УДК 519.6

О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.Л. ГАРТ, М.В. МАНОЙЛО

Исследуется вопрос о приближенном нахождении устойчивых решений некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования при помощи проекционно-итерационных регуляризирующих схем, основанных на методах А.Н. Тихонова и В.М. Фридмана. Предложенный подход предполагает замену регуляризованного интегрального уравнения некоторой последовательностью более простых аппроксимирующих его конечномерных задач на совокупности измельчающихся сеток. При этом для каждой из «приближенных» задач с помощью некоторой итерационной процедуры строится лишь несколько приближений к решению, последнее из которых с использованием кусочно-линейной интерполяции принимается за начальное приближение в итерационном процессе для следующей «приближенной» задачи. Последовательность линейных интерполянтов построенных приближенных решений объявляется последовательностью приближений к решению исходного интегрального уравнения. Проводится сравнительный анализ вычислительных алгоритмов с использованием различных стратегий регуляризации, демонстрируется их практическая сходимость на примере решения конкретных задач.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интегральные уравнения стали широко применяться для решения многих задач моделирования динамических объектов и систем [1–4]. Интегральные уравнения позволяют понижать размерность некоторых задач исследования сплошных сред, более компактно, чем дифференциальные уравнения, формулировать краевые задачи, приводят к устойчивым вычислительным процедурам.

Рассмотрение произвольной непрерывной динамической системы как взаимосвязанной совокупности элементов, входы и выходы которых связаны причинными отношениями, приводит к описанию их в общем случае системой интегральных уравнений Вольтерра-Урысона [4]. Объединение объектов, охваченных обратными связями, в систему свидетельствует о том, что задачи их анализа описываются интегральными уравнениями второго рода

$$y(x)-\lambda\int_{\Omega}K(x,s)\,y(\mathrm{s})\,ds=f(x),\ \ x\in Q, \tag{1}$$

где $K(x,s)$ — ядро интегрального уравнения; $f(x)$ — правая часть уравнения с областью определения Q; λ — числовой параметр; $y(s)$ — искомая функция с областью определения $\Omega,$ переменной в случае уравнения Вольтерра или постоянной в случае уравнения Фредгольма, одномерной или многомерной в случае одномерного или многомерного уравнения (1) соответственно. При этом реакция системы на произвольные воздействия представляется искомой функцией $y(s)$ уравнения вида (1) с переменной областью интегрирования, а периодические процессы описываются уравнениями с постоянными пределами интегрирования, равными периоду. Задача отыскания решения уравнения второго рода является в принципе корректной: решение такой задачи существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных.

Задачи восстановления внешних воздействий, определения весовых функций, более общие задачи идентификации, интерпретация результатов наблюдений и экспериментов и другие практически важные задачи приводят к уравнениям первого рода

$$\int_{\Omega} K(x,s)\,y(\mathrm{s})\,ds = f(x),\quad x \in Q, \tag{2}$$

которые обладают свойствами некорректности (нарушается хотя бы одно из условий корректности по Адамару) и, строго говоря, не могут быть решены классическими методами в их традиционной форме. Это сделало актуальной разработку эффективных методов их решения.

Базовые понятия и методы решения некорректных задач были введены, как известно, московской школой академика А.М. Тихонова [5] и новосибирской школой академика М.М. Лаврентьева [6]. В частности, было введено понятие регуляризирующего оператора и сформулирован один из самых эффективных методов решения некорректных задач — метод α -регуляризации Тихонова. Дано понятие условной корректности (или корректности по Тихонову), предложен ряд регуляризирующих схем решения, разработаны устойчивые (регулярные, робастные) методы для решения задач в различных областях математики (оптимальное планирование, оптимальное управление, суммирование рядов Фурье, интегральные уравнения первого рода типа свертки, системы линейных алгебраических уравнений, операторные уравнения).

Интегральные уравнения в неразрывной связи с функциональным анализом представлены в трудах Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова, А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина, Л.А. Люстерника и В.И. Соболева, В.А. Треногина, С.Г. Михлина и других авторов. Существенный вклад в разработку различных аспектов решения некорректных задач внесли В.М. Фридман, В.А. Морозов, Ф.П. Васильев, В.Ю. Кудринский, В.В. Васин, В.К. Иванов и другие авторы, которые применили к решению некорректных задач проекционные (аппроксимационные) методы совместно с методами регуляризации, квазирешений и невязки. В работах этих ученых нашел свое строгое обоснование способ невязки решения некорректных задач, идея которого до этого была высказана без доказательства Д.Л. Филлипсом, а также Л.В. Канторовичем.

Устойчивые методы решения некорректных задач изложены во многих монографиях и публикациях, однако их наличие не исключает возможности разработки новых более эффективных методов, а также усовершенствования уже существующих методов, с доведением их до практических алгоритмов и особенно до машинных программ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цель работы — сравнительный анализ вычислительных схем, основанных на методе регуляризации Тихонова и методе итеративной регуляризации Фридмана для приближенного решения некорректных линейных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования. Рассматривается одномерное линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$A\,y \equiv \int_a^b K(x,s)\,y(\mathrm{s})\,ds = f(x),\ \mathrm{a} \le x \le b, \tag{3}$$

в котором ядро $K(x,s)$ — вещественная непрерывная функция в области $G = \{a \le x \le b,\ a \le s \le b\}$, $f(x) \in L_2[a,b]$, $y(s) \in L_2[a,b]$.

В качестве упомянутых регуляризирующих схем приближенного решения уравнения (3) рассматриваются проекционные и проекционно-итерационные вычислительные схемы, основанные на методе Тихонова и методе Фридмана в сочетании с методом квадратур при использовании различных вычислительных стратегий регуляризации (способа невязки, квазиоптимального способа, способа относительной поправки и других).

В данной работе впервые исследуется возможность применения проекционно-итерационного подхода к решению некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, который состоит в модификации классических методов α-регуляризации Тихонова и итеративной регуляризации Фридмана и позволяет заменить регуляризованное интегральное уравнение некоторой последовательностью более простых аппроксимирующих его конечномерных задач на совокупности измельчающихся сеток. При этом для каждой из «приближенных» задач с помощью некоторой итерационной процедуры строится лишь несколько приближений к решению, последнее из которых с использованием кусочно-линейной интерполяции принимается за начальное приближение в итерационном процессе для следующей «приближенной» задачи. Последовательность линейных интерполянтов построенных приближенных решений объявляется последовательностью приближений к решению исходного интегрального уравнения. Рассматриваются способы сокращения вычислительных и временных затрат, что позволяет добиться существенного увеличения скорости работы программы, а именно, распараллеливание вычислений и сохранение вычисленных в точках сетки значений ядра и правой части интегрального уравнения.

Следует отметить, что общая идея проекционно-итерационных методов для решения операторных уравнений и задач минимизации в функциональных пространствах принадлежит С.Д. Балашовой [7], в работах которой эти методы нашли свое строгое теоретическое обоснование и применение к решению различных конкретных классов математических задач, а в настоящее время продолжают развиваться в Днепропетровском университете в работах ее учеников.

Задачей данного исследования является анализ вычислительной эффективности проекционных и проекционно-итерационных регуляризирующих схем, основанных на методах А.Н. Тихонова и В.М. Фридмана, на примере решения конкретных линейных некорректных задач с точки зрения трудоемкости вычислений и точности получаемых приближенных решений.

МЕТОД ТИХОНОВА

Идея метода регуляризации Тихонова для решения некорректных интегральных уравнений (3), как известно [5], состоит в том, что для обеспечения устойчивости решения этого уравнения вводится условие минимума так называемого сглаживающего функционала

$$\Phi_\alpha(y) = \|Ay - f\|^2_{L_2} + \alpha\|y\|^2_{L_2} \to \min_{y \in L_2[a,b]}, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, для определения которого существуют различные способы [4]. Раскрытие условия (4) с учетом представления интегрального оператора A в уравнении (3) приводит к регуляризованному интегральному уравнению (уравнению Эйлера экстремальной задачи (4)) типа Фредгольма второго рода

$$\alpha\, y_\alpha(t) + \int_a^b B(t,s)\, y_\alpha(\mathrm{s})\, ds = F(t), \quad a \le t \le b, \tag{5}$$

задача решения которого уже является корректной [5]. В этом уравнении

$$B(t,s) = \int_a^b K(x,t)\, K(x,s)\, dx, \quad F(t) = \int_a^b K(x,t) f(x) dx. \tag{6}$$

Наиболее употребительным способом определения параметра регуляризации α в том случае, когда вместо точной правой части $f(x)$ исходного уравнения (3) задана функция $\tilde{f}(x) \in L_2[a,b]$ такая, что $\|f - \tilde{f}\|_{L_2} \le \delta$, является способ невязки, согласно которому в качестве искомого значения выбирается такое α, при котором $\|A\, y_\alpha - \tilde{f}\|_{L_2} = \delta$ ($y_\alpha(t)$ — решение уравнения (5) при соответствующем значении α). Последнее соотношение можно трактовать как уравнение относительно α, которое при определенных условиях [5] имеет единственное решение. На практике во избежание решения этого уравнения часто выбирают ряд значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, связанных соотношением

$$\alpha_i = \theta\, \alpha_{i-1}, \quad 0 < \theta < 1, \tag{7}$$

для каждого из которых вычисляют решение $y_{\alpha_i}(t)$ уравнения (5) и невязку $\|A\, y_{\alpha_i} - \tilde{f}\|_{L_2}$. В качестве оптимального значения α_{opt} выбирают то α_i, для которого с наибольшей степенью точности выполняется приближенное равенство $\|A\, y_{\alpha_i} - \tilde{f}\|_{L_2} \approx \delta$.

Квазиоптимальный способ определения параметра регуляризации α не требует знания погрешности δ правой части $f(x)$. Согласно этому способу в качестве искомого значения выбирают то α_i из ряда значений (7), для которого поправка $\left\| y_{\alpha_i} - y_{\alpha_{i-1}} \right\|_{L_2}$ принимает наименьшее значение.

Согласно способу относительной поправки в качестве искомого значения параметра регуляризации α выбирают то α_i из ряда значений (7), для которого наименьшее значение в смысле нормы пространства $L_2[a,b]$ принимает величина $\left\| y_{\alpha_i} - y_{\alpha_{i-1}} \right\| / \left\| y_{\alpha_i} \right\|$.

Одним из наиболее эффективных методов решения интегральных уравнений вида (5) является метод квадратур (замены интеграла конечной суммой).

Предположим, что правая часть $f(x)$ исходного уравнения (3) задана таблицей своих значений на равномерной x-сетке узлов

$$\overline{\omega}_h = \{x_l \in [a,b]:\ x_l = a + lh,\ 1 = \overline{0,M};\ h = (b-a)/M\}, \tag{8}$$

а решение $y_\alpha(s)$ соответствующего регуляризованного уравнения ищется на другой равномерной s-сетке узлов

$$\overline{\omega}_\tau = \{s_j \in [a,b]:\ s_j = a + j\tau,\ j = \overline{0,N};\ \tau = (b-a)/N\}, \tag{9}$$

причем t-сетка в уравнении (5) совпадает с s-сеткой.

Если интегралы в (5), (6) расписать, например, с помощью квадратурной формулы Симпсона (в предположении о достаточной гладкости ядра, решения и правой части, а также о чётности чисел $N > 0,\ \mathrm{M} > 0)$, то, отбросив погрешность $O(h^4 + \tau^4)$ численного интегрирования и перейдя к обозначениям $y_i \approx y_\alpha(t_i)$, $B_{ij} \approx B(t_i, s_j)$, $F_i \approx F(t_i)$, $i,j = \overline{0,N}$, получим дискретный аналог уравнения (5) (опуская временно индекс α при y):

$$\alpha y_i + \sum_{j=0}^{N} A_j^{(N)} B_{ij} y_j = F_i,\quad i = \overline{0,N}. \tag{10}$$

При этом

$$B(t_i, s_j) = \sum_{l=0}^{M} A_l^{(M)} K(x_l, t_i)\, K(x_l, s_j) + O(h^4),$$

$$F(t_i) = \sum_{l=0}^{M} A_l^{(M)} K(x_l, t_i) f(x_l) + O(h^4),\quad i,j = \overline{0,N},$$

$A_j^{(N)}$ и $A_l^{(M)}$ — коэффициенты квадратурной формулы Симпсона. Соотношения (10) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решив которую, можно найти приближенные значения $y_0, y_1, \ldots, y_N$ решения $y_\alpha(t)$ уравнения (5) в точках t-сетки. Приближенное аналитическое выражение для $y_\alpha(t)$ может быть получено, например, интерполированием или же записано по формуле

$$\widetilde{y}_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{j=0}^{N} A_j^{(N)} B(t, s_j)\, y_j + F(t) \right), \quad a \le t \le b,$$

которая получается путем замены интеграла в (5) конечной суммой.

Можно показать так же, как в работах [10, 11], что метод квадратур сведения регуляризованного уравнения (5) к конечной СЛАУ укладывается в общую схему проекционных (аппроксимационных) методов, предложенных в [7] для решения операторных уравнений в банаховых пространствах.

Рассмотрим вопрос о применении проекционно-итерационного подхода к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода (3), основанного на применении метода квадратур к решению регуляризованного интегрального уравнения (5) на совокупности измельчающихся сеток.

Будем для каждой из аппроксимирующих конечномерных задач, начиная с задачи невысокой размерности, строить при помощи процедуры выбора параметра регуляризации лишь несколько приближений $\widetilde{y}_{\alpha_i^{(n)}}$ ($i = 1, 2, ..., m$, n — номер конечномерной задачи), последнее из которых будем принимать с использованием кусочно-линейной интерполяции в качестве начального приближения в итерационном процессе для следующей, $(n+1)$-й, конечномерной задачи. Критерием остановки описанного процесса может служить либо заданная точность вычислений, либо конечный порядок дискретизации в аппроксимирующей задаче.

Приведем проекционно-итерационный алгоритм решения уравнения Фредгольма (3), основанный на методе регуляризации Тихонова и методе квадратур в сочетании с квазиоптимальным способом определения параметра регуляризации.

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ

Подготовительный этап. Задаем точность $\varepsilon > 0$ вычислений в проекционно-итерационном алгоритме, начальный порядок $N = N_1$, $M = M_1$ дискретизации регуляризованного уравнения (5) на сетках (8), (9) на первом шаге алгоритма и рекурсивные формулы

$$N_n = \mu_1 N_{n-1} + \eta_1, \quad M_n = \mu_2 \mathrm{M}_{n-1} + \eta_2, \quad n > 1, \tag{11}$$

$$\mu_i, \eta_i \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \; i = 1, 2$$

возрастания с ростом n порядка дискретизации. Под номером шага в проекционно-итерационном алгоритме здесь и в дальнейшем следует понимать номер n конечномерной задачи в последовательности аппроксимирующих интегральное уравнение задач на совокупности измельчающихся сеток. Кроме того, задаем целое число $m > 1$ как количество значений $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_m^{(n)}$ параметра регуляризации α, которые могут использоваться на n-м шаге алгоритма $(n \ge 1)$, начальное значение α_0 и ограничительное малое значение $\alpha_{\lim}$ для параметра α.

1. Полагаем шаг алгоритма $n = 1$.

2. Задаем убывающую последовательность значений параметра регуляризации в соответствии с формулами

$$\alpha_i^{(n)} = \theta\, \alpha_{i-1}^{(n)}, \quad i = \overline{2,m}, \quad 0 < \theta < 1; \quad \alpha_1^{(n)} = \alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}, \ \alpha_1^{(1)} = \alpha_0 \qquad (12)$$

так, что $\alpha_i^{(n)} \geq \alpha_{\lim}$, $i = \overline{1,m}$. Если окажется при некотором $i = i_0 = \overline{2,m}$, что $\alpha_{i_o}^{(n)} < \alpha_{\lim}$, то полагаем на данном шаге алгоритма $m := i_0 - 1$ и построение ряда значений α завершаем.

3. Проводим дискретизацию уравнения (5) с помощью метода квадратур на t- и s-сетках (9) узлов $s_j = t_j$, $j = \overline{0, N_n}$ и x-сетке (8) узлов x_i, $i = \overline{0, M_n}$, где значения $N_n \geq N_{n-1}$, $M_n \geq M_{n-1}$ определяются формулами (11) и хотя бы одно из последних двух неравенств выполняется строго. Получаем СЛАУ вида (10).

4. Определяем точность $\varepsilon_n > 0$ вычислений на данном шаге по правилу: $\varepsilon_n = C(h_n^4 + \tau_n^4)$, где $C = \text{const} > 0$, $h_n = (b-a)/M_n$, $\tau_n = (b-a)/N_n$.

5. При $n > 1$ выполняем кусочно-линейную интерполяцию приближенного решения $\tilde{y}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}} = (y^{(0)}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}}, y^{(1)}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}}, \ldots, y^{(N_{n-1})}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}})$, полученного на предыдущем шаге на сетке $\overline{\omega}_{\tau_{n-1}}$, по формуле

$$y_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}}(t) = y^{(i)}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}} - \frac{t - t_i}{2\tau_{n-1}} \left(3y^{(i)}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}} - 4y^{(i+1)}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}} + y^{(i+2)}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}} \right) +$$

$$+ \frac{(t - t_i)^2}{2\tau_{n-1}^2} \left(y^{(i)}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}} - 2y^{(i+1)}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}} + y^{(i+2)}_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}} \right), \quad t_i \leq t \leq t_{i+2}, \quad i = \overline{0, N_{n-1} - 2},$$

и задаем на t-сетке $\overline{\omega}_{\tau_n}$ с помощью этой формулы приближенное решение $\tilde{y}_{\alpha_1^{(n)}} = (y^{(0)}_{\alpha_1^{(n)}}, y^{(1)}_{\alpha_1^{(n)}}, \ldots, y^{(N_n)}_{\alpha_1^{(n)}})$, $y^{(j)}_{\alpha_1^{(n)}} = y_{\alpha_{\text{opt}}^{(n-1)}}(t_j)$, $j = \overline{0, N_n}$, соответствующее значению $\alpha = \alpha_1^{(n)}$.

6. Для каждой пары значений $\alpha_i^{(n)}$ и $\alpha_{i-1}^{(n)}$ $(i = \overline{2,m})$ вычисляем в некоторой сеточной норме $\|\cdot\|_{\tau_n}$ поправку $\left\| \tilde{y}_{\alpha_i^{(n)}} - \tilde{y}_{\alpha_{i-1}^{(n)}} \right\|_{\tau_n}$, где $\tilde{y}_{\alpha_i^{(n)}} = (y^{(0)}_{\alpha_i^{(n)}}, y^{(1)}_{\alpha_i^{(n)}}, \ldots, y^{(N_n)}_{\alpha_i^{(n)}})$ — решение СЛАУ (10) при $\alpha = \alpha_i^{(n)}$, полученное, к примеру, методом Гаусса, до достижения такого номера $i = r$ $(r = \overline{2,m})$, при котором впервые окажется выполненным неравенство $\left\| \tilde{y}_{\alpha_i^{(n)}} - \tilde{y}_{\alpha_{i-1}^{(n)}} \right\|_{\tau_n} \leq \varepsilon_n$. Тогда соответствующее приближенное решение $\tilde{y}_{\alpha_r^{(n)}}$ (или $\tilde{y}_{\alpha_1^{(n)}}$, если $m = 1$) и соответствующее значение параметра $\alpha = \alpha_{\text{opt}}^{(n)} = \alpha_r^{(n)}$ полагаем оп-

тимальными на данном шаге. Если же указанное неравенство не выполняется для номеров $i = \overline{2,m}$, то полагаем оптимальным на данном шаге такое значение $\alpha = \alpha_l^{(n)}$ $(l = \overline{2,m})$, при котором поправка приближенного решения $\tilde{y}_{\alpha_l^{(n)}}$ является наименьшей.

7. Если $\varepsilon_n \le \varepsilon$, то переходим к п. 8. Иначе увеличиваем номер шага $n := n+1$ и переходим к п.2.

8. Конец алгоритма.

МЕТОД ФРИДМАНА

Основная идея метода итеративной регуляризации Фридмана состоит в построении итерационной схемы, которая сходится к точному решению $y(t)$ уравнения (3) при отсутствии ошибок δ и ξ правой части и интегрального оператора и в прерывании расходится при $\eta \equiv (\delta, \xi) \ne 0$ при некотором числе итераций $m = m(\eta)$, являющемся параметром регуляризации таким, что $\left\| y_{m(\eta)} - y \right\|_{L_2} \to 0$ при $\eta \to 0$.

Применительно к уравнению (3) с симметричным положительно определенным ядром $K(x,s) \in L_2(G)$ и $f(x)$, y(s) $\in L_2[a,b]$ итерационная схема Фридмана имеет вид [12]

$$y_m(x) = y_{m-1}(x) + \nu \left(f(x) - \int_a^b K(x,s)\, y_{m-1}(s)\, ds \right), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

$$y_0(x) = 0, \quad a \le x \le b,$$

где ν — итерационный параметр, $0 < \nu < \dfrac{2}{\|A\|}$, $\|A\|^2 \le \int_a^b \int_a^b K^2(x,s)\, dx\, ds$, в случае же произвольного ядра $K(x,s) \in L_2(G)$ и $f(x)$, y(s) $\in L_2[a,b]$ — вид

$$y_m(x) = y_{m-1}(x) + \nu \left(F(x) - \int_a^b R(x,s)\, y_{m-1}(s)\, ds \right), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

$$y_0(x) = 0, \quad a \le x \le b,$$

где

$$0 < \nu < \frac{2}{\|A^* A\|}, \quad \|A^* A\|^2 \le \int_a^b \int_a^b R^2(x,s)\, dx\, ds,$$

$$R(x,s) = R(s,x) = \int_a^b K(t,x)\, K(t,s)\, dt, \quad F(x) = \int_a^b K(s,x) f(s)\, ds.$$

Согласно правилу остановки по обобщенной нев’язке, которая формулируется в виде модифицированного варианта правила остановки Π_1 или первой половины правила Π_2 работы [12], итерационный процесс Фридмана (13) (или (14)) следует продолжать до такого номера итерации $m = m_d = = m_d(\delta, \xi)$, при котором впервые выполнится условие

$$\chi_m \le 0,$$

где

$$\chi_m = \beta_m - \zeta_m, \ \ \beta_m = \left\| Ay_m - f \right\|_{L_2}, \ \ \zeta_m = (\delta + \xi \left\| y_m \right\|_{L_2})^2 + \tilde{\mu},$$

$$\tilde{\mu} = \inf_{y \in L_2[a,b]} \left\| Ay - f \right\|_{L_2}^2 \le \mu,$$

μ — оценка сверху величины $\tilde{\mu}$, которая характеризует меру несовместности уравнения (3).

Согласно правилу остановки процесса Фридмана (13) (или (14)) по поправке проводится наперед заданное количество итераций и выбирается такой номер итерации $m = m_c = m_c(\delta, \xi)$, при котором величина $\left\| y_m - y_{m-1} \right\|_{L_2}$ принимает наименьшее значение.

При практическом использовании метода Фридмана в сочетании с методом квадратур для приближенного решения интегрального уравнения (3) остановка итерационного процесса по обобщенной невязке может произойти при небольшом $m = m_d$, и в этом случае суммарное количество арифметических действий будет небольшим. При использовании же правила остановки по поправке оценить заранее достаточное количество итераций практически затруднительно, поэтому их число выбирается большим (порядка 10^4). Для того чтобы уменьшить количество выполняемых операций, в программе, реализующей этот алгоритм, предлагается добавить переменную-словарь для хранения вычисленных в узлах сетки значений ядра и правой части интегрального уравнения таим образом, чтобы при повторном вызове процедур для ядра и правой части возвращались сохраненные значения.

Далее, на этапе вычисления методом Фридмана очередного итерационного приближения к решению можно заметить, что процесс вычисления значения приближенного решения в каждом узле является независящим от других точек сетки. Поэтому в разработанном программном продукте реализовано распараллеливание вычислений каждого из итерационных приближений. А именно, определяется количество процессоров на текущем компьютере и каждому из них отводится задача вычисления приближения на том или ином частичном промежутке исходного отрезка. Таким образом, если процессоров больше одного, то удается добиться ускорения работы программного продукта.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Практическая сходимость проекционно-итерационных алгоритмов, основанных на методе регуляризации Тихонова, для решения некорректных интегральных уравнений вида (3), а также нелинейных интегральных уравнений Урысона первого рода

$$A\,y \equiv \int_a^b K(x,s,y(s))\,ds = f(x), \quad a \le x \le b,$$

где $K(x,s,y(s))$ — функция, определенная и непрерывная в G по совокупности переменных $x,s \in [a,b]$ вместе с производными $K'_y(x,s,y(s))$, $K''_{yy}(x,s,y(s))$, $f(x), y(s) \in L_2[a,b]$, исследовалась на нескольких модельных задачах.

Для их решения были рассмотрены различные вычислительные схемы проекционно-итерационного алгоритма, основанного на методе квадратур приближенного решения регуляризованных интегральных уравнений:

- использованием трех стратегий выбора параметра регуляризации (способа невязки, квазиоптимального способа, способа относительной поправки);
- вариацией количества m значений $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_m^{(n)}$ параметра регуляризации, начального значения α_0 и величины θ в (12);
- различными правилами (11) формирования порядка дискретизации интегрального уравнения на очередном шаге алгоритма;
- различными критериями остановки проекционно-итерационного процесса (по заданной точности вычислений и по конечному порядку дискретизации в аппроксимирующей задаче).

Результаты реализации проекционно-итерационных вычислительных схем на ЭВМ сравнивались с результатами применения к той же задаче проекционной схемы метода Тихонова, предполагающей решение регуляризованного интегрального уравнения с помощью метода квадратур при однократной дискретизации наибольшего порядка.

Анализ результатов вычислительных экспериментов свидетельствует о том, что проекционно-итерационный подход применительно к решению некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования приводит к уменьшению вычислительных затрат на построение приближений, поскольку значительная их часть строится для аппроксимирующих задач невысокой размерности, а также обеспечивает большую точность получаемых приближенных решений [13].

Практическая сходимость метода Фридмана и его модификаций исследовалась на модельных уравнениях Фредгольма

$$\int_a^b (x+s)\,\mathrm{y}(s)\,ds = q + cx, \quad a \le x \le b, \tag{15}$$

где $q = be^b - e^b - ae^a + e^a$, $c = e^b - e^a$, и

$$\int_a^b (x^2 - e^s)\,y(x)ds = q + \frac{b^3 - a^3}{3}x^2, \quad a \le x \le b, \tag{16}$$

где $q = 2be^b - b^2e^b - 2e^b - 2ae^a + a^2e^a + ae^a$, для которых известны их точные решения.

В ходе численных экспериментов было установлено, что для тех уравнений Фредгольма, при решении которых методом Фридмана с правилом остановки по обобщенной невязке был получен достаточно небольшой оптимальный номер итерации, этот номер оказывается практически одинаковым для любого порядка дискретизации исходного отрезка. Таким образом, выбрав, к примеру, $N_1 = M_1 = 8$ за начальный порядок дискретизации отрезка $[a, b]$ и построив 10000 итераций, можно определить оптимальный номер итерации m_{opt}. Если значение m_{opt} является величиной порядка $O(10)$, то взяв последнее из построенных приближений с помощью кусочно-линейного восполнения в качестве начального приближения в итерационном процессе на более мелкой сетке с $N_2 = M_2 = 100$, достаточно будет выполнить на этой сетке лишь $(m_{\text{opt}} + 2) - (m_{\text{opt}} + 4)$ итераций. Так, для уравнения (15) описанный прием позволил сократить время работы программы для получения приближенного решения на последней сетке примерно в 7 раз, а для уравнения (16) — в 11 раз.

После распараллеливания вычислений итерационных приближений в методе Фридмана на компьютере с четырьмя процессорами время работы программы уменьшилось примерно втрое. Результаты оптимизации вычислений приведены в таблице.

Таблица. Временные затраты на вычисления в методе итеративной регуляризации Фридмана (мин.)

Номер задачи	**Тип вычислительного алгоритма**			
	Без сохранения значений и распараллеливания	С сохранением значений	Распараллеливание	Сохранение значений и распараллеливание
(15)	00:43,6	00:06,3	00:14,7	00:02,1
(16)	01:31,6	00:09,6	00:32,3	00:03,6

ВЫВОДЫ

Данная работа посвящена разработке новых эффективных стратегий в регуляризационных алгоритмах приближенного решения некорректных линейных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, основанных на методах регуляризации А.Н. Тихонова и В.М. Фридмана:

- сформулирован проекционно-итерационный алгоритм, основанный на методе регуляризации Тихонова и методе квадратур в сочетании с квазиоптимальным способом выбора параметра регуляризации;
- предложена проекционно-итерационная модификация метода итеративной регуляризации Фридмана, основанная на методе квадратур со стратегией поиска оптимального номера итерации в способе останова процесса по поправке;
- рассмотрены экономичные подходы к организации вычислений в методе Фридмана, связанные с рациональным использованием оперативной памяти ЭВМ и распараллеливанием вычислений.

Для авторов в дальнейшем представляет интерес вопрос применения проекционно-итерационных регуляризирующих алгоритмов к решению некоторых практически важных некорректных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М.* О новом классе динамических моделей и его приложении в биологии // Кибернетика. — 1979. — № 4. — С. 133–141.
2. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. — М.: Изд-во ЛКИ, 2009. — 480 с.
3. *Гончарский А.В*., *Черепащук А.М., Ягола А.Г.* Численные методы решения обратных задач астрофизики — М.: Наука, 1978. — 336 с.
4. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — К.: Наукова думка, 1986. — 544 с.
5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
6. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980. — 288 с.
7. *Балашова С.Д.* Проекционно-итерационные методы решения уравнений в нормированных пространствах: Автореферат дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. — Д.: ДГУ, 1974. — 20 с.
8. *Ортега Дж., Рейнболдт В*. Итерационные методы решения нелинейных систем. — М.: Мир, 1975. — 558 с.
9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — СПб.: Невский Диалект, 2004. — 816 с.
10. *Гарт Л.Л., Поляков Н.В.* Проекционно-итерационная реализация метода Ньютона-Канторовича для решения нелинейных интегральных уравнений // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 1. — С. 70–78.
11. *Гарт Л.Л.* Проекційно-ітераційний алгоритм розв’язання некоректних інтегральних рівнянь Вольтера // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 1. — С. 101–112.
12. *Вайникко Г.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. — Тартуский государственный университет. — 1982. — 112 с.
13. *Гарт Л.Л., Поляков Н.В.* Проекционно-итерационный принцип решения некорректных интегральных уравнений // Питання оптимізації обчислень: Тези доп. міжнар. наук. конф. — Київ, 2013. — С. 63–64.

Поступила 06.06.2014