УДК 517.98

Член-кореспондент НАН України **М. Л. Горбачук, В. М. Горбачук**

# Зображення груп лінійних операторів у банаховому просторі степеневими рядами

*Для довільної $C_0$-групи та аналітичної $C_0$-півгрупи лінійних операторів у банаховому просторі встановлюється існування щільної у цьому просторі множини, на елементах якої задану групу або півгрупу можна зобразити у вигляді степеневого ряду для експоненти від її генератора. Даються умови, за яких цей степеневий ряд є цілою оператор-функцією експоненціального типу.*

Нехай $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ — $C_0$-півгрупа лінійних операторів у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, тобто:

(i) $\forall\, t,\ s \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)\colon U(t+s) = U(t)U(s)$;

(ii) $U(0) = I$ ($I$ — одиничний оператор в $\mathfrak{B}$);

(iii) $\forall\, x \in \mathfrak{B}\colon U(t)x \to x$ при $t \to 0$.

Якщо сім'я лінійних операторів $U(t)$ в $\mathfrak{B}$, задана на всій дійсній осі $\mathbb{R}$, задовольняє умови (i)–(iii) на $\mathbb{R}$, то $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ визначає $C_0$-групу.

Позначимо через $A$ генератор півгрупи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$):

$$Ax = \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t}, \qquad \mathcal{D}(A) = \left\{x \in \mathfrak{B} \mid \exists \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t}\right\}$$

($\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора).

Як відомо, оператор $A$ замкнений і $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$. Він є неперервним тоді і тільки тоді, коли $U(t) \to I$ ($t \to 0$) в рівномірній операторній топології. У цьому випадку

$$\forall\, x \in \mathfrak{B} : U(t)x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k A^k x}{k!} \tag{1}$$

і $U(t)$ допускає продовження до цілої $\mathfrak{B}$-значної функції експоненціального типу.

Якщо ж оператор $A$ не є неперервним, то постають такі питання:

1. Чи існує щільний в $\mathfrak{B}$ підпростір $\mathfrak{B}_1$ такий, що рівність (1) здійснюється для кожного $x \in \mathfrak{B}_1$?

2. Чи знайдеться в $\mathfrak{B}$ підпростір $\mathfrak{B}_0$, щільний в $\mathfrak{B}$ і такий, що для будь-якого $x \in \mathfrak{B}_0$ вектор-функція $U(t)x$ є цілою експоненціального типу?

Перше питання тісно пов'язане з проблемою розв'язності задачі Коші для рівняння $y'(t) = Ay(t)$ у різних класах аналітичних вектор-функцій, а друге — з можливістю наближеного розв'язання цієї задачі методом степеневих рядів. Нижче ці проблеми розглядаються у випадках, коли $A$ є генератором $C_0$-групи або аналітичної $C_0$-півгрупи лінійних операторів в $\mathfrak{B}$.

**1.** Нехай $A$ — довільний замкнений, щільно заданий в $\mathfrak{B}$ лінійний оператор. Множину таких операторів позначимо через $E(\mathfrak{B})$, а через $L(\mathfrak{B})$ — множину всіх обмежених на $\mathfrak{B}$

лінійних операторів. Вектор $x \in C^{\infty}(A) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ називається цілим для оператора $A$, якщо ряд у правій частині (1) збігається в $\mathbb{C}$. Очевидно, що $x \in C^{\infty}(A)$ є цілим вектором оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ тоді і тільки тоді, коли

$$\forall\, \alpha > 0 \qquad \exists\, c = c(x) > 0\colon \quad \|A^n x\| \leqslant c\alpha^n n^n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N})$$

(скрізь у подальшому під $c$ розумітимемо сталу, відповідну до розглядуваної ситуації). Для оператора $A \in L(\mathfrak{B})$ будь-який вектор $x \in \mathfrak{B}$ є цілим. Що ж до необмежених операторів, то серед них є такі, для яких жоден вектор, відмінний від нульового, не є цілим.

Будемо говорити, що цілий вектор $x$ оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ має скінченний порядок, якщо існує число $\gamma \in (-\infty, 1)$ таке, що, починаючи з деякого номера $n_0 = n_0(x)$,

$$\forall\, n \geqslant n_0\colon \quad \|A^n x\| \leqslant n^{n\gamma}.$$

Точну нижню межу $p(x)$ таких $\gamma$ назвемо порядком вектора $x$. Тип $s(x)$ вектора $x$ порядку $p(x)$ визначається як

$$s(x) = \inf\{\alpha > 0\colon \|A^n x\| \leqslant \alpha^n n^{p(x)} \ (n \geqslant n_0)\}.$$

Вважатимемо, що цілий вектор $x$ оператора $A$ порядку $p(x)$ має мінімальний тип, якщо $s(x) = 0$, нормальний — за умови, що $0 < s(x) < \infty$, і максимальний — при $s(x) = \infty$.

Для числа $\beta$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) \qquad \text{при} \qquad 0 \leqslant \beta < 1;$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \bigcap_{\alpha > 0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) \qquad \text{при} \qquad 0 < \beta \leqslant 1,$$

де

$$\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \mid \exists\, c = c(x) > 0\colon \|A^n x\| \leqslant c\alpha^n n^{n\beta} \ (n \in \mathbb{N}_0)\} \;—$$

банахів простір відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)} = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\|A^n x\|}{\alpha^n n^{n\beta}}.$$

Якщо $x$ — цілий вектор оператора $A$ порядку $p$ і скінченного типу, то $x \in \mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$. Елементи простору $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ називаються цілими векторами експоненціального типу оператора $A$.

У просторах $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ вводиться топологія індуктивної та, відповідно, проективної границі просторів $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$ (див [1, 2]):

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha \to \infty} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A), \qquad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha \to 0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A).$$

Зауважимо, що простір $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ є регулярною індуктивною границею, а тому послідовність $x_n \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ збігається до $x$ у цьому просторі тоді і тільки тоді, коли існує $\alpha > 0$ таке, що $x_n \in \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$ і $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ у цьому банаховому просторі. Збіжність у просторі $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ рівносильна збіжності в $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$ для довільного $\alpha > 0$.

$\mathfrak{B}$-значна вектор-функція $f(\lambda)$ називається цілою в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ ($\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$), якщо вона є цілою у банаховому просторі $\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)$ з деяким (будь-яким) $\alpha$. Для оператора $A \in L(\mathfrak{B})$ маємо $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \mathfrak{B}$.

У конкретному випадку, коли $\mathfrak{B} = C([a,b])$, $-\infty < a < b < \infty$, а

$$Ax(t) = x'(t), \qquad \mathcal{D}(A) = C^1([a,b]),$$

$C^{\infty}(A)$ є не що інше, як множина всіх нескінченно диференційовних на $[a,b]$ функцій, $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ ($\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$) — простір усіх неперервних на $[a,b]$ функцій, що допускають продовження до цілих (цілих експоненціального типу) функцій.

**2.** У даному вище прикладі простір $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ є щільним в $C([a,b])$. Але це, взагалі кажучи, не так у випадку довільного замкненого $A$. Неважко навести приклад оператора $A \in E(\mathfrak{B})$, для якого $\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \{0\}$. Проте якщо $A$ — генератор $C_0$-групи, то має місце таке твердження.

**Теорема 1.** *Нехай $A$ — генератор $C_0$-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в $\mathfrak{B}$. Тоді*

$$\forall\, \beta \in (0,1) : \overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}.$$

*За умови, що спектр $\sigma(A)$ оператора $A$ є дійсним і мажоранта його резольвенти $M(\delta) = \sup\limits_{|\mathrm{Im}\,\lambda|\geqslant\delta>0} \|R_\lambda(A)\|$ задовольняє умову Левінсона*

$$\int\limits_0^1 \ln\ln M(\delta)\, d\delta < \infty, \tag{2}$$

*маємо $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)} = \mathfrak{B}$.*

Будемо називати генератор $A$ $C_0$-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ неквазіаналітичним, якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|U(t)\|}{1+t^2}\, dt < \infty. \tag{3}$$

Як показано в [3], спектр неквазіаналітичного $A$ лежить на дійсній осі, а для його резольвенти виконується нерівність (2). Відмітимо також, що умова (3) є близькою до необхідної. Це підтверджує такий приклад.

П р и к л а д 1. Нехай $\mathfrak{B} = L_2(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt)$, де вимірна локально обмежена функція $\tau(t) \geqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$, задовольняє умови: 1) $\forall\, t,\, s \in \mathbb{R} : \tau(t+s) \leqslant \tau(t)\cdot\tau(s)$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\ln\tau(t)}{1+t^2}\, dt = \infty$. Тоді оператор

$$(Ax)(t) = -x'(t),$$

$$\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C(\mathbb{R}) \mid x(t) \text{ абсолютно неперервна і } x(t), x'(t) \in L_2(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt)\},$$

породжує $C_0$-групу $(U(t)x)(s) = x(s-t)$, для якої $\|U(t)\| \leqslant \tau(t)$. Покажемо, що для будь-якого $\alpha > 0$ $\mathfrak{G}^{\alpha}_0(A) = \{0\}$.

Припустимо, що це не так. Тоді існують $\alpha > 0$ та $0 \not\equiv x(t) \in L_2(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt)$ такі, що $x \in \mathfrak{G}^{\alpha}_0(A)$, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^{(n)}(t)|^2\, dt \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^{(n)}(t)|^2\tau^2(t)\, dt < (c\alpha^n)^2 \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

а отже, $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ допускає продовження до цілої функції експоненціального типу. З нерівності $2\ln_+|x(t)| < |x(t)|^2$ випливає, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln_+|x(t)|}{1+t^2}\,dt < \infty,$$

звідки (див. [4, с. 315])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|x(t)||}{1+t^2}\,dt < \infty.$$

Покладемо тепер $y(t) = \tau(t)x(t)$. Оскільки

$$|y(t)|^2 = \exp\biggl(\frac{2(1+t^2)}{1+t^2}\ln|y(t)|\biggr) > \frac{2(1+t^2)}{1+t^2}\ln|y(t)| \geqslant \frac{\ln|y(t)|}{1+t^2} = \frac{\ln|x(t)|}{1+t^2} + \frac{\ln|\tau(t)|}{1+t^2},$$

то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt = \infty$, що суперечить включенню $x(t) \in L_2(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt)$.

Нагадаємо, що ціла вектор-функція $f(\lambda)$ має скінченний порядок росту, якщо для достатньо великих $|\lambda|$ виконується нерівність $\|f(\lambda)\| \leqslant \exp(|\lambda|^\gamma)$ з деяким $\gamma > 0$. Точна нижня межа $\rho = \rho(f)$ таких $\gamma$ називається порядком $f(\lambda)$. Під типом вектор-функції $f(\lambda)$ порядку $\rho$ розуміється число

$$\sigma(f) = \inf\{a > 0\colon \|f(\lambda)\| \leqslant \exp(a|\lambda|^\rho)\}.$$

Якщо $\sigma(f) = 0$, то тип $f(\lambda)$ вважається мінімальним, а при $0 < \sigma(f) < \infty$ — нормальним. Якщо ж $\rho(f) \leqslant 1$, то $f(\lambda)$ називається цілою вектор-функцією експоненціального типу.

Як зазначалося вище, у випадку, коли генератор $A$ $C_0$-групи ($C_0$-півгрупи) $U(t)$, $t \in \mathbb{R}(t \in \mathbb{R}_+)$ обмежений, вектор-функція $U(t)x$ є цілою експоненціального типу для довільного $x \in \mathfrak{B}$. Це, взагалі кажучи, не так, якщо $A$ не є обмеженим. Але для $C_0$-груп має місце

**Теорема 2.** *Нехай $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — $C_0$-група лінійних операторів в $\mathfrak{B}$ з генератором $A$. Для того щоб $U(t)x$ допускала продовження до цілої вектор-функції в $\mathfrak{B}$, необхідно і достатньо, щоб $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Вектор-функція $U(t)x$ є цілою скінченного порядку $\rho$ і нормального (мінімального) типу $\sigma$ тоді і тільки тоді, коли вектор $x$ є цілим для оператора $A$ порядку $p$ і нормального (мінімального) типу $s$, пов'язаних з $\rho$ і $\sigma$ співвідношеннями*

$$\rho = \frac{1}{1-p}, \qquad \sigma = \frac{(se)^\rho}{\rho e}.$$

*Більш того, якщо $x \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta \in (0,1]$ ($\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ з $\beta \in [0,1)$), то ряд у правій частині (1) збігається у просторі $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ ($\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$) в усій комплексній площині і визначає цілу вектор-функцію у цьому просторі.*

З теорем 1, 2 випливає, що для $C_0$-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ з генератором $A$ у просторі $\mathfrak{B}$ зазначена вище проблема, асоційована з питанням 1, завжди має розв'язок, а $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ — максимальний простір, на якому ця проблема є розв'язною, тобто, якщо ряд у правій частині (1) збігається для довільного $t \in \mathbb{R}_+$, то $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і його сума дорівнює $U(t)x$ для всіх $t \in \mathbb{C}$. Що стосується питання 2, то, як показує приклад 1, проблема, пов'язана з ним, не завжди є розв'язною — існують $C_0$-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, для яких вектор-функція $U(t)x$ є цілою експоненціального типу лише при $x = 0$. Але якщо $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ задовольняє умову (3), то є така множина $\mathfrak{B}_0\colon \overline{\mathfrak{B}_0} = \mathbb{B}$, а саме $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$, на елементах $x$ якої $U(t)x$ допускає продовження до цілої вектор-функції експоненціального типу.

**3.** Припустимо тепер, що $A$ — генератор $C_0$-півгрупи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Неважко навести приклад, коли множина тих $x \in \mathcal{D}(A)$, на якій ряд в (1) збігається до $U(t)x$ на $\mathbb{R}_+$, складається лише з нуля. Проте якщо $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ є аналітичною, відповідь на питання 1 є позитивною.

Нагадаємо (див. [5]), що $C_0$-півгрупа $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ називається аналітичною з кутом $\theta \in \in (0, \pi/2]$, якщо оператор-функція $U(t)$ визначена в секторі $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}\colon |\arg z| < \theta\}$, є аналітичною в цьому секторі і має там такі властивості:

1) $\forall\, z_1,\ z_2 \in S_\theta\colon U(z_1 + z_2) = U(z_1)U(z_2)$;

2) $\forall\, x \in \mathfrak{B}\colon U(z)x$ є аналітичною в $S_\theta$;

3) $\forall\, x \in \mathfrak{B}\colon \|U(z)x - x\| \to 0$ при $z \to 0$ у будь-якому замкненому підсекторі з $S_\theta$.

Аналітична з кутом $\theta$ півгрупа $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ називається обмеженою, якщо оператор-функція $U(z)$ є обмеженою в кожному секторі $S_\varphi$ з $\varphi < \theta$.

**Теорема 3.** *Нехай $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ — обмежена аналітична $C_0$-півгрупа з кутом $\theta \leqslant \pi/2$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ і $A$ — її генератор. Тоді $\overline{\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)} = \mathfrak{B}$ для довільного $\gamma > 1 - 2\theta/\pi$. У випадку, коли $\theta = \pi/2$, існують обмежені аналітичні з кутом $\theta = \pi/2$ $C_0$-півгрупи, для яких $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{0\}$. Але за умови* (2) *маємо $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)} = \mathfrak{B}$.*

Ця теорема дає змогу сформулювати відповіді на поставлені вище запитання 1, 2 для аналітичних півгруп.

**Теорема 4.** *Нехай $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ — обмежена аналітична $C_0$-півгрупа з кутом $\theta \leqslant \pi/2$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ і $A$ — її генератор. Тоді відповідь на запитання 1 є позитивною, а саме $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, і цей простір є максимальним, на якому ряд у правій частині* (1) *збігається при $t \in \mathbb{R}$. Якщо $\theta = \pi/2$ і виконується умова* (2)*, тоді розв'язною є і проблема, пов'язана з питанням 2. У цьому випадку $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$.*

Варто зазначити, що умова (2), що фігурує у цій теоремі, є близькою до необхідної в тому розумінні, що існують аналітичні півгрупи з кутом $\theta = \pi/2$, для яких $\mathfrak{B}_0 = \{0\}$.

**4.** Зупинимося коротко на історичних аспектах розглянутих вище проблем.

Виходячи з формули Тейлора, Ж. Л. Лагранж (див. [6]) у 1772 р. записав формулу

$$x(t+s) = \exp\left(t\frac{d}{ds}\right)x(s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{t^n x^{(n)}(s)}{n!}, \tag{4}$$

в якій, як бачимо, група зсувів $U(t)x(s) = x(t+s)$ зображується у вигляді експоненти від її генератора — оператора диференціювання. І хоча формула (4) не була обгрунтована, він використовував її з великою майстерністю. Ця формула привела його до низки нових теорем, доведення яких важко собі уявити без її існування. Для осмислення ж цього результату у випадку довільного лінійного оператора $A$, тобто усвідомлення того, а що ж саме треба розуміти під $e^{tA}$, знадобилось майже два століття — і це стало одним із найважливіших досягнень математичного аналізу середини XX ст. Так, у випадку, коли $A$ — лінійний оператор у просторі $\mathfrak{B} = \mathbb{C}$, тобто $Ax = ax$, $a \in \mathbb{C}$, Л. Ейлер [7] (1728 р.) дав два визначення експоненти:

$$e^{ta} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(ta)^n}{n!} \qquad \text{та} \qquad e^{ta} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{at}{n}\right)^n.$$

У 1821 р. А. Л. Коші [8] дав означення $U(t) = e^{ta}$ як розв'язок функціонального рівняння

$$U(t+s) = U(t)U(s), \tag{5}$$

а точніше, встановив, що якщо $U(t)$ — неперервний розв'язок рівняння (5), то існує єдине $a \in \mathbb{C}$ таке, що $U(t) = e^{ta}$. У подальшому цей факт був поширений на випадок довільних оператора з $L(\mathfrak{B})$ і оператор-функції $U(t)$, неперервної в рівномірній операторній топології (див., наприклад, [5]). Що стосується $C_0$-груп і $C_0$-півгруп з необмеженим генератором, а саме вони найчастіше зустрічаються в задачах математичної фізики (прикладом є група зсувів у формулі Лагранжа), то М. Стоуном [9] (1932 р.) на основі операційного числення для самоспряжених операторів було встановлено, що сім'я $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ унітарних операторів у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ утворює $C_0$-групу тоді і тільки тоді, коли існує самоспряжений оператор $A$ в $\mathfrak{H}$ такий, що

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\colon U(t) = e^{itA} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda$$

($E_\lambda$ — розклад одиниці оператора $A$). Оскільки для самоспряженого оператора $A$ простори

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{E_\Delta x\colon x \in \mathfrak{H}, \Delta \text{ — компакт в } \mathbb{R}\} \qquad \text{та}$$

$$\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \left\{ x \in \mathfrak{H} \mid \forall\, \alpha > 0\colon \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\lambda}\, d(E_\lambda x, x) < \infty \right\}$$

є щільними в $\mathfrak{H}$, то, беручи до уваги теореми 3, 4, робимо висновок, що для довільної $C_0$-групи унітарних операторів в $\mathfrak{H}$ проблеми, асоційовані з питаннями 1, 2, вирішуються позитивно.

У зв'язку зі сказаним вище А. М. Колмогоров поставив задачу: довести для будь-якої $C_0$-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ лінійних операторів у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ існування щільної в $\mathfrak{B}$ множини $\mathfrak{B}_1$, на елементах якої ця група зображується рядом (1). У випадку, коли $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ є обмеженою, ця проблема була розв'язана І. М. Гельфандом [10]. Варто зазначити, що сформульована у п. 2 теорема 2 не тільки розв'язує поставлену задачу для довільної $C_0$-групи, але й описує максимальну множину $\mathfrak{B}_1$, на елементах якої ряд (1) збігається до $U(t)$ при $t \in \mathbb{R}$.

*Робота виконана за підтримки спільного українсько-російського проекту НАН України і Російського фонду фундаментальних досліджень (проект № 01/01-12).*

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – Москва: Физматгиз, 1959. – 684 с.
2. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – 347 p.
3. *Любич Ю. И., Мацаев В. И.* Об операторах с отделимым спектром // Мат. сб. – 1962. – **56**, № 4. – С. 433–468.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.
5. *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
6. *Lagrange J. L.* Nouvelle espèce de calcul // Nouveaux Mémoires de l'Académie Rouale des Sciences et Belles-Lettres. – 1772. – **3**. – P. 185–218.

7. *Euler L.* Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus // Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae. – 1728. – **3**. – P. 124–137.
8. *Cauchy A. L.* Cours d'Analise de l'Ecole Royale Polytechnique, première Partie Analyse Algébrique. – Paris, 1821. – 576 p.
9. *Stone M. H.* On one-parameter unitary groups in Hilbert space // Ann. Math. – 1932. – **33**. – P. 643–648.
10. *Гельфанд И. М.* Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве // Докл. АН СССР. – 1939. – **25**, № 9. – С. 713–718.

*Інститут математики НАН України, Київ*
*НТУ України "Київський політехнічний інститут"*

*Надійшло до редакції 29.03.2013*

Член-корреспондент НАН Украины **М. Л. Горбачук, В. М. Горбачук**

## Представление групп линейных операторов в банаховом пространстве степенными рядами

*Для произвольной $C_0$-группы и аналитической $C_0$-полугруппы линейных операторов в банаховом пространстве устанавливается существование плотного в этом пространстве множества, на элементах которого заданную группу или полугруппу можно представить в виде степенного ряда для экспоненты от ее генератора. Приводятся условия, при которых этот степенной ряд является целой оператор-функцией экспоненциального типа.*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. L. Gorbachuk, V. M. Gorbachuk**

## Representation of groups of linear operators on a Banach space by means of power series

*For an arbitrary $C_0$-group, as well as an arbitrary analytic $C_0$-semigroup of linear operators on a Banach space, the existence of a dense set in this space, on elements of which the given group or semigroup may be represented in the form of a power series for the exponential function of its infinitesimal generator, is established. The conditions are found, under which this power series determines an entire operator-function of exponential type.*