

Т. Я. Шульга

Исследование стационарного движения стратифицированной жидкости, вызываемого действием ветра в Азовском море

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. В. Черкесовым)

На основании аналитического решения задачи ветрового стационарного движения вязкой двухслойной жидкости изучено двумерное течение, вызываемое действием постоянного ветра в Азовском море. Установлены зависимости изменения скорости жидкости при снижении температуры верхнего и нижнего слоев, а также с ростом глубины верхнего слоя. Полученное решение позволяет оценить положение плоскости раздела двух слоев в Азовском море и является тестом для численных расчетов течений двухслойной жидкости.

Модели ветрового движения двухслойной жидкости находят широкое применение при расчетах характеристик течений в неоднородных по температуре водоемах. Морфологические особенности донной поверхности Азовского моря заключаются в том, что наряду с относительно глубоководными районами имеют место и большие по площади области мелководья (прибрежные зоны, лиманы, заливы), глубины которых соизмеримы с величиной перепада уровня воды при сгонно-нагонных явлениях. При этом используются методы математического моделирования происходящих в нем гидрофизических процессов, связанные с переходом к σ -координатам [1, 2].

В настоящем сообщении представлено полученное нами аналитическое решение стационарной задачи ветрового движения вязкой двухслойной жидкости в бассейне, где верхний слой соответствует мелководью, а нижний — глубоководной части. Выполнен анализ результатов, позволяющий найти оценки величин входящих сюда параметров, адекватно отражающих гидрофизические процессы в бассейне, содержащем обширные мелководные и глубоководные районы.

1. Рассмотрим стационарное ветровое движение стратифицированной жидкости с учетом турбулентного обмена в замкнутом прямоугольном бассейне ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, где $a = 4 \cdot 10^5$ м, $b = 3 \cdot 10^5$ м) постоянной глубины.

Пусть дно бассейна горизонтально ($H = 14$ м), верхний и нижний слои жидкости однородны, но с разными плотностями; коэффициенты вертикального турбулентного обмена постоянны в каждом слое, но не равны между собой. Горизонтальная плоскость, отстоящая от невозмущенной поверхности водоема на глубине (H_1), разделяет исходную область на две подобласти: мелководный верхний слой (I) и глубоководный слой (II). Движение жидкости в слое I вызывается ветром, а в слое II градиентом давления и течением в первом слое.

Стационарное движение жидкости в линейном приближении при достаточно малых скоростях ветра описывается следующими уравнениями мелкой воды [3, 4]:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - f v_1 = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M^1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + A_M \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + f u_1 = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M^1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + A_M \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

в слое I ($-H_1 \leq z \leq 0$);

$$g \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - f v_2 = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M^2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + A_M \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$g \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + f u_2 = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M^2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + A_M \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

в слое II ($-H \leq z \leq -H_1$).

Здесь индекс "1" относится к верхнему слою жидкости, индекс "2" — к нижнему; x, y, z — оси прямоугольной системы координат. Ось z направлена вертикально вверх; $u_{1,2}(x, y, z)$, $v_{1,2}(x, y, z)$ — компоненты вектора скорости течения; K_M^1, K_M^2 — коэффициенты вертикального турбулентного обмена; g — ускорение свободного падения; f — параметр Кориолиса; ζ_1 и ζ_2 — отклонение поверхности жидкости и границы раздела слоев от плоскостей $z = 0$ и $z = -H_1$ соответственно; ρ_1 и ρ_2 — постоянные плотности воды; A_M — коэффициент горизонтального турбулентного обмена.

На вертикальных стенках бассейна выполняются условия прилипания: при $z = 0$, $z = -H_1$ и $z = -H$ граничные условия для уравнений (1)–(4) имеют вид [3, 4]:

$$\rho_1 K_M^1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = (\tau_{0x}, \tau_{0y}), \quad w_1|_{z=0} = 0, \quad w_1|_{z=-H_1} = 0, \quad (5)$$

$$\rho_2 K_M^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=-H_1} = (\tau_{bx}, \tau_{by}), \quad w_2|_{z=-H_1} = 0, \quad w_2|_{z=-H} = 0. \quad (6)$$

Граничные условия между слоями жидкости задаются в соответствии с [4]:

$$\rho_1 K_M^1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=-H_1} = \rho_2 K_M^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=-H_1}, \quad (7)$$

$$u_1|_{z=-H_1} = u_2|_{z=-H_1}, \quad v_1|_{z=-H_1} = v_2|_{z=-H_1}.$$

Здесь τ_{0x}, τ_{0y} — составляющие тангенциального напряжения ветра $\bar{\tau}$ на свободной поверхности ($\tau_{0x} = \rho_a C_a |\mathbf{W}| W_x$; $\tau_{0y} = \rho_a C_a |\mathbf{W}| W_y$), где \mathbf{W} — вектор скорости приводного ветра; ρ_a — плотность атмосферы; коэффициент поверхностного трения $C_a = k^2 (14.56 - 2 \ln |\mathbf{W}| / W_0)^{-2}$ определяется согласно [1, 2] ($W_0 = 1$ м/с — нормирующий множитель); $\bar{\tau}_b = (\tau_{bx}, \tau_{by})$ — вектор напряжения на дне, составляющие которого определяются по логарифмическому закону: ($\tau_{bx} = \rho_0 C_b |\mathbf{U}_b| u_b$; $\tau_{by} = \rho_0 C_b |\mathbf{U}_b| v_b$); C_b — коэффициент придонного трения ($C_b = \left[\frac{1}{k} \ln \left(\frac{H + z_b}{z_b} \right) \right]^{-2}$); z_b — точка вблизи дна, $\mathbf{U}_b = (u_b, v_b)$ — скорость течения жидкости в этой точке.

Умножим каждое уравнение (3), (4) на i и прибавим к соответствующим уравнениям (1), (2). Введем при этом обозначения [4]:

$$U_1 = u_1 + i v_1; \quad U_2 = u_2 + i v_2; \quad \tau = \tau_{0x} + i \tau_{0y}. \quad (8)$$

В стационарном движении при сравнительно небольших скоростях ветра изменения уровней свободной поверхности и поверхности раздела по горизонтальным координатам

сравнительно малы и ими можно пренебречь. Воспользовавшись представлением (8), объединим уравнения (1)–(4) в одну систему двух уравнений:

$$\begin{cases} -ifU_1 + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M^1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) + A_M \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) = 0, \\ -ifU_2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M^2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) + A_M \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Граничные условия (5)–(7) при этом переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_1 K_M^1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau, \quad \rho_1 K_M^1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=-H_1} = \rho_2 K_M^2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=-H_1}, \\ U_1|_{z=-H_1} = U_2|_{z=-H_1}, \quad \rho_2 K_M^2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=-H} = C_b U_2|_{z=-H}. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение системы (9) ищем в виде периодических функций:

$$\begin{aligned} U_{nm}^1 &= (C_{nm}^1 \exp(\sqrt{\alpha_{nm}^1 z}) + C_{nm}^2 \exp(-\sqrt{\alpha_{nm}^1 z})) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \\ U_{nm}^2 &= (\tilde{C}_{nm}^1 \exp(\sqrt{\alpha_{nm}^2 z}) + \tilde{C}_{nm}^2 \exp(-\sqrt{\alpha_{nm}^2 z})) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом напряжения трения ветра представляем в виде:

$$\tilde{\tau}_{nm} = \sum_{n,m} \bar{\tau}_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (12)$$

Система (9) с граничными условиями (10) для неизвестных функций (11) и напряжениями трения ветра в виде (12) преобразуется в четыре уравнения, которые позволяют определить неизвестные: C_{nm}^1 ; C_{nm}^2 ; \tilde{C}_{nm}^1 ; \tilde{C}_{nm}^2 :

$$\left\{ \begin{aligned} K_M^1 (C_{nm}^1 \sqrt{\alpha_{nm}^1} + C_{nm}^2 \sqrt{\alpha_{nm}^2}) &= \frac{\tau_{nm}}{\rho_1}, \\ \rho_1 K_M^1 \sqrt{\alpha_{nm}^1} (-C_{nm}^1 \exp(-\sqrt{\alpha_{nm}^1} H_1) + C_{nm}^2 \exp(\sqrt{\alpha_{nm}^1} H_1)) &= \\ &= \rho_2 \sqrt{\alpha_{nm}^2} K_M^2 (-\tilde{C}_{nm}^1 \exp(-\sqrt{\alpha_{nm}^2} H_1) + \tilde{C}_{nm}^2 \exp(\sqrt{\alpha_{nm}^2} H_1)), \\ C_{nm}^1 \exp(-\sqrt{\alpha_{nm}^1} H_1) + C_{nm}^2 \exp(\sqrt{\alpha_{nm}^1} H_1) &= \\ &= \tilde{C}_{nm}^1 \exp(-\sqrt{\alpha_{nm}^2} H_1) + \tilde{C}_{nm}^2 \exp(\sqrt{\alpha_{nm}^2} H_1), \\ \rho_2 K_M^2 \sqrt{\alpha_{nm}^2} (-\tilde{C}_{nm}^1 \exp(-\sqrt{\alpha_{nm}^2} H) + \tilde{C}_{nm}^2 \exp(\sqrt{\alpha_{nm}^2} H)) &= \\ &= C_b (\tilde{C}_{nm}^1 \exp(-\sqrt{\alpha_{nm}^2} H) + \tilde{C}_{nm}^2 \exp(\sqrt{\alpha_{nm}^2} H)), \end{aligned} \right. \quad (13)$$

где

$$\alpha_{nm}^{1,2} = \sqrt{\left(A_M \left(\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right) + if \right) / K_M^{1,2}}.$$

2. В рамках построенной модели выполнен расчет скоростей течений в прямоугольном бассейне, геометрия которого отображает параметры Азовского моря. Течения вызываются действием постоянного западного ветра со скоростью 5 м/с, направленного вдоль оси x . Целью численных экспериментов является исследование влияния величины вертикального турбулентного обмена, глубины верхнего слоя (H_1) и годового сезона на возникающие течения.

Расчеты проводились для значений параметров, которые уже использовались при моделировании динамики вод Азовского моря [5]. Так, $A_M = 10 \text{ м/с}^2$; $C_b = 2 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$; параметр Кориолиса соответствует 44° с. ш. ($f = 1,014 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$).

Параметризация коэффициентов вертикального турбулентного обмена в слоях бассейна осуществлялась на основе теории Прандтля–Обухова, учитывающей ветровое воздействие и географическое расположение бассейна [6]:

$$K_M(z) = \frac{(0,05h)^2 |\bar{\tau}|}{\rho_0 K_0} e^{-\alpha z}. \quad (14)$$

Здесь h — характерный размер области перемешивания, который находится по формуле $h = \pi \sqrt{K_0/2f}$; $\alpha = \sqrt{f/2K_0}$. При этом K_0 — коэффициент вертикального турбулентного обмена на свободной поверхности $\left(K_0 = \frac{(0,05\pi)^2 |\bar{\tau}|}{2\rho_0 f} \right)$.

Анализ результатов первой серии численных расчетов позволяет оценить влияние изменения температуры верхнего и нижнего слоев и, как следствие этого, изменения плотности воды на величины скоростей стационарных течений. Зависимость плотности (ρ) от температуры (T), солёности (S) и атмосферного давления (P) задавалась формулой Международного уравнения состояния морской воды [7]:

$$\rho(T, S, P) = \rho(T, S, 0) \left(1 - \frac{P}{K_\rho(T, S, P)} \right)^{-1}. \quad (15)$$

При расчете плотности (15) значение P принималось равным 1 атм (101 325 Па), значения T и S для расчета плотности подбирались на основании данных многолетних наблюдений температуры и солёности в Азовском море [8, 9]. Показано, что температура и плотность воды в Азовском море имеют хорошо выраженный годовой ход. В то же время солёность Азовского моря незначительна (10–12 ‰) и ее сезонные колебания не превышают 1 ‰. На основании этого, во всех численных экспериментах солёность в верхнем слое моря принимаем равной 10 ‰, в нижнем — 11 ‰.

Исследование стационарных течений проведено для трех характерных температурных сезонов: декабрь–март (температура воды в верхнем слое 3°C , в нижнем 0°C); апрель–август (температура воды в верхнем слое 25°C , в нижнем 18°C); сентябрь–ноябрь (температура воды в верхнем слое 10°C , в нижнем 6°C). При этом для указанных сезонов величина γ ($\gamma = 1 - \rho_1/\rho_2$) равна: $1,982 \cdot 10^{-3}$; $2,982 \cdot 10^{-3}$ и $1,984 \cdot 10^{-3}$ соответственно.

Максимальные значения скоростей течений на различных горизонтах, вызванных постоянным западным ветром скорости 10 м/с в зависимости от глубины верхнего слоя для трех годовых сезонов, демонстрирует табл. 1. Глубина верхнего слоя (H_1) в экспериментах варьировалась от 5 до 11 м. Из анализа данных, приведенных в таблице, следует, что понижение температуры верхнего и нижнего слоев приводит к уменьшению скорости жидкости. При этом по сравнению с холодным сезоном (декабрь–март) увеличение макси-

мумов скоростей течений не превышает 0,5% для теплого (апрель–август) и умеренного (сентябрь–ноябрь) сезонов.

Более существенное влияние на максимальные значения скоростей течений оказывает глубина верхнего слоя. Из данных, представленных в таблице, видно, что увеличение глубины на 6 м ($H_1 = 5$ и $H_1 = 11$ м) приводит к росту максимумов скоростей в верхних слоях: ($z = -1$ м) 5%; ($z = -5$ м) 15%; ($z = -7$ м) 2,5%, и к уменьшению максимумов скоростей в нижних слоях: ($z = -9$ м) 11% и ($z = -11$ м) 16%.

Поведение годографа скорости в зависимости от глубины верхнего слоя и плотностей, рассчитанных при различной температуре и солености (15), иллюстрирует рис. 1. Здесь приведены результаты расчетов в центре бассейна ($x = 200$ км; $y = 150$ км), найденные при значениях коэффициентов вертикального турбулентного обмена $K_M^1 = 1 \cdot 10^{-4}$ м²/с; $K_M^2 = 5 \cdot 10^{-5}$ м²/с для сезона декабрь – март ($\rho_1 = 1007,533$; $\rho_2 = 1009,695$ кг/м³). На рис. 1, а представлен годограф скорости течений, рассчитанный при глубине верхнего слоя равной 5 м. Для указанного сезона на рис. 1, б с целью сравнения приведены две линии годографов скорости: первая – при глубине верхнего слоя $H_1 = 5$ (см. также а на рис. 1) и вторая (линия отмеченная точками) – при глубине верхнего слоя $H_1 = 11$ м. На всех рисунках сплошная линия соответствует скорости течений в верхнем слое, штрих-пунктирная – в нижнем.

Из рис. 1, б видно, что увеличение глубины верхнего слоя приводит к тому, что в верхнем слое скорости становятся больше и их затухание происходит более резко. В нижнем слое $-H \leq z \leq -H_1$ значения скоростей и характер их стремления к нулю отличаются мало.

Следующая серия рисунков (рис. 2) иллюстрирует поведение скоростей стационарных течений на различных горизонтах: свободной поверхности ($z = 0$), на глубине раздела слоев ($z = -H_1$) и в придонном слое ($z = -H + 0,01$ м). Отсюда видно, что полученные решения позволяют выполнить их сравнение с известной спиралью Экмана. В рассматриваемом случае составляющая вектора скорости жидкости на поверхности бассейна отклоняется от

Таблица 1. Максимальные значения модуля скорости течений (см/с), вызванные постоянным западным ветром 10 м/с на различных горизонтах Азовского моря, в зависимости от глубины верхнего слоя (H_1) для трех годовых сезонов

Годовой сезон	Горизонт, м	U_{\max}			
		$H_1 = 5$ м	$H_1 = 7$ м	$H_1 = 9$ м	$H_1 = 11$ м
Декабрь–март	1	20,9	21,7	21,9	21,9
	5	9,4	10,3	10,8	11,0
	7	7,8	7,3	7,7	8,0
	9	7,0	6,6	6,2	6,3
	11	6,7	6,3	6,0	5,8
Апрель–август	1	21,0	21,8	22,0	22,0
	5	9,4	10,3	10,9	11,1
	7	7,8	7,4	7,8	8,0
	9	7,0	6,6	6,3	6,3
	11	6,7	6,4	6,0	5,8
Сентябрь–ноябрь	1	21,0	21,7	21,9	21,9
	5	9,4	10,3	10,8	11,1
	7	7,8	7,4	7,7	8,0
	9	7,0	6,6	6,3	6,3
	11	6,7	6,3	6,0	5,8

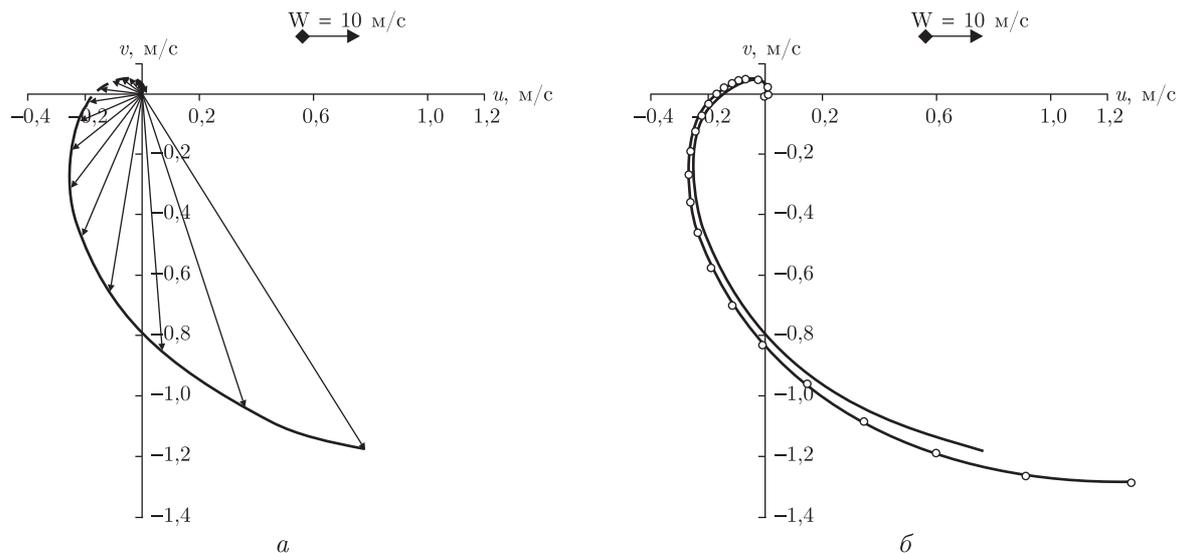


Рис. 1. Годографы скорости течения в центре бассейна $x = 200$ км; $y = 150$ км, вызванного постоянным западным ветром скорости 10 м/с, для сезона декабрь–март (сплошная линия соответствует верхнему слою, штрих-пунктирная нижнему): при глубине верхнего слоя $H_1 = 5$ м (а); при $H_1 = 5$ м и $H_1 = 11$ м (б) (линия, отмеченная кружками)

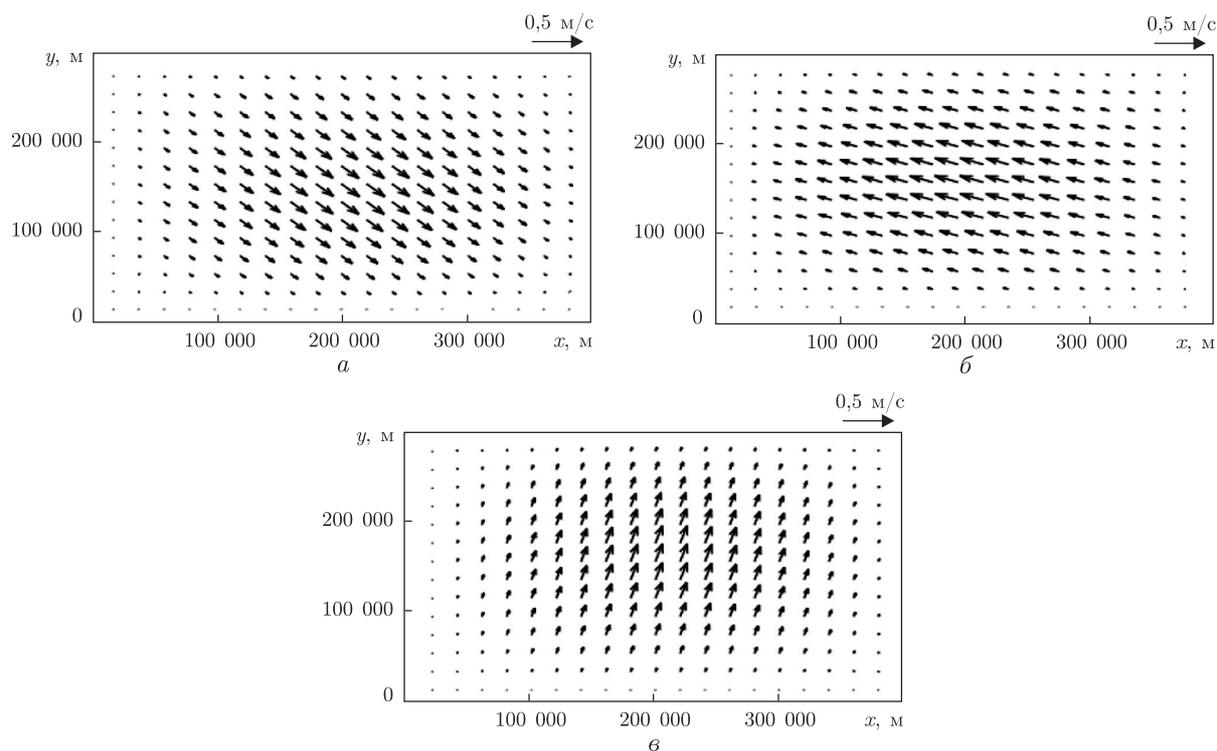


Рис. 2. Поля скоростей стационарных течений, вызванных постоянным западным ветром скорости 10 м/с при глубине верхнего слоя $H_1 = 7$ м: а — на свободной поверхности ($z = 0$); б — на глубине раздела слоев ($z = H_1$); в — в придонном слое ($z = -H + 0,01$ м)

направления ветра на 45° вправо (см. *a* на рис. 2) в северном полушарии. При этом направление течений у дна (см. *b* на рис. 2) противоположно их направлениям в поверхностном слое.

1. *Blumberg A. F., Mellor G. L.* A description of three dimensional coastal ocean circulation model in Three-Dimensional Coast Ocean Models // *Coast. Estuar. Sci.* – 1987. – 4. – P. 1–16.
2. *Фолин В. В.* Численная модель циркуляции вод Азовского моря // *Науч. тр. УкрНИГМИ.* – 2002. – Вып. 249. – С. 246–255.
3. *Черкесов Л. В., Иванов В. А., Хартиев С. М.* Введение в гидродинамику и теорию волн. – Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 1992. – 264 с.
4. *Компаниец Л. А., Якубайлик Т. В., Гаврилова Л. В., Гуревич К. Ю.* Модели экмановского типа в задачах гидродинамики. – Новосибирск: Наука, 2007. – 156 с.
5. *Иванов В. А., Черкесов Л. В., Шульга Т. Я.* Динамические процессы и их влияние на распространение и трансформацию загрязняющих веществ в ограниченных морских бассейнах. – Севастополь: НПЦ ЭКОСИ-Гидрофизика, 2010. – 178 с.
6. *Мамаев О. И.* Термохалинный анализ вод Мирового океана. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1987. – 338 с.
7. *UNESCO technical papers in marine science // UNESCO.* – 1988. – 54. – 86 p.
8. *Гидрометеорологический справочник Азовского моря.* – Ленинград: Гидрометеиздат, 1962. – 247 с.
9. *Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т. 5: Азовское море.* – Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 1991. – 234 с.

*Морской гидрофизический институт
НАН Украины, Севастополь*

Поступило в редакцию 19.03.2013

Т. Я. Шульга

Дослідження стаціонарного руху стратифікованої рідини, викликаного дією вітру в Азовському морі

На підставі аналітичного розв'язання задачі вітрового стаціонарного руху в'язкої двошарової рідини вивчено двовимірні течії, які спричинюються дією постійного вітру в Азовському морі. Встановлено залежності зміни швидкості рідини при зниженні температури верхнього і нижнього шарів, а також із зростанням глибини верхнього шару. Отриманий розв'язок дозволяє оцінити положення площини розділу двох шарів в Азовському морі та є тестом для математичних розрахунків течій двошарової рідини.

T. Ya. Shul'ga

Study of stationary currents of a stratified fluid caused by wind in the Sea of Azov

Based on the analytical solution of the problem of steady motion of a viscous two-layer fluid, the currents caused by a constant wind in the Sea of Azov are studied. The dependences of changes of the speed of the fluid at a variation in the temperatures of the upper and lower layers and at the increase of the top layer depth are established. The solution allows us to estimate the position of the plane of separation of the two layers in the Sea of Azov and is a test for the numerical calculations of currents in the two-layer fluid.