УДК 519.8

ДЕЯКІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ТОЧОК БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

В.М. АЛЕКСАНДРОВА, Л.О. СОБОЛЕНКО

Розглянуто чисельні підходи до отримання Парето-оптимальних точок, що базуються на зведенні багатокритеріальних задач оптимізації до «скаляризованих» задач оптимізації зі спеціальними цільовими функціями. Послідовна оптимізація таких функцій при зафіксованих значеннях вагових коефіцієнтів критеріальних функцій дозволяє виділяти серед безлічі ефективних рішень ті, що задовольняють ОПР. На основі задачі дискретного мінімаксу, що будується із застосуванням векторів критеріїв та вагових коефіцієнтів, запропоновано модифікацію методу лінеаризації для розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації. Вихідна задача по знаходженню ефективної точки зводиться до послідовного розв'язання задач квадратичного програмування. Наведено результати чисельного розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації різними методами. Проведений в роботі аналіз та порівняння чисельного експерименту підтверджують ефективність запропонованого методу.

ВСТУП

Вивчення питань прийняття рішень під час дослідження й проектування складних систем призводить до необхідності постановок задач оптимізації з урахуванням сукупності критеріальних функцій — багатокритеріальних задач оптимізації. Це пояснюється тим, що лише у виняткових випадках альтернативні рішення щодо способів проведення операції можна порівнювати між собою за одним критерієм. Зазвичай для прийняття рішення потрібно здійснити вибір на основі цілої низки критеріїв, які можуть перебувати в суперечності один до одного. Але при цьому кожен із запропонованих критеріїв вважається настільки суттєвим, що не врахування його під час вибору рішення було б ризикованим і необачливим з огляду наслідків проведення операції. Основним питанням, що виникає, коли порівнюють між собою альтернативні рішення за умови кількох критеріїв, є: яке з двох рішень вважати кращим, якщо під час заміни одного із цих рішень на інше значення одного або кількох критеріїв «покращаться», а інших — «погіршаться».

Мета роботи — розробка способу прийняття ефективних рішень за умови кількох критеріїв, що базується на зведенні багатокритеріальної задачі оптимізації до задачі дискретного мінімаксу та розв'язанні її методом лінеаризації. Порівняння запропонованого методу з найпоширенішими методами розв'язання багатокритеріальної задачі оптимізації.

ПАРЕТО–ОПТИМАЛЬНІ ТОЧКИ

Нехай X — певним чином визначена множина (альтернативних рішень), а $\{F_i\}$ — визначені на X m функцій. Припустимо, що значення кожної з цих функцій шляхом підходящого вибору елемента (рішення) x з множини X бажано зробити (для визначеності) найменшим:

$$F(x) \;\; \mapsto \;\; \inf_{x \in X}\,, \qquad (1)$$

де $F(x) \equiv \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{pmatrix}$ — m-компонентна (критеріальна) вектор-функція. Нехай $m > 1$, тобто є принаймні дві критеріальні функції $\{F_i\}$. Кожна з цих функцій застосовується для порівняння рішень з множини X. За даним i-м критерієм F_i рішення $x \in X$ вважається «кращим» за рішення $y \in X$, якщо $F_i(x) < F_i(y)$. Задача (1) називається багатокритеріальною задачею оптимізації.

Основна проблема, що при цьому виникає, полягає в суперечливості бажання одночасної мінімізації на множині X усіх критеріальних функцій $\{F_i\}$. Може статися так, що за будь-якої заміни цього розв'язку $x \in X$ на інший розв'язок $y \in X$ при зменшенні значень одних критеріальних функцій значення інших критеріальних функцій збільшуються.

Отже, для багатокритеріальних задач оптимізації немає абсолютно найкращих (за всіма критеріями одночасно) рішень. Але це зовсім не означає, що неможливо раціоналізувати вибір рішення на заданій множині альтернативних рішень.

Рішення (вектор, елемент, точку) $x_P \in X$ називають оптимальним за Парето (або Парето-оптимальним, або ефективним) [1–3], якщо не існує рішення $x \in X$ такого, що $F_i(x) \le F_i(x_P)$ $\forall\, i = 1, \ldots, m$, й $F_i(x) < F_i(x_P)$ хоча б для одного $i \in \{1, \ldots, m\}$. Іншими словами, якщо $x_P \in X$ — Парето-оптимальне, то для будь-якого $x \in X$ знайдеться функція F_i, $i = i(x) \in \in \{1, \ldots, m\}$ (яка саме функція — залежить від рішення x), для якої $F_i(x) > F_i(x_P)$.

Із цього означення випливає, що заміна Парето-оптимального рішення на $x \in X$ якщо й призводить до зменшення значень деяких критеріальних функцій, то вона обов'язково призводить до збільшення інших функцій.

Рішення (вектор, елемент, точка) $x_{Sp} \in X$ називається слабо ефективним, якщо не існує рішення $x \in X$ такого, що $F_i(x) < F_i(x_{Sp})$ $\forall\, i = 1, \ldots, m$ [1–3]. Тобто заміна слабо ефективного рішення не може призвести до одночасного покращення значень усіх критеріальних функцій.

Якщо позначити X_P — множину Парето-оптимальних точок, а X_{Sp} — множину слабо ефективних точок, то має місце включення: $X_{Sp} \subseteq X_P \subset X$.

Оптимальне за Парето рішення можна інтерпретувати як економічно прийнятне, раціональне й у певному розумінні добре рішення.

Отже, під розв'язанням багатокритеріальної задачі оптимізації (1) будемо розуміти знаходження деякої множини $D \subset X$, кожна точка якої належить X_P (або X_{Sp}).

ЗНАХОДЖЕННЯ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНИХ ТОЧОК

Нехай множина X, на якій визначені функції $F_i(x)$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$ задачі (1), задається системою рівностей та нерівностей:

$$x \in X = \{ x \in R^n \mid g_j(x) \le 0,\ j \in I^-;\ g_j(x) = 0,\ j \in I^0 \}. \qquad (2)$$

При цьому всі функції, що визначають задачу (1), (2), $F_i(x)$, $i \in I$, $g_j(x)$, $j \in I^- \bigcup I^0$, — опуклі та неперервно диференційовані.

Більшість з відомих підходів до розв'язання багатокритеріальної задачі оптимізації (1), (2) полягають у тому, що початкова задача зводиться до деякої однокритеріальної (скалярної) задачі оптимізації шляхом «згортання» векторного критерія $F(x)$ в одну цільову функцію — узагальнений критерій. При цьому можливе одержання узагальненого критерія декількома способами.

Найбільш розповсюдженим узагальненим критерієм є лінійна згортка:

$$F_\alpha(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i F_i(x), \qquad (3)$$

де $\{\alpha_i\}$ — довільним чином вибрані m чисел такі, що $\alpha_i \ge 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, $i \in I.$ Не важко довести, що розв'язок $x_P = x_p(\alpha)$ задачі математичного програмування з цільовою функцією (3)

$$\min_{x \in X} \left\{ F_\alpha(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i(x) \right\} \qquad (4)$$

є оптимальним за Парето рішенням задачі (1).

Вагові коефіцієнти $\{\alpha_i\}$ в означенні цільової функції $F_\alpha(x)$ задачі оптимізації (4) мають таку інтерпретацію. По-перше, ці коефіцієнти є коефіцієнтами зведення до єдиної одиниці виміру різних одиниць виміру значень критеріальних функцій $\{F_i\}$. І, по-друге, величина коефіцієнта α_i є величиною «абсолютної значущості» критеріальної функції F_i, тобто більш значущій для особи, яка приймає рішення (ОПР), критеріальній функції $F_\bullet$ має відповідати більший ваговий коефіцієнт $\alpha_\bullet$.

Для різних векторів $\alpha \in R^m$ одержуємо різні однокритеріальні задачі (4), тобто перебираючи різні значення $\{\alpha_i\}$ можна отримати різні Паретооптимальні рішення сформульованої m-критеріальної задачі математичного програмування (1). На якому саме із цих рішень зупинить свій вибір ОПР, взагалі кажучи, не відомо. Цей вибір залежить як від вже отриманого досвіду розв'язування відповідного типу задач, так і від заздалегідь не формалізованих бажань.

Для розв'язання задачі (4) можна застосовувати відомі методи нелінійної оптимізації, наприклад, метод лінеаризації та його прискорені модифікації [4–7].

Інший підхід до розв'язання багатокритеріальної задачі оптимізації полягає в тому, що деяку ефективну точку задачі (1) можна охарактеризувати в термінах розв'язку задачі дискретного мінімаксу [5, 8]:

$$\min_{x\in X}\max_{i\in I} F_i(x)\,. \tag{5}$$

Задача (5), у свою чергу, еквівалентна задачі оптимізації:

$$\min_{x,\beta}\{\beta : F_i(x)\le\beta,\ i\in I,\ x\in X\}, \tag{6}$$

де $\beta\in R^1$ — допоміжна змінна. Таким чином, задача (5) (або (6)) дозволяє визначити гарантовану верхню оцінку для всіх критеріїв $F_i(x),\ i\in I.$ Для розв'язання (6) також можна застосувати відомі методи оптимізації.

В [8] на основі задач (5), (6) було запропоновано метод лінеаризації знаходження ефективної точки задачі (1), (2). Допоміжна задача цього методу для задачі (5) має вигляд:

$$\min_p\left\{\frac{1}{2}\|p\|^2+\max_i\langle F_i'(x),p\rangle : \langle g_j'(x),p\rangle+g_j(x)\le 0,\ j\in I^-,\right.$$

$$\left.\langle g_j'(x),p\rangle+g_j(x)=0,\ j\in I^0\right\}. \tag{7}$$

Недоліком цього методу з допоміжною задачею (7) є те, що він знаходить лише одну Парето-оптимальну точку (як правило, слабо ефективну), яка не завжди є прийнятною для ОПР.

Розглянемо «скаляризацію» багатокритеріальної задачі оптимізації (1) із застосуванням задачі дискретного мінімаксу «зважених» критеріїв:

$$\min_{x\in X}\max_{i\in I}\alpha_i F_i(x),\ \ \alpha_i>0,\ \sum_{i\in I}\alpha_i=1. \tag{8}$$

Розв'язуючи задачу (8) для різних значень вагових коефіцієнтів $\{\alpha_i\}$, можна одержати різні ефективні точки $x^*(\alpha)$ початкової задачі (1).

Не важко показати, що, якщо точка x^* — розв'язок задачі (8), то x^* — слабо ефективна точка задачі (1). Припустимо, що $x^*\in X$ не є слабо ефективною точкою задачі (1). Тоді за означенням знайдеться така точка $\hat{x}\in X$, що $F_i(\hat{x})<F_i(x^*)\ \forall i\in I$. Отже для будь-якого i справедлива нерівність:

$$\alpha_i F_i(\hat{x})<\alpha_i F_i(x^*)\le\max_i\alpha_i F_i(x^*)\,. \tag{9}$$

Оскільки нерівність (9) виконується для всіх i, то вона виконується й для такого i, для якого досягається максимум у лівій її частині, тобто

$$\max_i \alpha_i F_i(\hat{x}) < \alpha_i F_i(x^*) \le \max_i \alpha_i F_i(x^*).$$

Нерівність $\max_i \alpha_i F_i(\hat{x}) < \max_i \alpha_i F_i(x^*)$ суперечить тому, що $x^* \in X$ — розв'язок задачі (8).

Побудуємо модифікацію методу лінеаризації [8, 9] знаходження ефективної точки задачі (1), (2), розв'язуючи задачу (8).

Основою цього алгоритму є розв'язання наступної допоміжної задачі квадратичного програмування:

$$\min_{p,\xi}\Big\{ \xi + 1/2\|p\|^2 \ : \ \langle \alpha_i F_i'(x), p\rangle - \xi \le 0, \ i \in I,$$

$$\langle g_j'(x), p\rangle + g_j(x) \le 0, \ j \in I^-, \ \langle g_j'(x), p\rangle + g_j(x) = 0, \ j \in I^0 \Big\}, \qquad (10)$$

де $\alpha_i > 0$, $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ — фіксовані.

Функція Лагранжа задачі (10) має вигляд:

$$L(p,\xi,u,v) = \xi + \frac{1}{2}\|p\|^2 + \sum_{i\in I} u_i\big[\langle \alpha_i F_i'(x), p\rangle - \xi\big] + \sum_{j \in I^- \cup I^0} v_j\big[\langle g_j'(x), p\rangle + g_j(x)\big].$$

Необхідними й достатніми умовами, що пов'язують розв'язок $p(x)$ задачі (10) з множниками Лагранжа $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, є наступна система рівностей та нерівностей:

$$\begin{cases} u_i\big[\langle \alpha_i F_i'(x), p\rangle - \xi\big] = 0, & i \in I, \\ v_j\big[\langle g_j'(x), p\rangle + g_j(x)\big] = 0, & j \in I^- \cup I^0, \\ \sum_{i \in I} u_i = 1, & \\ u_i \ge 0, & j \in I^0, \\ v_j \ge 0, & j \in I^-, \\ p(x) + \sum_{i\in I} u_i \alpha_i F_i'(x) + \sum_{j \in I^- \cup I^0} v_j g_j'(x) = 0. & \end{cases} \qquad (11)$$

Тепер нескладно побудувати двоїсту задачу до задачі (10):

$$\max_{u,v}\Bigg\{ -\frac{1}{2}\Big\| \sum_{i\in I} u_i \alpha_i F_i'(x) + \sum_{j \in I^- \cup I^0} v_j g_j'(x) \Big\|^2 +$$

$$+ \sum_{j \in I^- \cup I^0} v_j g_j(x) : \sum_{i \in I} u_i = 1, \ \begin{matrix} u_i \ge 0, & i \in I, \\ v_j \ge 0, & j \in I^- \end{matrix} \Bigg\}. \qquad (12)$$

Розв'язками задачі (12) є вектори $\{u_i(x)\}$ та $\{v_j(x)\}$, а розв'язок $p(x)$ задачі (10), згідно системи (11), визначається рівнянням:

$$p(x) = -\sum_{i \in I} u_i(x)\alpha_i F_i'(x) - \sum_{j \in I^- \cup I^0} v_j(x) g_j'(x).$$

Розв'язок $p^k = p(x^k)$ задачі (10) для $x = x^k$ вважатимемо вектором спуску в ітераційному процесі: $x^{k+1} = x^k + t_k p^k$.

Кроковий множник t_k вибираємо за таким правилом: знаходимо перше значення $s = 0, 1, \ldots$, для якого виконується нерівність:

$$\max_{i \in I} \{\alpha_i [F_i(x^k + tp^k) - F_i(x^k)]\} + N_k g^+(x^k + tp^k) \le N_k g^+(x^k) - t\varepsilon \left\| p^k \right\|^2, \quad (13)$$

$t = 2^{-s}$, $\varepsilon > 0$ — достатньо мале число. Якщо таке $s = s_0$ знайдено, то вибираємо $t_k = 2^{-s_0}$. В (13) $g^+(x) = \max\{0;\ g_j(x),\ j \in I^-;\ |g_j(x)|,\ j \in I^0\}$, $N_k \ge \sum_{j \in I^- \cup I^0} |v_j(x_k)|$, де $\{v_j(x_k)\}$ — розв'язок двоїстої задачі (12) в точці $x = x^k$. Обґрунтування обмеженості знизу величин $t = 2^{-s}$, $s = 0, 1, \ldots$, наведено в [4].

Критерієм зупинки описаного ітераційного процесу є виконання умови $\left\| p(x^k) \right\| \le \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$ — задана точність.

Для методу з допоміжною задачею (7) в [8] доведено, що рівність $p(x^*) = 0$ та виконання умов регулярності в точці x^*, є необхідними для того, щоб точка x^* була оптимальною для задачі (6) й слабо ефективною для задачі (1), (2). Для опуклої задачі (1), (2) (множина X та функції $F_i(x)$, $i \in I$ — опуклі) за виконання умов регулярності в точці x^* рівність $p(x^*) = 0$ є також і достатньою. Якщо ж припускається строга опуклість функцій $F_i(x)$, $i \in I$ та виконання умов регулярності, то рівність $p(x^*) = 0$ є необхідною і достатньою для того, щоб точка x^* була Парето-оптимальною для задачі (1), (2).

Для описаної модифікації методу лінеаризації розв'язання задачі (1), (2) з допоміжною задачею (10) при фіксованих $\alpha_i > 0$, $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ справедливі аналогічні властивості, які встановлюють зв'язок між виконанням умов $p(x^*) = 0$ та ефектнивною (слабо-ефективною) точкою x^* задачі (1), (2).

Оскільки зазвичай множина ефективних точок багатокритеріальної задачі оптимізації (1) містить багато точок, а запропоновані методи на основі «згортання» критеріїв (задачі (4), (8)) для фіксованого набору вагових коефіцієнтів $\{\alpha_i\}$ знаходять тільки одну ефективну точку $x_P(\alpha)$, то розв'язання багатокритеріальної задачі оптимізації неможливе без діалогу з ОПР.

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ ЗНАХОДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ТОЧОК НА ПРИКЛАДІ РОЗВ'ЯЗАННЯ МОДЕЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

Приклад. Знайти ефективні точки багатокритеріальної задачі оптимізації [9]:

$$F(x) \equiv \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix} \mapsto \max_{x \in X}, \tag{14}$$

де множина X визначається нерівностями: $x_1 + x_2 \le 10$, $x_{1,2} \ge 0$, $x_1 \le 8$, $x_2 \le 6$ (рис. 1). Початкова точка — $x^0 = \{0; 0\}^T$.

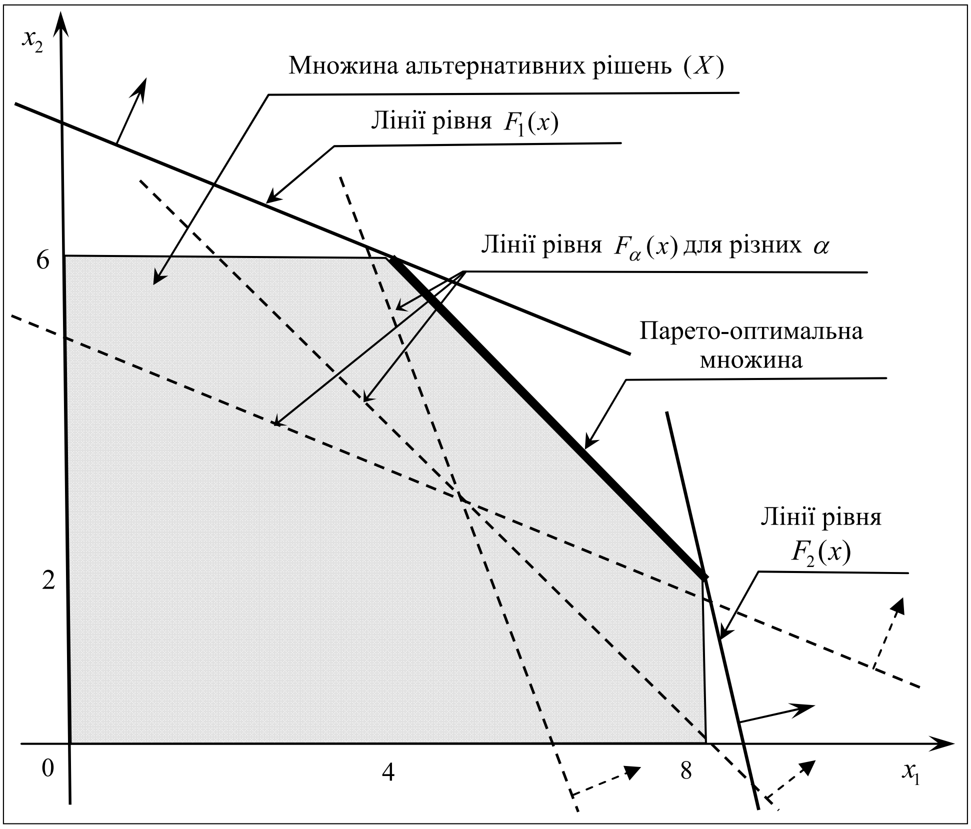

Рис. 1. Множини допустимих і Парето-оптимальних точок, лінії рівнів критеріальних функцій задачі (14)

Розв'яжемо задачу (14) декількома способами.

1 спосіб. Побудуємо лінійну «згортку» векторного критерія F й перейдемо від задачі (14) до задачі оптимізації:

$$\max_x \{F_\alpha(x) \equiv \alpha_1(2x_1 + 5x_2) + \alpha_2(4x_1 + x_2) : x_1 + x_2 \le$$

$$\le 10,\ x_{1,2} \ge 0,\ x_1 \le 8,\ x_2 \le 6\}. \tag{15}$$

Значення параметрів $\{\alpha_{1,2}\} \ge 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Для значення параметрів $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}5$ лінії рівня функції $F_\alpha(x)$ паралельні прямій $(x_1 + x_2 = 10)$, що визначає перше обмеження задачі (15). Тобто у цьому випадку множина розв'язків задачі (15) збігається з множиною Парето-оптимальних точок задачі (14) (рис. 1). Для значень $0{,}5 < \alpha_1 \le 1$ й відповідних $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ розв'язком задачі (15) є єдина точка $x^* = (4; 6)^T$, а для значень $0 \le \alpha_1 <$ $< 0{,}5$ — єдина точка $x^* = (8; 2)^T$.

2 спосіб. Задачу (14) шляхом введення допоміжної змінної β зводимо до оптимізаційної задачі виду (6):

$$\max_{x,\beta} \{\beta : 2x_1 + 5x_2 \ge \beta,\ 4x_1 + x_2 \ge \beta,$$

$$x_1 + x_2 \le 10,\ x_{1,2} \ge 0,\ x_1 \le 8,\ x_2 \le 6\}. \tag{16}$$

У цьому випадку одержуємо лише одну Парето-оптимальну точку задачі (14): $x^* = (6{,}66; 3{,}33)^T$, $F(x^*) = (30; 30)^T$, $\beta^* = 30$.

3 спосіб. Парето-оптимальні точки задачі (14) знаходимо шляхом розв'язання задач, аналогічних (16), для різних значень $\{\alpha_{1,2}\} > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$:

$$\max_{x,\beta} \{\beta : \alpha_1(2x_1 + 5x_2) \ge \beta,\ \alpha_2(4x_1 + x_2) \ge \beta,$$

$$x_1 + x_2 \le 10,\ x_{1,2} \ge 0,\ x_1 \le 8,\ x_2 \le 6\}. \tag{17}$$

Однокритеріальні задачі (15)–(17), до яких зводилась початкова багатокритеріальна задача оптимізації (14), розв'язувались за допомогою авторських реалізацій метода лінеаризації [4], запропонованої модифікації метода [8] та методами пакета Solver, Frontline Systems Inc.

Методи пакета Solver для розв'язання оптимізаційних задач можна викликати з MS Excel, попередньо сформувавши у клітинах робочого аркушу математичну модель задачі. Так, наприклад, на рис. 2 показано робочий аркуш MS Excel, в клітинах якого містяться значення початкової точки, вагові коефіцієнти та формули для обчислення цільової функції й обмежень задачі (15).

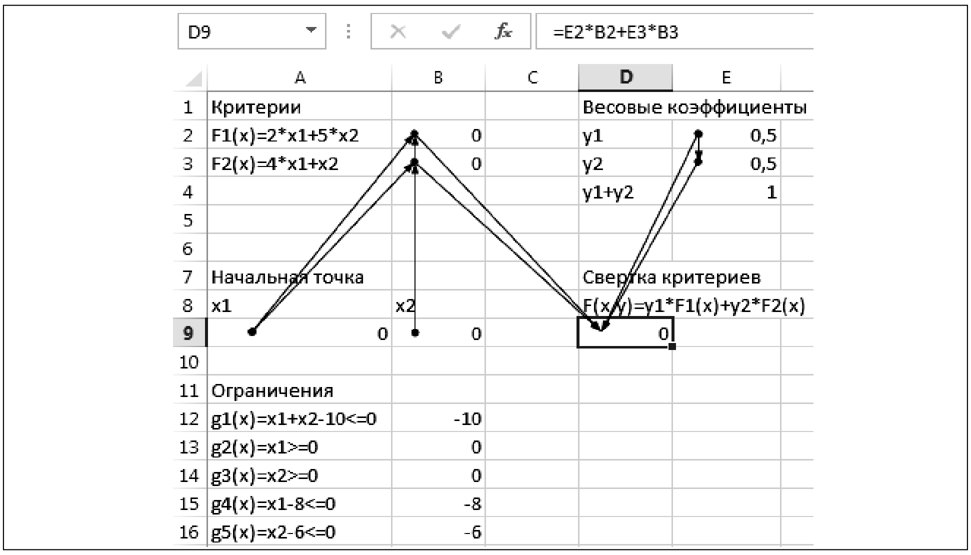

Рис. 2. Математична модель задачі (15) для пакета Solver

На рис. 3 показано, як потрібно задати параметри у вікні програми Solver, щоб застосувати її для розв’язання цієї задачі.

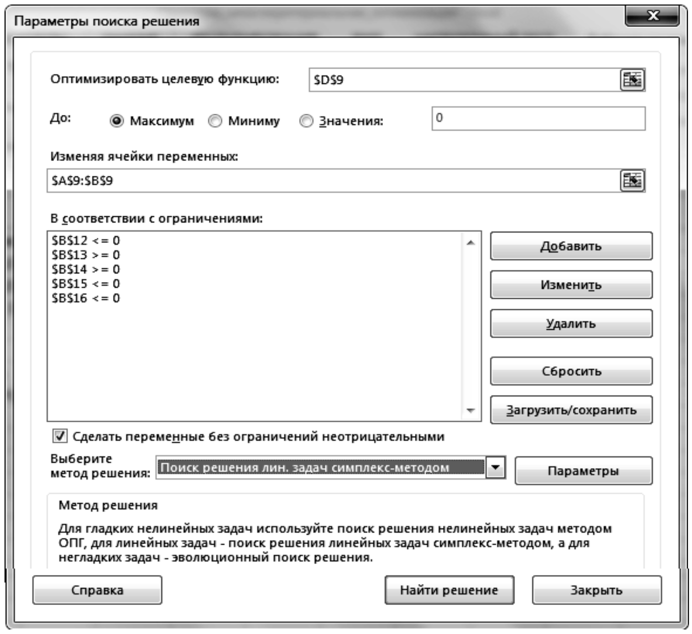

Рис. 3. Параметри задачі (15) для пакета Solver

В таблиці наведені Парето-оптимальні точки задачі (14) та способи, за допомогою яких вони одержані.

Таблиця. Результати обчислень

№	x^*	F^*	α	Примітка (задача, метод)
1	$\begin{pmatrix} 6{,}66 \\ 3{,}33 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}, \ \beta = 30$	–	Задача (16) – метод [4], Solver
		$\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix}, \ \beta = 15$	$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$	Задача (17) – метод [4], Solver Задача (14) – мод. метода [8]
2	$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 26 \\ 34 \end{pmatrix}$	$\alpha_1 \in [0; 0{,}5]$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$	Задача (15) – метод [4], Solver
			$\alpha_1 \in [0{,}567; 1]$ $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$	Задача (17) – метод [4], Solver Задача (14) – мод. метода [8]
3	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 38 \\ 22 \end{pmatrix}$	$\alpha_1 \in]0{,}5; 1[$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$	Задача (15) – метод [4], Solver
			$\alpha_1 \in]0; 0{,}367[$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$	Задача (17) – метод [4], Solver Задача (14) – мод. метода [8]
4	$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 35 \\ 25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$	Задача (15) – метод [4], Solver
5	Безліч ефек- тивних точок	$F_1 \in [26;38]$, $F_2 \in [22;34]$	$\alpha_1 \in [0{,}367; 0{,}567[$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$	Задача (17) – метод [4], Solver Задача (14) – мод. метода [8]

З проведених чисельних експериментів можна зробити висновок, що найбільш «повне покриття» Парето-оптимальної множини задачі (14) можна одержати, якщо розв'язувати її або безпосередньо за допомогою сформульованої вище модифікації метода лінеаризації, або розв'язуючи «зведену» задачу (17) методами оптимізації.

Оскільки запропонована модифікація метода лінеаризації враховує специфіку оптимізаційної задачі (17), до якої зводиться багатокритеріальна задача, то вона знаходить розв'язок за меншу кількість ітерацій, ніж загальні методи, які не враховують цієї специфіки. Це продемонстровано на рис. 4, де порівнюється збіжність запропонованого метода та метода [4], хоча характер збіжності однаковий.

Відмінність між ітераційними процесами цих двох методів полягає в тому, що перший будує послідовність точок у просторі (R^n) вихідної задачі, а другий — у просторі більшого виміру (R^{n+1}).

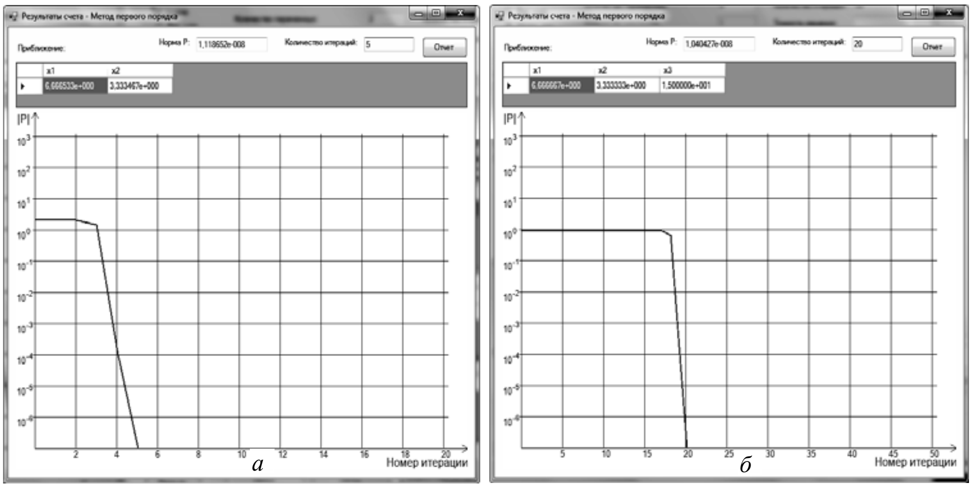

Рис. 4. Збіжність методів: *а* — запропонований метод; *б* — [4]

Із застосуванням задач (15) шляхом варіювання вагових коефіцієнтів можна одержати лише деяку підмножину ефективних точок задачі (14), а із застосуванням задачі (16) — взагалі лише одну.

ВИСНОВКИ

Розглянуто багатокритеріальну задачу оптимізації, в якій критеріальні функції, що складають векторний критерій, та функції, що описують множину допустимих точок, є опуклими та неперервно диференційованими.

Описані підходи до отримання Парето-оптимальних точок на основі зведення початкової задачі до задач математичного програмування зі спеціальними цільовими функціями, побудованими на компонентах векторного критерія та параметрах, що визначають уподобання ОПР. Послідовна оптимізація таких функцій при зафіксованих значеннях параметрів дозволяє виділяти серед Парето-оптимальних рішень ті, що задовольняють ОПР.

Запропоновано модифікацію метода лінеаризації Б.Н. Пшеничного для розв'язання багатокритеріальної задачі оптимізації, яка будується на основі задачі дискретного мінімаксу «зважених» критеріїв. Стосовно цієї задачі доведено, що її розв'язок для фіксованих параметрів є слабо ефективною точкою відповідної багатокритеріальної задачі оптимізації.

У роботі наведено розрахунки та чисельні експерименти із застосуванням метода лінеаризації, запропонованого метода та методів пакета Solver Frontline Systems Inc. Метод лінеаризації для задач математичного програмування, його модифікація для багатокритеріальної задачі оптимізації та алгоритм для розв'язання допоміжної задачі (задачі квадратичного програмування) реалізовано авторами у вигляді ієрархії класів C# для платформи NET 3.5.

Проведений порівняльний аналіз роботи алгоритмів, наглядно підтверджує ефективність роботи запропонованого алгоритму.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1987. — 384 с.
2. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето–оптимальные решения много-критериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
3. *Ржевський С.В., Александрова В.М.* Дослідження операцій. — К.: Академвидав, 2006. — 560 с.
4. *Пшеничный Б.Н.* Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983. — 136 с.
5. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975. — 319 с.
6. *Пшеничный Б.Н., Панин В.М., Соболенко Л.А.* Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании / Под ред. Е.Г. Гольштейна. — М.: Наука, 1991. — 448 с.
7. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 534 с.
8. *Пшеничный Б.Н., Сосновский А.А.* Метод линеаризации для решения многокритериальной задачи оптимизации // Кибернетика. — 1987. — № 6. — С. 107–109.
9. *Сосновский А.А., Александрова В.М.* Несколько примеров решения многокритериальной задачи оптимизации // Использование методов и информационных технологий в технических и экономических системах. — К.: ИК АН Украины, 1992. — С. 17–23.

Надійшла 07.03.2014