i}, \ldots, \tag{41}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_{i|i}$ — оценка $\boldsymbol{\alpha}_i^0$ по данным $\sum_{j=1}^{i} m_j$ наблюдений. Рассмотрим итеративное определение указанной последовательности оценок. С этой целью запишем смешанную нестационарную регрессию (31), используя формулы (1) и (37), как систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{b}_i = \boldsymbol{\alpha}_{i+1}^0 - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_i^0 + \boldsymbol{\xi}_i, \; i = \overline{1, N-1}, \\ y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\alpha}_i^0 + \varepsilon_t, \; i = \overline{1, N}, \; t \in I_i = [t_i, T_i]. \end{cases} \tag{42}$$

Выражение (42) можно трактовать как модель динамической системы в пространстве состояний, в качестве которого выступает пространство параметров регрессии (ненаблюдаемые величины). Выходом системы являются величины y_t, $t = \overline{1, T}$. Регрессоры $\mathbf{x}_t$, $t \in I_i = [t_i, T_i]$, $i = \overline{1, N}$, и матрица $\boldsymbol{\Phi}$ рассматриваются как параметры системы, а векторы $\mathbf{b}_i$, $i = \overline{1, N-1}$, — как величины управляющего воздействия. Если заданы оценка начального значения параметра $\boldsymbol{\alpha}_i^0$ и его ковариационная матрица, то последовательность (41) можно получить в результате решения задачи оптимальной фильтрации, используя фильтр Калмана.

Таким образом, фильтр Калмана можно рассматривать как частный случай оценивания параметров нестационарной смешанной регрессии.

В табл. 1 приведены типы регрессии с постоянным параметром (размерность не зависит от объема выборки) и переменным параметром (размерность зависит от объема выборки), исходя из способа задания априорной информации.

Таблица 1

Способ формализации априорной информации	Регрессия	
	с постоянным параметром	с переменным параметром
Нечеткие ограничения-неравенства	Двухкритериальная задача оценивания, где второй критерий имеет вид (10) при $I_e = \varnothing$	—
Нечеткие ограничения-равенства	Обобщенная гребневая регрессия	Обобщенная гребневая регрессия
Стохастическое уравнение $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha}^0 + \boldsymbol{\xi}$ с известными математическим ожиданием и ковариационной матрицей случайной величины $\boldsymbol{\xi}$	Смешанная регрессия	Смешанная нестационарная регрессия (в частности, при условии задания начального значения параметра и его ковариационной матрицы — фильтра Калмана)
Стохастическое уравнение $\tilde{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\alpha}^0 + \boldsymbol{\xi}$ с известным распределением случайной величины $\boldsymbol{\xi}$	Байесовская регрессия	Фильтр Калмана

4. ГИБРИДНАЯ РЕГРЕССИЯ

Одноэтапная гибридная регрессия. В [17] предложено обобщение смешанной регрессии, названное взвешенной смешанной регрессией, которое дает следующую задачу оценивания параметра регрессии (в принятых обозначениях):

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2\sigma^2} ||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}||^2 + \frac{r}{2\sigma_\xi^2} (\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha})' \mathbf{K} (\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha}) \to \min, \quad 0 \le r \le 1, \qquad (43)$$

где в соответствии с допущением 3 $\sigma_\xi^2 \mathbf{K}^{-1}$ — ковариационная матрица случайной величины $\boldsymbol{\xi}$, определенной в (30).

В задаче оценивания (43) в отличие от задачи (32) можно регулировать вклад априорной информации в величину оценки параметра регрессии: при $r = 1$ она максимальна, при $r = 0$ не учитывается. Выбор величины r в [17] не рассматривается. Исходя из моделей, описанных в разд.1, предлагается следующий метод определения величины r.

Задачу (43) трактуем как результат свертки в один критерий двухкритериальной задачи оценивания

$$F_1(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2\sigma^2} ||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}||^2 \to \min, \; F_2(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2\sigma_\xi^2} (\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha})' \mathbf{K} (\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha}) \to \min,$$

$$0 \le r \le 1. \qquad (44)$$

Если матрица $\mathbf{X}$ в (43) имеет полный ранг, то согласно утверждению 1 P-оценками параметра регрессии в задаче (44) являются решения задачи (43)

$$\boldsymbol{\alpha}(r) = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + r(\sigma^2 / \sigma_\xi^2) \widetilde{\mathbf{A}}' \mathbf{K} \widetilde{\mathbf{A}})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{Y} + r(\sigma^2 / \sigma_\xi^2) \widetilde{\mathbf{A}}' \mathbf{K} \widetilde{\mathbf{b}}), \; 0 \le r \le 1. \qquad (45)$$

В рассматриваемом случае отрезком, которому принадлежит искомая величина $r = r^*$, определяющая единственную оценку из множества оценок (43), будет $Z = [r_0, r_1]$, где $r_0 = 0$, $r_1 = 1$. Величину r^* найдем в результате решения задачи (19), в которой $f_i(r, \mathbf{b}^*) = F_i(\boldsymbol{\alpha}(r))$, где $\boldsymbol{\alpha}(r)$ определено в (45). Тогда из (45) получаем единственную оценку, которую назовем гибридной:

$$\boldsymbol{\alpha}_h = \boldsymbol{\alpha}(r^*) = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + r^* (\sigma^2 / \sigma_\xi^2) \widetilde{\mathbf{A}}' \mathbf{K} \widetilde{\mathbf{A}})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{Y} + r^* (\sigma^2 / \sigma_\xi^2) \widetilde{\mathbf{A}}' \mathbf{K} \widetilde{\mathbf{b}}). \qquad (46)$$

Таким образом, при вычислении гибридной оценки выбор веса априорной информации r^* основывается на компромиссе между вкладом выборочной и априорной информации в оценку $\boldsymbol{\alpha}_h$, определенном исходя из трактовки задачи оценивания как двухкритериальной с нечеткими целями оценивания. Статистические свойства оценки (46) следуют из результатов [17], в частности, она является смещенной, как и P-оценка.

Двухэтапная гибридная регрессия. При вычислении оценок параметров смешанной регрессии требуется достаточно подробная априорная информация: в стохастическом уравнении (30) должны быть известны величины $\widetilde{\mathbf{b}}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}$, а также задана ковариационная матрица $\boldsymbol{\xi}$.

Для построения регрессии на основе использования априорной нечеткой информации к такой информации меньше требований: знание $\widetilde{\mathbf{b}}$ необязательно, так как данный вектор может быть найден по алгоритму [13] (разд. 2). Кроме того, для задания параметров функции принадлежности нечеткой величины $\boldsymbol{\beta}_i$, $i = \overline{1, m}$, в формуле (8) достаточно «расплывчатых» соображений, например, не требуется знания дисперсий компонент $\boldsymbol{\xi}$. Однако основанная на использовании нечеткой априорной информации оценка параметра регрессии — смещенная, матрица с.к.о. зависит от истинной величины параметра регрессии $\boldsymbol{\alpha}^0$ (см. (22)). Нужно получить оценку $\boldsymbol{\alpha}^0$, использующую «нетребовательность» нечеткой априорной информации, но обладающую «хорошими» свойствами оценки смешанной регрессии. Возможность получения такой оценки следует из совпадения P-оценки и смешанной оценки, установленного в разд. 3, формула (36), и пояснения к этой формуле. Построим такую оценку в два этапа.

На первом этапе получаем P-оценку $\boldsymbol{\alpha}(r)$, задаваемую выражениями (17), (18):

$$\boldsymbol{\alpha}(r) = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + r\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Y} + r\mathbf{A}'\mathbf{b}), \tag{47}$$

где величина $\mathbf{b}$ определяется по алгоритму из [13], если она не задана.

Пусть в (47)

$$r = \sigma^2 / \sigma_\xi^2. \tag{48}$$

На втором этапе при условии выполнения (48) определяется возможность трактовки (47) как оценки параметра смешанной регрессии

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^0 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{K}^{1/2}\boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}, \tag{49}$$

где априорная информация согласно (31) и (14) задается уравнением

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}^0 = \mathbf{K}^{1/2}\boldsymbol{\xi},\ E\{\boldsymbol{\xi}\} = \mathbf{O}_m,\ E\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}'\} = \sigma_\xi^2 \mathbf{K}^{-1},\ E\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\varepsilon}'\} = \mathbf{O}_{mn}. \tag{50}$$

Для достижения этой цели используем предложенный в [4] критерий проверки совместимости априорной и выборочной информации. Согласно [4] для априорной информации, задаваемой уравнением (50), совместимость ее с выборочными данными $(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ определим с помощью статистики

$$\chi^2(r) = (\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\hat{\boldsymbol{\alpha}})'(\sigma^2 \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}' + \sigma_\xi^2 \mathbf{K}^{-1})^{-1}(\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{\mathbf{A}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}),$$

где $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$.

С учетом обозначения (14) и условия (48) имеем

$$\chi^2(r) = \sigma^2(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}' + r^{-1}\mathbf{J}_m)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}}). \tag{51}$$

Когда $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{O}_n, \sigma^2 \mathbf{J}_n)$, $\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{O}_m, \sigma_\xi^2 \mathbf{K}^{-1})$ и выполняется допущение 3, согласно [4] $\chi^2(r)$ имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. Если

$$\chi^2(r) \le \chi_{np}^2, \tag{52}$$

где χ_{np}^2 — $100p$%-я точка распределения χ^2 с n степенями свободы, выборочная информация совместима с априорной информацией в виде $\mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}^0 = \boldsymbol{\xi}$.

Назовем оценку $\boldsymbol{\alpha}_h(r) = \boldsymbol{\alpha}(r)$, где $\boldsymbol{\alpha}(r)$ задается формулой (47), гибридной (h-оценкой), если для заданного $r > 0$ выполняется условие (52).

Теорема 5. Пусть: 1) число ограничений $m \le n$; 2) задана функция принадлежности нечеткого допустимого множества в пространстве параметров, т.е. известны матрицы $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\mathbf{K} = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ и вектор $\widetilde{\mathbf{b}}$; 3) матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{A}$ имеют полный ранг; 4) P-оценка $\boldsymbol{\alpha}(r)$ параметра регрессии задается формулами (47), (48); 5) выполняется допущение 3 и $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{O}_n, \sigma^2 \mathbf{J}_n)$, $\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{O}_m, \sigma_\xi^2 \mathbf{K}^{-1})$; 6) $\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \ne \mathbf{O}_m$. Тогда найдется такое $r_1 > 0$, что для любого $r \in Z = [0, r_1]$ P-оценку (47) можно трактовать как оценку смешанной регрессии (49) с априорной информацией в виде уравнения (50), которая не противоречит выборочным данным, заданным парой $(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.

Доказательство. В силу условий 1–5 теоремы выражение (51) существует для $r \geq 0$ и имеет распределение χ^2 для $r > 0$ согласно [4]. Из условий 1, 3 также вытекает, что с увеличением r функция $\chi^2(r)$ монотонно увеличивается от величины $\chi^2(0) = 0$ до $\chi^2(\infty) = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}})'(\sigma^2 \mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}}) > 0$. Положительность $\chi^2(\infty)$ следует из того, что эта величина — положительно-определенная квадратичная форма от $\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, а также условия 6.

В силу монотонного роста $\chi^2(r)$ всегда найдется такое $r_1 > 0$, которое является корнем уравнения $\chi^2(r) = \chi^2_{np}$. Тогда для любого r, $0 \leq r < r_1$, будет выполняться (52), так как $\chi^2(r)$ — монотонная функция.

Теорема доказана.

Чтобы вычислить статистику (51), необходимо знать σ^2 — неизвестную величину. Поэтому, следуя [4], заменим в (48) и (51) σ^2 на ее состоятельную оценку s^2, полученную по формуле (35). Тогда согласно (48) имеем оценку $\sigma^2_{\boldsymbol{\xi}}$ с учетом того, что r — неслучайная величина,

$$\hat{\sigma}^2_{\boldsymbol{\xi}} = s^2 / r, \tag{53}$$

а из (51) получим $\hat{\chi}^2(r) = s^2(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}' + r^{-1}\mathbf{J}_m)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}})$. Распределение $\hat{\chi}^2(r)$ будет близко к $\chi^2(r)$ при достаточно большом T. Поэтому вместо (52) можно проверять условие $\hat{\chi}^2(r) \leq \chi^2_p$. Его выполнение означает, что регрессия (3), у которой оценка дисперсии шума s^2, совместима с априорной информацией в виде $\mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}^0 = \boldsymbol{\xi}$, если оценка ковариационной матрицы $\boldsymbol{\xi}$ равна $\hat{\sigma}^2_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{K}^{-1}$.

Статистические свойства гибридной оценки, очевидно, такие же, как и смешанной оценки: $\boldsymbol{\alpha}_h(r)$ — наилучшая линейная несмещенная оценка $\boldsymbol{\alpha}^0$, для которой верно утверждение 3. Оценку ковариационной матрицы $\boldsymbol{\alpha}_h(r)$ можно получить по формуле (34), заменив в ней σ^2 на s^2.

Согласно изложенному множество оценок $\boldsymbol{\alpha}_h(r)$ задается формулой (47), где $r \in [0, r_1]$, $r_1 > 0$, определяется по теореме 5. Это множество ассоциируется с вытекающим из формулы (1) множеством регрессий

$$\hat{y}_t = \mathbf{x}'_t \mathbf{A}_t(r), \; \mathbf{A}_t(r) = \boldsymbol{\alpha}_{hi}(r), \; t \in I_i = [t_i, T_i], \; i = \overline{1, N}, \; r \in [0, r_1], \tag{54}$$

где $\hat{y}_t$ — оценка y_t, $\boldsymbol{\alpha}_{hi}(r)$ — i-й подвектор $\boldsymbol{\alpha}_h(r)$.

Выбор единственной модели из (54) сводится к вычислению некоторого значения $r = r^*$, которое задает единственную гибридную оценку $\boldsymbol{\alpha}_h(r^*)$. Для определения $\boldsymbol{\alpha}_h(r^*)$ руководствуемся следующим алгоритмом.

1. Найти на основе принципа Беллмана–Заде по алгоритму из разд. 2 величину r^*, определяющую P-оценку $\boldsymbol{\alpha}(r^*)$, заданную формулой (47) для $r = r^*$.

2. Вычислить $r_1 > 0$ — решение уравнения $\hat{\chi}^2(r) = \chi^2_p$.

3. Если найденная величина $r^* \in [0, r_1]$, то искомая оценка $\boldsymbol{\alpha}_h(r^*) = \boldsymbol{\alpha}(r^*)$. Тогда согласно (53) $\hat{\sigma}^2_{\boldsymbol{\xi}} = s^2 / r^*$. В противном случае — переход к шагу 4.

4. Возможны два варианта: первый — положить $r^* = r_1$, где r_1 определено на шаге 2; второй — согласно алгоритму из разд. 2 найти величину r^*, исходя из

того, что она принадлежит отрезку КК $Z = [r_0, r_1]$. В результате получим P-оценку $\boldsymbol{\alpha}(r^*)$, которая и является искомой гибридной оценкой $\boldsymbol{\alpha}_h(r^*)$. Причем так же, как на шаге 3, согласно (53) $\hat{\sigma}_\xi^2 = s^2 / r^*$.

Следует отметить, что данная процедура не всегда позволяет найти такую P-оценку, которую можно трактовать также как смешанную оценку. Если величина r_1 — решение уравнения $\hat{\chi}^2(r) = \chi_p^2$ — мала, то влияние априорной информации на оценку параметра регрессии будет незначительным, что, возможно, приведет к регрессионной модели, не удовлетворяющей требованиям ее разработчика. В этом случае придется использовать P-оценку, имеющую смещение. Ее матрица средних квадратов ошибок приведена в разд. 2.

В работе описана классификация методов учета априорной информации в регрессионном анализе. На основе изучения этих методов предложено обобщение метода смешанной регрессии и введен новый класс оценок, названных гибридными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корхин А.С. Оценивание параметров линейной регрессии при нечеткой априорной информации // Экономика и мат. методы. — 1989. — Вып. 4. — С. 695–706.
2. Корхин А.С. Оценивание параметров многомерной линейной регрессии при ограничениях-неравенствах, заданных нечетко // Кибернетика. — 1988. — № 2. — С. 52–57.
3. Theil H., Goldberger A.S. On pure and mixed statistical estimation in economics // Intern. Econ. Rev. — 1960. — **2**. — P. 65–73.
4. Theil H. On the use of incomplete prior information in regression analysis // J. Amer. Statist. Assoc. — 1963. — **58**. — P. 401–414.
5. Heumann C., Shalabh. Weighted mixed regression estimation under biased stochastic restrictions: (Techn. rep.) / Dep. of Statist. Univ. of Munich. — 2007. — Number 010. — 17 p. — http://www.stat.uni-muenchen.de.
6. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 302 с.
7. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 456 с.
8. Judje G.C., Takayama T. Inequality restrictions in regression analysis // J. Amer. Stat. Assoc. — 1966. — **61**. — P. 166–181.
9. Liew C.K. Inequality constraints least squares estimation // Ibid. — 1976. — **71**. — P. 746–751.
10. Thomson M. Some results on the statistical properties of an inequality constraints least squares estimator in a linear model with two regressors // J. Econometrics. — 1982. — **19**. — P. 215–231.
11. McDonald G.C. Constrained regression estimates of technology effects on fuel economy // J. Quality Technology. — 1999. — **31**, Issue 2. — P. 235–245.
12. Knopov P.S., Korkhin A.S. Regression analysis under a priori parameter restrictions. — New York: Springer Publ., 2011. — 245 p.
13. Корхин А.С. Вычисление Парето-оптимальных оценок параметров регрессии // Завод. лаб. — 1994. — № 5. — С. 47–55.
14. Корхин А.С. Оценивание переменных параметров регрессии как двухкритериальная задача // Кибернетика. — 1991. — № 3. — С. 67–73.
15. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1976. — 755 с.
16. Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии: Пер. с англ. — М.: Статистика, 1980. — 438 с.
17. Toutenburg H., Srivastava V.K., Schaffrin B. Efficiency properties of weighted mixed regression estimation // Sonderforschungsbereich 386, Paper 122 / Inst. fur Statistic Univ. — Munchen, 1998. — 11 p. — http://epub.ub.uni-muenchen.de/.

Поступила 17.11.2011