УДК 681.322.012

Л.Д. ЕЛФИМОВА

НОВЫЕ КЛЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Ключевые слова: *линейная алгебра, клеточные методы умножения матриц, быстрые гибридные алгоритмы матричного умножения, алгоритм Лейдермана*.

В настоящее время для численных методов линейной алгебры разработаны их клеточные аналоги [1], обеспечивающие возможность быстрого решения задач произвольных размеров на различных вычислительных системах и создания эффективного программного обеспечения для таких систем. В работах [2, 3] впервые представлены быстрый и смешанный клеточные методы умножения двух $(n\times n)$-матриц, на основе которых получены клеточные аналоги известных алгоритмов матричного умножения с минимизированной вычислительной сложностью. Быстрый клеточный метод [2] обеспечивает минимизацию мультипликативной, аддитивной и общей сложностей указанных алгоритмов на 12,5 %. Смешанный клеточный метод [3] сочетает рекурсивный метод Штрассена [4] для умножения $(n\times n)$-матриц с быстрым клеточным методом, взаимодействие которых приводит к получению клеточных аналогов известных алгоритмов матричного умножения с минимизированными на 25 % мультипликативной, аддитивной и общей сложностями. Данные методы имеют место при n, кратных 2.

Для оптимизации вычислительной сложности клеточных аналогов известных алгоритмов умножения матриц, полученных на основе методов [2, 3], в настоящей статье рассмотрены два новых клеточных метода умножения $(n\times n)$-матриц, использующих исходные матрицы не только четного, но и нечетного порядка. Новый быстрый клеточный метод дает возможность получить клеточные аналоги указанных алгоритмов с минимизированными на 15 % мультипликативной, аддитивной и общей сложностями. Новый смешанный клеточный метод сочетает рекурсивный метод Лейдермана [5] для умножения $(n\times n)$-матриц с предложенным далее быстрым клеточным методом, взаимодействие которых приводит к получению клеточных аналогов известных алгоритмов матричного умножения с минимизированными на 28 % мультипликативной, аддитивной и общей сложностями. Предлагаемые методы имеют место при n, кратных 3. Оценки вычислительной сложности этих методов даны на примере получения клеточных аналогов традиционного алгоритма умножения матриц [6].

Новый быстрый клеточный метод умножения матриц. Основой для построения данного метода является описанный в [7] быстрый гибридный алгоритм умножения двух числовых матриц, который допускает переход к крупномасштабным вычислениям на уровне клеточных операций. Пусть A, B и $C=AB$ — три матрицы порядка $n=3\mu\cdot r$, где $\mu>1$, r — размер клетки, $m=n/r$. Декомпозируем исходные матрицы A и B на клетки заданного порядка r:

$$A=\begin{array}{c c} & \overbrace{\phantom{A_{11}}}^{r} \\ r\{ & \left[\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{array}\right]\end{array},\quad B=\begin{array}{c c} & \overbrace{\phantom{B_{11}}}^{r} \\ r\{ & \left[\begin{array}{c:c:c:c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{array}\right]\end{array},\quad C=\begin{array}{c c} & \overbrace{\phantom{C_{11}}}^{r} \\ r\{ & \left[\begin{array}{c:c:c:c} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1m} \\ \hdashline C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2m} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mm} \end{array}\right]\end{array}.$$

Результирующая матрица $C = AB$ будет иметь идентичную каждому сомножителю клеточную структуру.

Величина r зависит от выбранного внутреннего алгоритма, в качестве которого можно использовать известные алгоритмы матричного умножения, оперирующие числами.

Клеточный метод, оперирующий $(r \times r)$-матрицами, состоит из трех этапов.

Этап 1. Вычисляем матричные коэффициенты R_{ik} и F_{kj}:

$$R_{ik}^1 = A_{3i-2,3k-2} + A_{3i-2,3k-1} + A_{3i-2,3k} - A_{3i-1,3k-2} - A_{3i-1,3k-1} - A_{3i,3k-2} - A_{3i,3k},$$

$$R_{ik}^2 = A_{3i-2,3k-2} - A_{3i-1,3k-2}, \; R_{ik}^3 = -A_{3i-2,3k-2} + A_{3i-1,3k-2} + A_{3i-1,3k-1},$$

$$R_{ik}^4 = A_{3i-1,3k-2} + A_{3i-1,3k-1}, \; R_{ik}^5 = -A_{3i-2,3k-2} + A_{3i,3k-2} + A_{3i,3k-1},$$

$$R_{ik}^6 = -A_{3i-2,3k-2} + A_{3i,3k-2}, \; R_{ik}^7 = A_{3i,3k-2} + A_{3i,3k-1}, \tag{1}$$

$$R_{ik}^8 = A_{3i-2,3k-2} + A_{3i-2,3k-1} + A_{3i-2,3k} - A_{3i-1,3k-1} - A_{3i-1,3k} - A_{3i,3k-2} - A_{3i,3k-1},$$

$$R_{ik}^9 = -A_{3i-2,3k} + A_{3i,3k-1} + A_{3i,3k}, \; R_{ik}^{10} = A_{3i-2,3k} - A_{3i,3k},$$

$$R_{ik}^{11} = A_{3i,3k-1} + A_{3i,3k}, \; R_{ik}^{12} = -A_{3i-2,3k} + A_{3i-1,3k-1} + A_{3i-1,3k},$$

$$R_{ik}^{13} = A_{3i-2,3k} - A_{3i-1,3k}, \; R_{ik}^{14} = A_{3i-1,3k-1} + A_{3i-1,3k},$$

где $i, j, k = 1, 2, \ldots, p$; $p = n / 3r$;

$$F_{kj}^1 = -B_{3k-2,3j-1} + B_{3k-1,3j-1}, \; F_{kj}^2 = -B_{3k-2,3j-2} + B_{3k-2,3j-1} +$$

$$+ B_{3k-1,3j-2} - B_{3k-1,3j-1} - B_{3k-1,3j} - B_{3k,3j-2} + B_{3k,3j},$$

$$F_{kj}^3 = B_{3k-2,3j-2} - B_{3k-2,3j-1} + B_{3k-1,3j-1}, \; F_{kj}^4 = -B_{3k-2,3j-2} + B_{3k-2,3j-1},$$

$$F_{kj}^5 = B_{3k-2,3j-2} - B_{3k-2,3j} + B_{3k-1,3j},$$

$$F_{kj}^6 = B_{3k-2,3j} - B_{3k-1,3j}, \; F_{kj}^7 = -B_{3k-2,3j-2} + B_{3k-2,3j}, \tag{2}$$

$$F_{kj}^8 = -B_{3k-2,3j-2} + B_{3k-2,3j} + B_{3k-1,3j-2} - B_{3k-1,3j-1} - B_{3k-1,3j} -$$

$$- B_{3k,3j-2} + B_{3k,3j-1}, \; F_{kj}^9 = B_{3k-1,3j-1} + B_{3k,3j-2} - B_{3k,3j-1},$$

$$F_{kj}^{10} = B_{3k-1,3j-1} - B_{3k,3j-1}, \; F_{kj}^{11} = -B_{3k,3j-2} + B_{3k,3j-1},$$

$$F_{kj}^{12} = B_{3k-1,3j} + B_{3k,3j-2} - B_{3k,3j}, \; F_{kj}^{13} = B_{3k-1,3j} - B_{3k,3j},$$

$$F_{kj}^{14} = -B_{3k,3j-2} + B_{3k,3j},$$

где $i, j, k = 1, 2, \ldots, p$; $p = n / 3r$.

Этап 2. Вычисляем промежуточные матрицы Q_{ij}:

$$Q_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^1 \cdot B_{3k-1,3j-1}, \; Q_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^2 \cdot F_{kj}^1, \; Q_{ij}^3 = \sum_{k=1}^{p} A_{3i-1,3k-1} \cdot F_{kj}^2,$$

$$Q_{ij}^4 = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^3 \cdot F_{kj}^3, \; Q_{ij}^5 = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^4 \cdot F_{kj}^4, \; Q_{ij}^6 = \sum_{k=1}^{p} A_{3i-2,3k-2} \cdot B_{3k-2,3j-2},$$

$$Q_{ij}^7 = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^5 \cdot F_{kj}^5, \; Q_{ij}^8 = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^6 \cdot F_{kj}^6, \; Q_{ij}^9 = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^7 \cdot F_{kj}^7,$$

$$Q_{ij}^{10} = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^8 \cdot B_{3k-1,3j}, \; Q_{ij}^{11} = \sum_{k=1}^{p} A_{3i,3k-1} \cdot F_{kj}^8, \; Q_{ij}^{12} = \sum_{k=1}^{p} R_{ik}^9 \cdot F_{kj}^9, \tag{3}$$

$$Q_{ij}^{13}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{10}\cdot F_{kj}^{10},\ Q_{ij}^{14}=\sum_{k=1}^{p}A_{3i-2,3k}\cdot B_{3k,3j-2},\ Q_{ij}^{15}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{11}\cdot F_{kj}^{11},$$

$$Q_{ij}^{16}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{12}\cdot F_{kj}^{12},\ Q_{ij}^{17}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{13}\cdot F_{kj}^{13},\ Q_{ij}^{18}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{14}\cdot F_{kj}^{14},$$

$$Q_{ij}^{19}=\sum_{k=1}^{p}A_{3i-2,3k-1}\cdot B_{3k-1,3j-2},\ Q_{ij}^{20}=\sum_{k=1}^{p}A_{3i-1,3k}\cdot B_{3k,3j-1},$$

$$Q_{ij}^{21}=\sum_{k=1}^{p}A_{3i-1,3k-2}\cdot B_{3k-2,3j},\ Q_{ij}^{22}=\sum_{k=1}^{p}A_{3i,3k-2}\cdot B_{3k-2,3j-1},$$

$$Q_{ij}^{23}=\sum_{k=1}^{p}A_{3i,3k}\cdot B_{3k,3j},$$

где $i, j, k=1,2,\ldots, p$.

Этап 3. Вычисляем результирующие матрицы C_{ij}:

$$\begin{gathered}
C_{3i-2,3j-2}=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{19},\\
C_{3i-2,3j-1}=Q_{ij}^{1}+Q_{ij}^{4}+Q_{ij}^{5}+Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{12}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{15},\\
C_{3i-2,3j}=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{7}+Q_{ij}^{9}+Q_{ij}^{10}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{16}+Q_{ij}^{18},\\
C_{3i-1,3j-2}=Q_{ij}^{2}+Q_{ij}^{3}+Q_{ij}^{4}+Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{16}+Q_{ij}^{17},\\
C_{3i-1,3j-1}=Q_{ij}^{2}+Q_{ij}^{4}+Q_{ij}^{5}+Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{20},\\
C_{3i-1,3j}=Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{16}+Q_{ij}^{17}+Q_{ij}^{18}+Q_{ij}^{21},\\
C_{3i,3j-2}=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{7}+Q_{ij}^{8}+Q_{ij}^{11}+Q_{ij}^{12}+Q_{ij}^{13}+Q_{ij}^{14},\\
C_{3i,3j-1}=Q_{ij}^{12}+Q_{ij}^{13}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{15}+Q_{ij}^{22},\\
C_{3i,3j}=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{7}+Q_{ij}^{8}+Q_{ij}^{9}+Q_{ij}^{23},
\end{gathered} \tag{4}$$

где $i, j=1,2,\ldots, p$.

Оценим вычислительную сложность рассмотренного клеточного метода (1)–(4). Поскольку матричные коэффициенты R_{ik} (соответственно F_{kj}) вычисляются только один раз и используются для всей матричной строки i (соответственно матричного столбца j), состоящей из $(3r\times 3r)$-клеток, при вычислении (1) и (2) внешний (клеточный) алгоритм требует $56p^2$ матричных операций сложения. Для каждой матричной операции сложения внутренний алгоритм требует r^2 скалярных операций сложения, так как порядок матриц-операндов равен r. Следовательно, аддитивная сложность вычислений (1) и (2), определяемая количеством скалярных операций сложения, составляет $W_{\text{a}}^{(1),(2)}=56p^2\cdot r^2=$ $=56\left(\dfrac{n}{3r}\right)^2\cdot r^2\approx 6{,}22n^2$ операций сложения.

При вычислении матричных выражений (3) внешний алгоритм требует $23p^3$ матричных операций умножения и $23\,(p^3-p^2)$ матричных операций сложения. Используя в качестве внутреннего алгоритма традиционный алгоритм [6], требующий r^3 скалярных операций умножения и (r^3-r^2) скалярных операций сложения, получаем следующие значения мультипликативной и аддитивной сложностей вычислений (3):

• $W_{\text{м}}^{(3)} = 23\,p^3 r^3 = 23\left(\dfrac{n}{3r}\right)^3 r^3 \approx 0{,}85n^3$ операций умножения;

• $W_{\text{а}}^{(3)} = 23[(p^3 - p^2)r^2 + p^3(r^3 - r^2)] = 23\left(\dfrac{n}{3r}\right)^3 r^3 - 23\left(\dfrac{n}{3r}\right)^2 r^2 \approx 0{,}85n^3 -$
$- 2{,}55n^2$ операций сложения.

При вычислении элементов результирующей матрицы (4) внешний алгоритм требует $42\,p^3$ матричных операций сложения, а внутренний — r^2 скалярных операций сложения, поэтому аддитивная сложность вычислений (4) составит $W_{\text{а}}^{(4)} = 42\,p^2 r^2 = 42\left(\dfrac{n}{3r}\right)^3 r^3 \approx 4{,}66n^2$ операций сложения.

Следовательно, клеточный аналог традиционного алгоритма, полученный на основе предложенного метода (1)–(4), имеет следующие значения мультипликативной, аддитивной и общей сложностей:

• $W_{\text{м}} \approx 0{,}85n^3$ операций умножения;

• $W_{\text{а}} = W_{\text{а}}^{(1),(2)} + W_{\text{а}}^{(3)} + W_{\text{а}}^{(4)} \approx 0{,}85n^3 + 8{,}34n^2$ операций сложения;

• $W_{\text{общ}} = W_{\text{м}} + W_{\text{а}} \approx 0{,}85n^3 + 0{,}85n^3 + 8{,}34n^2 \approx 1{,}7n^3 + 8{,}34n^2$ операций сложения/умножения.

Таким образом, предложенный клеточный метод (1)–(4) минимизирует на 15 % мультипликативную сложность традиционного алгоритма при всех значениях n, а также аддитивную и общую сложности при $n \geq 10^3$, когда сложность $O(n^2) \ll O(n^3)$. Отметим, что при $n = 10^3$ сложность $O(n^2)$ в значениях аддитивной и общей сложностей составляет соответственно 0,9 % и 0,4 % сложности $O(n^3)$. Аналогично можно получить оценки мультипликативной, аддитивной и общей сложностей клеточных аналогов других известных алгоритмов умножения матриц.

Новый смешанный клеточный метод умножения матриц. Данный метод является гибридом метода Лейдермана [5] для умножения двух $(n \times n)$-матриц и рассмотренного выше клеточного метода (1)–(4). Пусть A, B и $C = AB$ — три матрицы порядка $n = 3^q \cdot \mu \cdot r$ (где $\mu > 1$, $q > 1$). Декомпозируем исходные матрицы A и B на клетки A_{ij} и B_{ij} заданного порядка r, где $m = n / r$; $\xi = m / 3$; $i, j = 1, 2, \ldots, m$:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\overbrace{A_{11}}^{r} & \cdots & A_{1\xi} & A_{1,\xi+1} & \cdots & A_{1,2\xi} & A_{1,2\xi+1} & \cdots & A_{1m} \\
\vdots & A_{11}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{12}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{13}^{\xi\xi} & \vdots \\
A_{\xi 1} & \cdots & A_{\xi\xi} & A_{\xi,\xi+1} & \cdots & A_{\xi,2\xi} & A_{\xi,2\xi+1} & \cdots & A_{\xi m} \\
\hline
A_{\xi+1,1} & \cdots & A_{\xi+1,\xi} & A_{\xi+1,\xi+1} & \cdots & A_{\xi+1,2\xi} & A_{\xi+1,2\xi+1} & \cdots & A_{\xi+1,m} \\
\vdots & A_{21}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{22}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{23}^{\xi\xi} & \vdots \\
A_{2\xi,1} & \cdots & A_{2\xi,\xi} & A_{2\xi,\xi+1} & \cdots & A_{2\xi,2\xi} & A_{2\xi,2\xi+1} & \cdots & A_{2\xi,m} \\
\hline
A_{2\xi+1,1} & \cdots & A_{2\xi+1,\xi} & A_{2\xi+1,\xi+1} & \cdots & A_{2\xi+1,2\xi} & A_{2\xi+1,2\xi+1} & \cdots & A_{2\xi+1,m} \\
\vdots & A_{31}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{32}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{33}^{\xi\xi} & \vdots \\
A_{m1} & \cdots & A_{m\xi} & A_{m,\xi+1} & \cdots & A_{m,2\xi} & A_{m,2\xi+1} & \cdots & A_{m,m}
\end{array}\right],$$

$$B = \begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{B_{11}}}^{r} \\
r\{\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
B_{11} & \cdots & B_{1\xi} & B_{1,\xi+1} & \cdots & B_{1,2\xi} & B_{1,2\xi+1} & \cdots & B_{1m} \\
\vdots & B_{11}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{12}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{13}^{\xi\xi} & \vdots \\
B_{\xi 1} & \cdots & B_{\xi\xi} & B_{\xi,\xi+1} & \cdots & B_{\xi,2\xi} & B_{\xi,2\xi+1} & \cdots & B_{\xi m} \\
\hline
B_{\xi+1,1} & \cdots & B_{\xi+1,\xi} & B_{\xi+1,\xi+1} & \cdots & B_{\xi+1,2\xi} & B_{\xi+1,2\xi+1} & \cdots & B_{\xi+1,m} \\
\vdots & B_{21}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{22}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{23}^{\xi\xi} & \vdots \\
B_{2\xi,1} & \cdots & B_{2\xi,\xi} & B_{2\xi,\xi+1} & \cdots & B_{2\xi,2\xi} & B_{2\xi,2\xi+1} & \cdots & B_{2\xi,m} \\
\hline
B_{2\xi+1,1} & \cdots & B_{2\xi+1,\xi} & B_{2\xi+1,\xi+1} & \cdots & B_{2\xi+1,2\xi} & B_{2\xi+1,2\xi+1} & \cdots & B_{2\xi+1,m} \\
\vdots & B_{31}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{32}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{33}^{\xi\xi} & \vdots \\
B_{m1} & \cdots & B_{m\xi} & B_{m,\xi+1} & \cdots & B_{m,2\xi} & B_{m,2\xi+1} & \cdots & B_{m,m}
\end{array}\right]
\end{array}, \quad (5)$$

$$C = \begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{C_{11}}}^{r} \\
r\{\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
C_{11} & \cdots & C_{1\xi} & C_{1,\xi+1} & \cdots & C_{1,2\xi} & C_{1,2\xi+1} & \cdots & C_{1m} \\
\vdots & C_{11}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{12}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{13}^{\xi\xi} & \vdots \\
C_{\xi 1} & \cdots & C_{\xi\xi} & C_{\xi,\xi+1} & \cdots & C_{\xi,2\xi} & C_{\xi,2\xi+1} & \cdots & C_{\xi m} \\
\hline
C_{\xi+1,1} & \cdots & B_{\xi+1,\xi} & C_{\xi+1,\xi+1} & \cdots & C_{\xi+1,2\xi} & C_{\xi+1,2\xi+1} & \cdots & C_{\xi+1,m} \\
\vdots & C_{21}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{22}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{23}^{\xi\xi} & \vdots \\
C_{2\xi,1} & \cdots & C_{2\xi,\xi} & C_{2\xi,\xi+1} & \cdots & C_{2\xi,2\xi} & C_{2\xi,2\xi+1} & \cdots & C_{2\xi,m} \\
\hline
C_{2\xi+1,1} & \cdots & C_{2\xi+1,\xi} & C_{2\xi+1,\xi+1} & \cdots & C_{2\xi+1,2\xi} & C_{2\xi+1,2\xi+1} & \cdots & C_{2\xi+1,m} \\
\vdots & C_{31}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{32}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & C_{33}^{\xi\xi} & \vdots \\
C_{m1} & \cdots & C_{m\xi} & C_{m,\xi+1} & \cdots & C_{m,2\xi} & C_{m,2\xi+1} & \cdots & C_{m,m}
\end{array}\right]
\end{array}.$$

Каждая полученная клеточная матрица A и B порядка m разбивается в свою очередь на девять равных клеточных подматриц A_{ij}^{ls} и B_{ij}^{ls} порядка ξ, где нижние индексы $i, j = 1, 2, 3$ показывают место этих подматриц в полной $(m \times m)$-матрице, а верхние индексы $l = \xi$ и $s = \xi$ — соответственно число матричных строк и матричных столбцов клеточных подматриц. Произведением клеwточных матриц A и B является результирующая матрица C, имеющая идентичную каждому из сомножителей клеточную структуру.

Объединение двух упомянутых выше методов осуществляется следующим образом. Как известно, метод Лейдермана для умножения матриц порядка n, мультипликативная сложность которого равна $O(n^{\log_3 23}) \sim O(n^{2,854})$, требует $\log_3 n$ рекурсивных шагов [5].

Для первого шага рекурсии метод Лейдермана в матричном виде применительно к клеточным подматрицам порядка ξ записывается следующим образом:

$$Z^1 = (A_{11}^{\xi\xi} + A_{12}^{\xi\xi} + A_{13}^{\xi\xi} - A_{21}^{\xi\xi} - A_{22}^{\xi\xi} - A_{32}^{\xi\xi} - A_{33}^{\xi\xi}) B_{22}^{\xi\xi},$$

$$Z^2 = (A_{11}^{\xi\xi} - A_{21}^{\xi\xi})(-B_{12}^{\xi\xi} + B_{22}^{\xi\xi}),$$

$$Z^3 = A_{22}^{\xi\xi}(-B_{11}^{\xi\xi} + B_{12}^{\xi\xi} + B_{21}^{\xi\xi} - B_{22}^{\xi\xi} - B_{23}^{\xi\xi} - B_{31}^{\xi\xi} + B_{33}^{\xi\xi}),$$

$$Z^4 = (-A_{11}^{\xi\xi} + A_{21}^{\xi\xi} + A_{22}^{\xi\xi})(B_{11}^{\xi\xi} - B_{12}^{\xi\xi} + B_{22}^{\xi\xi}),$$

$$Z^5 = (A_{21}^{\xi\xi} + A_{22}^{\xi\xi})(-B_{11}^{\xi\xi} + B_{12}^{\xi\xi}), \quad Z^6 = A_{11}^{\xi\xi} B_{11}^{\xi\xi},$$

$$Z^7 = (-A_{11}^{\xi\xi} + A_{31}^{\xi\xi} + A_{32}^{\xi\xi})(B_{11}^{\xi\xi} - B_{13}^{\xi\xi} + B_{23}^{\xi\xi}),$$
$$Z^8 = (-A_{11}^{\xi\xi} + A_{31}^{\xi\xi})(B_{13}^{\xi\xi} - B_{23}^{\xi\xi}),\ Z^9 = (A_{31}^{\xi\xi} + A_{32}^{\xi\xi})(-B_{11}^{\xi\xi} + B_{13}^{\xi\xi}),$$
$$Z^{10} = (A_{11}^{\xi\xi} + A_{12}^{\xi\xi} + A_{13}^{\xi\xi} - A_{22}^{\xi\xi} - A_{23}^{\xi\xi} - A_{31}^{\xi\xi} - A_{32}^{\xi\xi})B_{23}^{\xi\xi},$$
$$Z^{11} = A_{32}^{\xi\xi}(-B_{11}^{\xi\xi} + B_{13}^{\xi\xi} + B_{21}^{\xi\xi} - B_{22}^{\xi\xi} - B_{23}^{\xi\xi} - B_{31}^{\xi\xi} + B_{32}^{\xi\xi}), \tag{6}$$
$$Z^{12} = (-A_{13}^{\xi\xi} + A_{32}^{\xi\xi} + A_{33}^{\xi\xi})(B_{22}^{\xi\xi} + B_{31}^{\xi\xi} - B_{32}^{\xi\xi}),$$
$$Z^{13} = (A_{13}^{\xi\xi} - A_{33}^{\xi\xi})(B_{22}^{\xi\xi} - B_{32}^{\xi\xi}),\ Z^{14} = A_{13}^{\xi\xi} B_{31}^{\xi\xi},$$
$$Z^{15} = (A_{32}^{\xi\xi} + A_{33}^{\xi\xi})(-B_{31}^{\xi\xi} + B_{32}^{\xi\xi}),\ Z^{16} = (-A_{13}^{\xi\xi} + A_{22}^{\xi\xi} + A_{23}^{\xi\xi})(B_{23}^{\xi\xi} + B_{31}^{\xi\xi} - B_{33}^{\xi\xi}),$$
$$Z^{17} = (A_{13}^{\xi\xi} - A_{23}^{\xi\xi})(B_{23}^{\xi\xi} - B_{33}^{\xi\xi}),\ Z^{18} = (A_{22}^{\xi\xi} + A_{23}^{\xi\xi})(-B_{31}^{\xi\xi} + B_{33}^{\xi\xi}),$$
$$Z^{19} = A_{12}^{\xi\xi} B_{21}^{\xi\xi},\ Z^{20} = A_{23}^{\xi\xi} B_{32}^{\xi\xi},$$
$$Z^{21} = A_{21}^{\xi\xi} B_{13}^{\xi\xi},\ Z^{22} = A_{31}^{\xi\xi} B_{12}^{\xi\xi},\ Z^{23} = A_{33}^{\xi\xi} B_{33}^{\xi\xi}.$$
$$C_{11}^{\xi\xi} = Z^6 + Z^{14} + Z^{19},\ C_{12}^{\xi\xi} = Z^1 + Z^4 + Z^5 + Z^6 + Z^{12} + Z^{14} + Z^{15},$$
$$C_{13}^{\xi\xi} = Z^6 + Z^7 + Z^9 + Z^{10} + Z^{14} + Z^{16} + Z^{18},$$
$$C_{21}^{\xi\xi} = Z^2 + Z^3 + Z^4 + Z^6 + Z^{14} + Z^{16} + Z^{17},$$
$$C_{22}^{\xi\xi} = Z^2 + Z^4 + Z^5 + Z^6 + Z^{20},\ C_{23}^{\xi\xi} = Z^{14} + Z^{16} + Z^{17} + Z^{18} + Z^{21}, \tag{7}$$
$$C_{31}^{\xi\xi} = Z^6 + Z^7 + Z^8 + Z^{11} + Z^{12} + Z^{13} + Z^{14},$$
$$C_{32}^{\xi\xi} = Z^{12} + Z^{13} + Z^{14} + Z^{15} + Z^{22},\ C_{33}^{\xi\xi} = Z^6 + Z^7 + Z^8 + Z^9 + Z^{23}\ .$$

В отличие от метода Лейдермана, который оперирует числовыми подматрицами порядка $n/3$, в вычислительном процессе согласно формулам (6) и (7) участвуют клеточные подматрицы порядка ξ, декомпозированные на клетки заданного порядка r, и вычисление матричных произведений выполняется с использованием клеточного метода (1)–(4). При таком сочетании двух методов образуется смешанный клеточный метод, формализация которого осуществляется следующим образом.

Обозначим суммы клеточных $(\xi \times \xi)$-подматриц, входящих в (6), X^i и Y^i $(i, j = 1, 2, \ldots, 14)$:

$$X^1 = (A_{11}^{\xi\xi} + A_{12}^{\xi\xi} + A_{13}^{\xi\xi} - A_{21}^{\xi\xi} - A_{22}^{\xi\xi} - A_{32}^{\xi\xi} - A_{33}^{\xi\xi}),$$
$$X^2 = (A_{11}^{\xi\xi} - A_{21}^{\xi\xi}),\ X^3 = (-A_{11}^{\xi\xi} + A_{21}^{\xi\xi} + A_{22}^{\xi\xi}),$$
$$X^4 = (A_{21}^{\xi\xi} + A_{22}^{\xi\xi}),\ X^5 = (-A_{11}^{\xi\xi} + A_{31}^{\xi\xi} + A_{32}^{\xi\xi}),$$
$$X^6 = (-A_{11}^{\xi\xi} + A_{31}^{\xi\xi}),\ X^7 = (A_{31}^{\xi\xi} + A_{32}^{\xi\xi}), \tag{8}$$
$$X^8 = (A_{11}^{\xi\xi} + A_{12}^{\xi\xi} + A_{13}^{\xi\xi} - A_{22}^{\xi\xi} - A_{23}^{\xi\xi} - A_{31}^{\xi\xi} - A_{32}^{\xi\xi}),$$
$$X^9 = (-A_{13}^{\xi\xi} + A_{32}^{\xi\xi} + A_{33}^{\xi\xi}),\ X^{10} = (A_{13}^{\xi\xi} - A_{33}^{\xi\xi}),\ X^{11} = (A_{32}^{\xi\xi} + A_{33}^{\xi\xi}),$$
$$X^{12} = (-A_{13}^{\xi\xi} + A_{22}^{\xi\xi} + A_{23}^{\xi\xi}),\ X^{13} = (A_{13}^{\xi\xi} - A_{23}^{\xi\xi}),\ X^{14} = (A_{22}^{\xi\xi} + A_{23}^{\xi\xi}).$$
$$Y^1 = (-B_{12}^{\xi\xi} + B_{22}^{\xi\xi}),\ Y^2 = (-B_{11}^{\xi\xi} + B_{12}^{\xi\xi} + B_{21}^{\xi\xi} - B_{22}^{\xi\xi} - B_{23}^{\xi\xi} - B_{31}^{\xi\xi} + B_{33}^{\xi\xi}),$$
$$Y^3 = (B_{11}^{\xi\xi} - B_{12}^{\xi\xi} + B_{22}^{\xi\xi}),\ Y^4 = (-B_{11}^{\xi\xi} + B_{12}^{\xi\xi}),\ Y^5 = (B_{11}^{\xi\xi} - B_{13}^{\xi\xi} + B_{23}^{\xi\xi}),$$
$$Y^6 = (B_{13}^{\xi\xi} - B_{23}^{\xi\xi}),\ Y^7 = (-B_{11}^{\xi\xi} + B_{13}^{\xi\xi}), \tag{9}$$
$$Y^8 = (-B_{11}^{\xi\xi} + B_{13}^{\xi\xi} + B_{21}^{\xi\xi} - B_{22}^{\xi\xi} - B_{23}^{\xi\xi} - B_{31}^{\xi\xi} + B_{32}^{\xi\xi}),$$
$$Y^9 = (B_{22}^{\xi\xi} + B_{31}^{\xi\xi} - B_{32}^{\xi\xi}),\ Y^{10} = (B_{22}^{\xi\xi} - B_{32}^{\xi\xi}),\ Y^{11} = (-B_{31}^{\xi\xi} + B_{32}^{\xi\xi}),$$
$$Y^{12} = (B_{23}^{\xi\xi} + B_{31}^{\xi\xi} - B_{33}^{\xi\xi}),\ Y^{13} = (B_{23}^{\xi\xi} - B_{33}^{\xi\xi}),\ Y^{14} = (-B_{31}^{\xi\xi} + B_{33}^{\xi\xi}).$$

Тогда выражение (6) примет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
Z^1 = X^1 B_{22}^{\xi\xi},\ Z^2 = X^2 Y^1,\ Z^3 = A_{22}^{\xi\xi} Y^2,\ Z^4 = X^3 Y^3,\ Z^5 = X^4 Y^4, \\
Z^6 = A_{11}^{\xi\xi} B_{11}^{\xi\xi},\ Z^7 = X^5 Y^5,\ Z^8 = X^6 Y^6,\ Z^9 = X^7 Y^7,\ Z^{10} = X^8 B_{23}^{\xi\xi}, \\
Z^{11} = A_{32}^{\xi\xi} Y^8,\ Z^{12} = X^9 Y^9,\ Z^{13} = X^{10} Y^{10},\ Z^{14} = A_{13}^{\xi\xi} B_{31}^{\xi\xi}, \\
Z^{15} = X^{11} Y^{11},\ Z^{16} = X^{12} Y^{12},\ Z^{17} = X^{13} Y^{13},\ Z^{18} = X^{14} Y^{14}, \\
Z^{19} = A_{12}^{\xi\xi} B_{21}^{\xi\xi},\ Z^{20} = A_{23}^{\xi\xi} B_{32}^{\xi\xi}, \\
Z^{21} = A_{21}^{\xi\xi} B_{13}^{\xi\xi},\ Z^{22} = A_{31}^{\xi\xi} B_{12}^{\xi\xi},\ Z^{23} = A_{33}^{\xi\xi} B_{33}^{\xi\xi}.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Вычисление произведения $AB = C$ по смешанному клеточному методу также выполняется в три этапа.

Этап 1. Оперируя клетками порядка *r*, вычисляем матричные суммы согласно выражениям (8) и (9) по следующим формулам:

$$
\begin{gathered}
X_{ij}^1 = (A_{ij} + A_{i,\xi+j} + A_{i,2\xi+j} - A_{\xi+i,j} - A_{\xi+i,\xi+j} - A_{2\xi+i,\xi+j} - A_{2\xi+i,2\xi+j}), \\
X_{ij}^2 = (A_{ij} - A_{\xi+i,j}),\ X_{ij}^3 = (-A_{ij} + A_{\xi+i,j} + A_{\xi+i,\xi+j}), \\
X_{ij}^4 = (A_{\xi+i,j} + A_{\xi+i,\xi+j}),\ X_{ij}^5 = (-A_{ij} + A_{2\xi+i,j} + A_{2\xi+i,\xi+j}), \\
X_{ij}^6 = (-A_{ij} + A_{2\xi+i,j}),\ X_{ij}^7 = (A_{2\xi+i,j} + A_{2\xi+i,\xi+j}), \\
X_{ij}^8 = (A_{ij} + A_{i,\xi+j} + A_{i,2\xi+j} - A_{\xi+i,\xi+j} - A_{\xi+i,2\xi+j} - A_{2\xi+i,j} - A_{2\xi+i,\xi+j}), \\
X_{ij}^9 = (-A_{i,2\xi+j} + A_{2\xi+i,\xi+j} + A_{2\xi+i,2\xi+j}),\ X_{ij}^{10} = (A_{i,2\xi+j} - A_{2\xi+i,2\xi+j}), \\
X_{ij}^{11} = (A_{2\xi+i,\xi+j} + A_{2\xi+i,2\xi+j}),\ X_{ij}^{12} = (-A_{i,2\xi+j} + A_{\xi+i,\xi+j} + A_{\xi+i,2\xi+j}), \\
X_{ij}^{13} = (A_{i,2\xi+j} - A_{\xi+i,2\xi+j}),\ X_{ij}^{14} = (A_{\xi+i,\xi+j} + A_{\xi+i,2\xi+j}),
\end{gathered} \tag{11}
$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, \xi$;

$$
\begin{gathered}
Y_{ij}^1 = (-B_{i,\xi+j} + B_{\xi+i,\xi+j}),\ Y_{ij}^2 = (-B_{ij} + B_{i,\xi+j} + B_{\xi+i,j} - B_{\xi+i,\xi+j} - \\
- B_{\xi+i,2\xi+j} - B_{2\xi+i,j} + B_{2\xi+i,2\xi+j}),\ Y_{ij}^3 = (B_{ij} - B_{i,\xi+j} + B_{\xi+i,\xi+j}), \\
Y_{ij}^4 = (-B_{ij} + B_{i,\xi+j}),\ Y_{ij}^5 = (B_{ij} - B_{i,2\xi+j} + B_{\xi+i,2\xi+j}), \\
Y_{ij}^6 = (B_{i,2\xi+j} - B_{\xi+i,2\xi+j}),\ Y_{ij}^7 = (-B_{ij} + B_{i,2\xi+j}), \\
Y_{ij}^8 = (-B_{ij} + B_{i,2\xi+j} + B_{\xi+i,j} - B_{\xi+i,\xi+j} - B_{\xi+i,2\xi+j} - B_{2\xi+i,j} + B_{2\xi+i,\xi+j}), \\
Y_{ij}^9 = (B_{\xi+i,\xi+j} + B_{2\xi+i,j} - B_{2\xi+i,\xi+j}),\ Y_{ij}^{10} = (B_{\xi+i,\xi+j} - B_{2\xi+i,\xi+j}), \\
Y_{ij}^{11} = (-B_{2\xi+i,j} + B_{2\xi+i,\xi+j}),\ Y_{ij}^{12} = (B_{\xi+i,2\xi+j} + B_{2\xi+i,j} - B_{2\xi+i,2\xi+j}), \\
Y_{ij}^{13} = (B_{\xi+i,2\xi+j} - B_{2\xi+i,2\xi+j}),\ Y_{ij}^{14} = (-B_{2\xi+i,j} + B_{2\xi+i,2\xi+j}),
\end{gathered} \tag{12}
$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, \xi$.

Этап 2. В соответствии с формулой (10) вычисляем 23 матричных произведения $Z^1, Z^2, \ldots, Z^{23}$, для реализации каждого из которых применяется клеточный метод (1)–(4). Для нахождения первого матричного произведения Z^1 используются клеточные матрицы-операнды $X^1 = \{X_{ij}^1\}$ и $B_{22}^{\xi\xi} = \{B_{ij}\}$ порядка ξ :

$$
X^1 = \begin{array}{c} \\ r\left\{\right. \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \overbrace{\quad\;\;}^{r}\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} X^1_{11} & X^1_{12} & \cdots & X^1_{1\xi} \\ \hdashline X^1_{21} & X^1_{22} & \cdots & X^1_{2\xi} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline X^1_{\xi 1} & X^1_{\xi 2} & \cdots & X^1_{\xi\xi} \end{array}\right] \end{array}, \quad B^{\xi\xi}_{22} = \begin{array}{c} \\ r\left\{\right. \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \overbrace{\quad\;\;}^{r}\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1\xi} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{1\xi} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline B_{\xi 1} & B_{\xi 2} & \cdots & B_{\xi\xi} \end{array}\right] \end{array},
$$

$$
Z^1 = \begin{array}{c} \\ r\left\{\right. \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \overbrace{\quad\;\;}^{r}\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} Z^1_{11} & Z^1_{12} & \cdots & Z^1_{1\xi} \\ \hdashline Z^1_{21} & Z^1_{22} & \cdots & Z^1_{2\xi} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline Z^1_{\xi 1} & Z^1_{\xi 2} & \cdots & Z^1_{\xi\xi} \end{array}\right] \end{array}.
$$

Отметим, что клеточная матрица $B^{\xi\xi}_{22}$ является подматрицей исходной матрицы B (5) и участвует в дальнейших вычислениях как независимая.

Согласно клеточному методу (1)–(4) вначале определяются матричные коэффициенты R_{ik} и F_{kj}:

$$
\begin{gathered}
R^1_{ik} = X^1_{3i-2,3k-2} + X^1_{3i-2,3k-1} + X^1_{3i-2,3k} - X^1_{3i-1,3k-2} - X^1_{3i-1,3k-1} - X^1_{3i,3k-2} - X^1_{3i,3k}, \\
R^2_{ik} = X^1_{3i-2,3k-2} - X^1_{3i-1,3k-2}, \; R^3_{ik} = -X^1_{3i-2,3k-2} + X^1_{3i-1,3k-2} + X^1_{3i-1,3k-1}, \\
R^4_{ik} = X^1_{3i-1,3k-2} + X^1_{3i-1,3k-1}, \; R^5_{ik} = -X^1_{3i-2,3k-2} + X^1_{3i,3k-2} + X^1_{3i,3k-1}, \\
R^6_{ik} = -X^1_{3i-2,3k-2} + X^1_{3i,3k-2}, \; R^7_{ik} = X^1_{3i,3k-2} + X^1_{3i,3k-1}, \qquad (13) \\
R^8_{ik} = X^1_{3i-2,3k-2} + X^1_{3i-2,3k-1} + X^1_{3i-2,3k} - X^1_{3i-1,3k-1} - X^1_{3i-1,3k} - X^1_{3i,3k-2} - X^1_{3i,3k-1}, \\
R^9_{ik} = -X^1_{3i-2,3k} + X^1_{3i,3k-1} + X^1_{3i,3k}, \; R^{10}_{ik} = X^1_{3i-2,3k} - X^1_{3i,3k}, \\
R^{11}_{ik} = X^1_{3i,3k-1} + X^1_{3i,3k}, \; R^{12}_{ik} = -X^1_{3i-2,3k} + X^1_{3i-1,3k-1} + X^1_{3i-1,3k}, \\
R^{13}_{ik} = X^1_{3i-2,3k} - X^1_{3i-1,3k}, \; R^{14}_{ik} = X^1_{3i-1,3k-1} + X^1_{3i-1,3k},
\end{gathered}
$$

где $i, j, k = 1, 2, \ldots, p$; $p = n/9r$;

$$
\begin{gathered}
F^1_{kj} = -B_{3k-2,3j-1} + B_{3k-1,3j-1}, \; F^2_{kj} = -B_{3k-2,3j-2} + B_{3k-2,3j-1} + \\
+ B_{3k-1,3j-2} - B_{3k-1,3j-1} - B_{3k-1,3j} - B_{3k,3j-2} + B_{3k,3j}, \\
F^3_{kj} = B_{3k-2,3j-2} - B_{3k-2,3j-1} + B_{3k-1,3j-1}, \\
F^4_{kj} = -B_{3k-2,3j-2} + B_{3k-2,3j-1}, \; F^5_{kj} = B_{3k-2,3j-2} - B_{3k-2,3j} + B_{3k-1,3j}, \\
F^6_{kj} = B_{3k-2,3j} - B_{3k-1,3j}, \; F^7_{kj} = -B_{3k-2,3j-2} + B_{3k-2,3j}, \\
F^8_{kj} = -B_{3k-2,3j-2} + B_{3k-2,3j} + B_{3k-1,3j-2} - B_{3k-1,3j-1} - B_{3k-1,3j} - \qquad (14) \\
- B_{3k,3j-2} + B_{3k,3j-1}, \; F^9_{kj} = B_{3k-1,3j-1} + B_{3k,3j-2} - B_{3k,3j-1}, \\
F^{10}_{kj} = B_{3k-1,3j-1} - B_{3k,3j-1}, \; F^{11}_{kj} = -B_{3k,3j-2} + B_{3k,3j-1},
\end{gathered}
$$

$$F_{kj}^{12}=B_{3k-1,3j}+B_{3k,3j-2}-B_{3k,3j},\ F_{kj}^{13}=B_{3k-1,3j}-B_{3k,3j},$$

$$F_{kj}^{14}=-B_{3k,3j-2}+B_{3k,3j},$$

где $i, j, k=1,2,\ldots, p;\ \ p=n/9r.$

Затем выполняются регулярные вычисления матриц Q_{ij}:

$$Q_{ij}^{1}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{1}\cdot B_{3k-1,3j-1},\ Q_{ij}^{2}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{2}\cdot F_{kj}^{1},$$

$$Q_{ij}^{3}=\sum_{k=1}^{p}X_{3i-1,3k-1}^{1}\cdot F_{kj}^{2},\ Q_{ij}^{4}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{3}\cdot F_{kj}^{3},$$

$$Q_{ij}^{5}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{4}\cdot F_{kj}^{4},\ Q_{ij}^{6}=\sum_{k=1}^{p}X_{3i-2,3k-2}^{1}\cdot B_{3k-2,3j-2},$$

$$Q_{ij}^{7}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{5}\cdot F_{kj}^{5},\ Q_{ij}^{8}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{6}\cdot F_{kj}^{6},\ Q_{ij}^{9}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{7}\cdot F_{kj}^{7},$$

$$Q_{ij}^{10}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{8}\cdot B_{3k-1,3j},\ Q_{ij}^{11}=\sum_{k=1}^{p}X_{3i,3k-1}^{1}\cdot F_{kj}^{8},$$

$$Q_{ij}^{12}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{9}\cdot F_{kj}^{9},\ Q_{ij}^{13}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{10}\cdot F_{kj}^{10}, \tag{15}$$

$$Q_{ij}^{14}=\sum_{k=1}^{p}X_{3i-2,3k}^{1}\cdot B_{3k,3j-2},\ Q_{ij}^{15}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{11}\cdot F_{kj}^{11},\ Q_{ij}^{16}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{12}\cdot F_{kj}^{12},$$

$$Q_{ij}^{17}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{13}\cdot F_{kj}^{13},\ Q_{ij}^{18}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{14}\cdot F_{kj}^{14},\ Q_{ij}^{19}=\sum_{k=1}^{p}X_{3i-2,3k-1}^{1}\cdot B_{3k-1,3j-2},$$

$$Q_{ij}^{20}=\sum_{k=1}^{p}X_{3i-1,3k}^{1}\cdot B_{3k,3j-1},\ Q_{ij}^{21}=\sum_{k=1}^{p}X_{3i-1,3k-2}^{1}\cdot B_{3k-2,3j},$$

$$Q_{ij}^{22}=\sum_{k=1}^{p}X_{3i,3k-2}^{1}\cdot B_{3k-2,3j-1},\ Q_{ij}^{23}=\sum_{k=1}^{p}X_{3i,3k}^{1}\cdot B_{3k,3j},$$

где $i, j, k=1,2,\ldots, p.$

В заключение второго этапа вычисляются матрицы Z_{ij}^{1}:

$$Z_{3i-2,3j-2}^{1}=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{19},$$

$$Z_{3i-2,3j-1}^{1}=Q_{ij}^{1}+Q_{ij}^{4}+Q_{ij}^{5}+Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{12}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{15},$$

$$Z_{3i-2,3j}^{1}=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{7}+Q_{ij}^{9}+Q_{ij}^{10}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{16}+Q_{ij}^{18},$$

$$Z_{3i-1,3j-2}^{1}=Q_{ij}^{2}+Q_{ij}^{3}+Q_{ij}^{4}+Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{16}+Q_{ij}^{17},$$

$$Z_{3i-1,3j-1}^{1}=Q_{ij}^{2}+Q_{ij}^{4}+Q_{ij}^{5}+Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{20}, \tag{16}$$

$$Z_{3i-1,3j}^{1}=Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{16}+Q_{ij}^{17}+Q_{ij}^{18}+Q_{ij}^{21},$$

$$Z_{3i,3j-2}^{1}=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{7}+Q_{ij}^{8}+Q_{ij}^{11}+Q_{ij}^{12}+Q_{ij}^{13}+Q_{ij}^{14},$$

$$Z_{3i,3j-1}^{1}=Q_{ij}^{12}+Q_{ij}^{13}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{15}+Q_{ij}^{22},$$

$$Z_{3i,3j}^{1}=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{7}+Q_{ij}^{8}+Q_{ij}^{9}+Q_{ij}^{23},$$

где $i, j=1,2,\ldots, p.$

Этап 3. Вычисляем результирующие матрицы C_{ij}:

$$
\begin{gathered}
C_{ij} = Z_{ij}^{6} + Z_{ij}^{14} + Z_{ij}^{19},\ C_{i,\xi+j} = Z_{ij}^{1} + Z_{ij}^{4} + Z_{ij}^{5} + Z_{ij}^{6} + Z_{ij}^{12} + Z_{ij}^{14} + Z_{ij}^{15}, \\
C_{i,2\xi+j} = Z_{ij}^{6} + Z_{ij}^{7} + Z_{ij}^{9} + Z_{ij}^{10} + Z_{ij}^{14} + Z_{ij}^{16} + Z_{ij}^{18}, \\
C_{\xi+i,j} = Z_{ij}^{2} + Z_{ij}^{3} + Z_{ij}^{4} + Z_{ij}^{6} + Z_{ij}^{14} + Z_{ij}^{16} + Z_{ij}^{17}, \\
C_{\xi+i,\xi+j} = Z_{ij}^{2} + Z_{ij}^{4} + Z_{ij}^{5} + Z_{ij}^{6} + Z_{ij}^{20}, \\
C_{\xi+i,2\xi+j} = Z_{ij}^{14} + Z_{ij}^{16} + Z_{ij}^{17} + Z_{ij}^{18} + Z_{ij}^{21}, \\
C_{2\xi+i,j} = Z_{ij}^{6} + Z_{ij}^{7} + Z_{ij}^{8} + Z_{ij}^{11} + Z_{ij}^{12} + Z_{ij}^{13} + Z_{ij}^{14}, \\
C_{2\xi+i,\xi+j} = Z_{ij}^{12} + Z_{ij}^{13} + Z_{ij}^{14} + Z_{ij}^{15} + Z_{ij}^{22}, \\
C_{2\xi+i,2\xi+j} = Z_{ij}^{6} + Z_{ij}^{7} + Z_{ij}^{8} + Z_{ij}^{9} + Z_{ij}^{23},
\end{gathered}
\tag{17}
$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, p$.

Оценим вычислительную сложность рассмотренного клеточного метода (10)–(17). При вычислении матричных выражений (11), (12) и (17) этот метод требует соответственно $28\xi^2$, $28\xi^2$ и $42\xi^2$ матричных операций сложения, для каждой из которых внутренний алгоритм требует r^2 скалярных операций сложения. Таким образом, суммарная аддитивная сложность вычислений (11), (12) и (17), определяемая количеством скалярных операций сложения, составляет $W_{\text{а}}^{(11),(12),(17)} = 98\xi^2 \cdot r^2 = 98\left(\frac{m}{3}\right)^2 \cdot r^2 = 98\left(\frac{n}{3r}\right)^2 \cdot r^2 \approx 10{,}9n^2$ операций сложения.

Определим сложность вычислений одного из 23 матричных произведений Z^1, т.е. вычислений (13), (14) и (16). При нахождении матричных коэффициентов R_{ik}, F_{kj} и матриц Z_{ij}^1 внешние алгоритмы требуют соответственно $28p^2$, $28p^2$ и $42p^2$ матричных операций сложения, для каждой из которых внутренний алгоритм требует r^2 скалярных операций сложения. Суммарная аддитивная сложность указанных вычислений составляет $W_{\text{а}}^{(13),(14),(16)} = 98p^2 \cdot r^2 = 98\left(\frac{n}{9r}\right)^2 \cdot r^2 \approx 1{,}21n^2$ операций сложения.

При вычислении матричных выражений (15) внешний алгоритм требует $23p^3$ матричных операций умножения и $23(p^3 - p^2)$ матричных операций сложения. Используя в качестве внутреннего традиционный алгоритм умножения матриц [6], требующий r^3 скалярных операций умножения и $(r^3 - r^2)$ скалярных операций сложения, получаем для мультипликативной и аддитивной сложностей вычислений (15) соответственно следующие значения:

- $W_{\text{м}}^{(15)} = 23p^3 \cdot r^3 = 23\left(\frac{n}{9r}\right)^3 \cdot r^3 \approx 0{,}0315n^3$ операций умножения;
- $W_{\text{а}}^{(15)} = 23[(p^3 - p^2)r^2 + p^3(r^3 - r^2)] = 23\left(\frac{n}{9r}\right)^3 r^3 - 23\left(\frac{n}{9r}\right)^2 r^2 \approx 0{,}0315n^3 - 0{,}284n^2$ операций сложения.

Следовательно, на основе рассмотренного смешанного клеточного метода (10)–(17) получаем клеточный аналог традиционного алгоритма со следующими значениями мультипликативной, аддитивной и общей сложностей:

- $W_{\text{м}} = 23 \cdot W_{\text{м}}^{(15)} \approx 23 \cdot 0{,}0315 n^3 \approx 0{,}72 n^3$ операций умножения;
- $W_{\text{а}} = 23 (W_{\text{а}}^{(13),(14),(16)} + W_{\text{а}}^{(15)}) + W_{\text{а}}^{(11),(12),(17)} \approx 23 (1{,}21 n^2 + 0{,}0315 n^3 -$ $- 0{,}284 n^2) + 10{,}9 n^2 \approx 0{,}72 n^3 + 32{,}2 n^2$ операций сложения;
- $W_{\text{общ}} = W_{\text{м}} + W_{\text{а}} \approx 0{,}72 n^3 + 0{,}72 n^2 + 32{,}2 n^2 \approx 1{,}44 n^3 + 32{,}2 n^2$ операций сложения/умножения.

Таким образом, предложенный клеточный метод (10)–(17) минимизирует на 28 % мультипликативную сложность традиционного алгоритма при всех значениях n, а также аддитивную и общую сложности при $n \geq 10^4$, когда сложность $O(n^2) \ll O(n^3)$. Следует отметить, что при $n = 10^4$ сложность $O(n^2)$ в значениях аддитивной и общей сложностей составляет соответственно 0,4 % и 0,2 % сложности $O(n^3)$. Аналогично можно получить оценки вычислительной сложности клеточных аналогов других известных алгоритмов умножения матриц.

Рассмотренные методы (1)–(4) и (10)–(17) совместно с известными методами [2, 3] образуют семейство клеточных методов умножения матриц как четного, так и нечетного порядка, которые обеспечивают минимизацию мультипликативной, аддитивной и общей сложностей известных алгоритмов умножения матриц. Эти методы можно эффективно реализовать в матричных машинах и системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лысанов С.Ю. Клеточные методы решения задач линейной алгебры // Вопр. кибернетики. — 1988. — № 135. — С. 64–73.
2. Елфимова Л.Д. Быстрый клеточный метод умножения матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 55–59.
3. Елфимова Л.Д. Смешанный клеточный метод умножения матриц // Там же. — 2009. — № 1. — С. 22–27.
4. Strassen V. Gaussian elimination is not optimal // Numer. Math. — 1969. — **13**. — P. 354–356.
5. Laderman J.D. A noncommutative algorithm for multiplying 3 × 3-matrices using 23 multiplications // Bull. Amer. Math. Soc. — 1976. — **82**, N 1. — P. 126–128.
6. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.; Л.: Физматгиз, 1963. — 734 с.
7. Елфимова Л.Д. Новые быстрые гибридные алгоритмы умножения матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 6. — С. 59–67.

Поступила 27.10.2011