УДК 515.168.3

Д. В. Болотов

Топология плоских слоений коразмерности один

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Описана топологическая структура замкнутых ориентируемых многообразий, допускающих плоские трансверсально ориентируемые слоения коразмерности один.

Будем называть слоение $\mathcal{F}$ на римановом многообразии M *плоским*, если все слои $\mathcal{F}$ в индуцируемой метрике имеют нулевую секционную кривизну. Если секционная кривизна (кривизна Риччи) слоев неотрицательна, то $\mathcal{F}$ есть *слоение неотрицательной кривизны* (*неотрицательной кривизны Риччи*). Многообразие и слоение предполагаются минимум C^2-гладкими. В [1] автором были классифицированы все замкнутые трехмерные ориентируемые многообразия, допускающие трансверсально ориентируемые слоения неотрицательной кривизны. Мы покажем, что трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной кривизны на ориентируемом трехмерном многообразии плоское тогда и только тогда, когда многообразие является торическим расслоением или полурасслоением (теорема 4). Затем мы частично обобщим этот результат на многомерный случай (теорема 5).

Используя результаты [2] о структуре слоения в окрестности компактного слоя с абелевой голономией, автор доказал [3], что трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом многообразии является слоением почти без голономии. Это означает, что нетривиальной голономией могут обладать только компактные слои. Вместе с глубокими результатами С. П. Новикова [4] и Х. Иманиши [5] это позволило доказать следующую теорему, для формулировки которой напомним некоторые определения.

Насыщенным множеством слоеного многообразия M называется подмножество M, являющееся объединением слоев.

Подмножество $B \subset M$ многообразия M со слоением $\mathcal{F}$ коразмерности один назовем *блоком*, если B — насыщенное множество, являющееся многообразием с краем.

Блок B называется *собственным*, если все внутренние слои B некомпактны, диффеоморфны типичному слою L, и каждый слой $L \subset B$ является вложенным подмногообразием в B.

Блок B называется *плотным*, если все внутренние слои B диффеоморфны типичному слою L и всюду плотны в B.

Назовем блок B *исключительным*, если он гомеоморфен $K \times I$, где K является компактным слоем слоения, и слой $K \times 0$ является предельным для множества компактных слоев в B.

Теорема 1 [3]. *Пусть $\mathcal{F}$ — трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом римановом многообразии M. Тогда $\mathcal{F}$ является слоением почти без голономии и выполнена одна из следующих возможностей:*

1. Все слои всюду плотны и M является расслоением над S^1.

2. F содержит компактный слой и M можно разбить конечным числом компактных слоев на блоки одного из следующих типов:

A) исключительный блок;

B) плотный блок;

C) собственный блок.

Для B или C имеем:

$$\widetilde{\operatorname{int} B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

где L — типичный внутренний слой блока B. При этом фундаментальная группа B описывается групповым расширением

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \to 0. \tag{2}$$

Более того, $k \geqslant 1$ и $k = 1$ тогда и только тогда, когда блок собственный.

3. Если $\mathcal{F}$ — слоение неотрицательной секционной кривизны, то граница каждого блока имеет максимум две компоненты связности.

Говорят, что многообразие имеет *кокомпактную группу* изометрий, если оно содержит компактное подмножество, образ которого под действием группы изометрий заметает все многообразие. Нам понадобится следующий результат.

Теорема 2 [6]. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — слоеное полное риманово многообразие. Предположим, что существует изометрическое накрытие $p\colon \widehat{L} \to L$ слоя $L \overset{i}{\hookrightarrow} M$, имеющее кокомпактную группу изометрий. Если $L' \subset \overline{L}$, то существует последовательность изометрий $g_i\colon \widehat{L} \to \widehat{L}$ такая, что последовательность отображений $i \circ p \circ g_i\colon \widehat{L} \to M$ сходится равномерно на компактных множествах к отображению $f\colon \widehat{L} \to M$, чей образ является слоем L', а индуцированное отображение на образ $p'\colon \widehat{L} \to L'$ является изометрическим накрытием.*

Плоские слоения на трехмерных многообразиях. В [1] автору удалось классифицировать все ориентируемые замкнутые многообразия, допускающие трансверсально ориентируемые слоения неотрицательной кривизны. Для формулировки результата приведем некоторые определения.

Скрученным I-расслоением над бутылкой Клейна называется единственное, с точностью до послойного гомеоморфизма, ориентируемое многообразие с краем, гомеоморфное тотальному пространству расслоения над бутылкой Клейна со слоем отрезок.

Торическое полурасслоение — это многообразие, полученное склейкой по общей границе двух скрученных I-расслоений над бутылкой Клейна.

Призматическое пространство — это сферическая форма, двулистно накрываемая линзовым пространством, допускающая ровно две различные структуры расслоения Зейферта.

Теорема 3 [1]. *Пусть M^3 — гладкое замкнутое ориентируемое риманово многообразие размерности 3, а $\mathcal{F}$ — трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной кривизны коразмерности 1 на этом многообразии. Тогда M^3 гомеоморфно многообразию одного из следующих типов:*

1) торическое расслоение над окружностью;

2) торическое полурасслоение;

3) $S^2 \times S^1$;

4) $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$*;*

5) линзовое пространство $L_{p/q}$*;*

6) призматическое пространство.

Каждое из перечисленных многообразий для некоторой метрики допускает слоение неотрицательной кривизны.

Отметим, что пространство, стоящее под нечетным номером, двулистно накрывает пространство, стоящее под следующим четным номером.

Этот результат можно уточнить следующим утверждением.

Теорема 4. *Трансверсально ориентируемое слоение* $\mathcal{F}$ *коразмерности один неотрицательной кривизны на замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии* M *плоское тогда и только тогда, когда* M *есть торическое расслоение или полурасслоение.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — плоское слоение на M. Тогда M асферично (см. [7, 8]). В теореме 3 асферическим многообразиям отвечают только случаи *1* и *2*, поэтому M есть торическое расслоение или полурасслоение.

Теперь предположим, что слоение неотрицательной кривизны обладает слоем L, который не является плоским. Если L компактен, то из ориентируемости слоения[1] следует, что он гомеоморфен S^2. Тогда, по теореме стабильности Риба, M есть S^2-расслоение над S^1, следовательно, M не асферично. Если L некомпактен, то он гомеоморфен $\mathbb{R}^2$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^2} K ds < \infty$ (см. [9]). Это означает, что на бесконечности кривизна K стремится к нулю, так как K является ограничением непрерывной функции, заданной на компактном многообразии, и поэтому является равномерно непрерывной на L. Покажем, что L не может принадлежать плотному блоку. В этом случае к любой точке $x \in L$ сходится последовательность точек $x_k \in L$ (в M), принадлежащая некоторому трансверсальному отрезку, проходящему через x. Поэтому последовательность $\{x_k\}$ является замкнутым изолированным подмножеством в L, так как все точки принадлежат разным локальным слоям расслоенной координатной окрестности U_x. Отсюда следует, что $x_k \to \infty$, а $K(x_k) \to 0$. По непрерывности получаем, что $K(x) = 0$. А так как точка x взята произвольно, $K \equiv 0$. Следовательно, L — собственный слой, принадлежащий собственному блоку B (см. [1]). В этом случае, по теореме 1, B является расслоением над S^1 со слоем L. Так как L гомеоморфен $\mathbb{R}^2$, блок B гомотопически эквивалентен окружности. Из [4] следует, что B есть рибовская компонента. В [1] доказывается, что если $\mathcal{F}$ имеет рибовскую компоненту, то M получено склейкой либо двух полноториев, либо полнотория и скрученного I-расслоения над бутылкой Клейна. В любом случае мы получим одно из многообразий *3–6*, не являющееся асферическим. Осталось заметить, что торические расслоения и полурасслоения допускают плоские слоения [1]. Теорема доказана.

Плоские слоения на многообразиях большей размерности. Следующей теоремой мы обобщим некоторые свойства плоских слоений на случай большей размерности.

Теорема 5. *Пусть* $\mathcal{F}$ *— плоское трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один на замкнутом ориентируемом многообразии. Тогда выполнена одна из следующих возможностей.*

1. $\mathcal{F}$ *не содержит компактные слои. Тогда* $\mathcal{F}$ *является слоением без голономии со всюду плотными слоями, изометричными риманову произведению* $S \times E^k$*, а само многообразие гомеоморфно расслоению над* S^1*.*

[1] $\mathcal{F}$ ориентируемо, так как M ориентируемо, а $\mathcal{F}$ трансверсально ориентируемо.

2. $\mathcal{F}$ содержит компактные слои. Если $\dim M \geqslant 5$, то все компактные слои гомеоморфны между собой, а само многообразие или его двулистное накрытие гомеоморфно расслоению над окружностью со слоем, гомеоморфным компактному слою слоения.

Доказательство. Докажем п. *1* теоремы. Из теоремы 1 следует, что $\mathcal{F}$ есть слоение без голономии со всюду плотными слоями. В [4] доказывается, что все слои диффеоморфны типичному слою L и $\widetilde{M} \cong \widetilde{L} \times \mathbb{R}$. В этом случае имеется действие $\rho\colon \pi_1(M) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{R})$ фундаментальной группы $\pi_1(M)$ на $\mathbb{R}$, причем ядро этого действия совпадает с фундаментальной группой типичного слоя. В [6] доказывается, что почти все слои слоения неотрицательной кривизны со всюду плотными слоями являются римановым произведением души S (компактного вполне геодезического и вполне выпуклого подмногообразия) на евклидов фактор E^k. Пусть $L \overset{i}{\hookrightarrow} M$ такой слой. Заметим, что подгруппа параллельных переносов в $\mathrm{Iso}(L)$ кокомпактна в $\mathrm{Iso}(L)$. Так как L всюду плотен, то, по теореме 2, существует последовательность параллельных переносов $f_i\colon L \to L$ такая, что последовательность отображений $i \circ f_i\colon L \to M$ сходится равномерно на компактных множествах к отображению $f\colon L \to M$, чей образ является наперед заданным слоем L', а $f\colon L \to L'$ является изометрическим накрытием.

Всякий замкнутый путь $\phi\colon S^1 \to L$ свободно гомотопен любому замкнутому пути $f_k \circ \phi$. Последовательность путей $\{f_k \circ \phi\}$ сходится к замкнутому пути $f \circ \phi$, свободно гомотопному $f_k \circ \phi$ в M для больших k, так как для больших k отображение f_k близко к f. Поэтому существует гомотопия F_t, соединяющая замкнутые пути ϕ и $f \circ \phi$. Вспомним, что любое накрытие, в частности f, индуцирует мономорфизм $f_*\colon \pi_1(L, y_0) \to \pi_1(L', f(y_0))$ фундаментальных групп. Покажем, что на самом деле f_* — изоморфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму, индуцируемую включениями $i^L\colon L \to M$, $i^{L'}\colon L' \to M$ и накрытием $f\colon L \to L'$:

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(M, f(y_0)) & \pi_1(L', f(y_0)) \arrow[l, "i_*^{L'}"'] \\
\pi_1(L, y_0) \arrow[u, "\psi_\alpha i_*^L"] \arrow[ur, "f_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

где $\alpha\colon I \to M$ обозначает путь $F_t(y_0)$, а $\psi_\alpha\colon \pi_1(M, y_0) \to \pi_1(M, f(y_0))$ — изоморфизм фундаментальных групп, соответствующий пути α, который соединяет отмеченные точки y_0 и $f(y_0)$. Но $i_*^{L'}(\pi_1(L', f(y_0)) = \psi_\alpha i_*^L(\pi_1(L, y_0)) \cong \mathrm{Ker}\,\rho$. Поэтому f_* — изоморфизм, а $f\colon L \to L'$ — изометрический диффеоморфизм.

Докажем п. *2*. Отметим, что для слоений коразмерности один неположительной кривизны, в частности для плоских слоений, гомоморфизм $i_*\colon \pi_1(L) \to \pi_1(M)$, индуцированный включением, инъективен для любого слоя L. Более того, оказывается, что $\widetilde{M}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, а слои поднятого слоения $\widetilde{\mathcal{F}}$ гомеоморфны $\mathbb{R}^{n-1}$ [7].

Из (1) следует, что всякий блок B имеет гомотопический тип $K(\pi, 1)$-пространства. Пусть $K \in \partial B$. Тогда имеем $\mathrm{cd}\,\pi_1(K) = n - 1$ и $\mathrm{cd}\,\pi_1(B) \geqslant \mathrm{cd}\,\pi_1(K)$, так как $i_*\colon \pi_1(K) \to$ $\to \pi_1(B)$ — мономорфизм, индуцированный вложением $i\colon K \to B$ (здесь $\mathrm{cd}\,G$ обозначает когомологическую размерность группы G). Отсюда $\mathrm{cd}\,\pi_1(B) = n - 1$, так как B является многообразием с краем, поэтому стягивается на $n-1$-остов.

Напомним, что PD-группой G называется группа с двойственностью Пуанкаре. На геометрическом языке это означает, что $K(G, 1)$ пространство гомотопически эквивалентно конечному CW — комплексу, чьи гомологии и когомологии удовлетворяют изоморфизму двойственности Пуанкаре. В частности G есть PD-группа, если G есть фундаментальная группа замкнутого многообразия.

Из работы [10] следует, что $\pi_1(B)$ является PD-группой, так как является расширением PD-группы посредством PD-группы (см. (2)) (заметим, что слой гомотопически эквивалентен своей душе [11]). Теорема Штребеля [12] гласит, что подгруппа Γ' бесконечного индекса PD-группы Γ имеет $\operatorname{cd}\Gamma' < \operatorname{cd}\Gamma$. Отсюда следует, что образ $i_*(\pi_1(K))$ является коконечной подгруппой в $\pi_1(B)$. На самом деле индекс $i_*(\pi_1(K))$ в $\pi_1(B)$ не превосходит двух, так как если он больше двух, то можно показать, что существует конечнолистное накрытие B с плоским поднятым слоением, являющееся блоком с более чем двумя компонентами связности границы, что противоречит п. *3* теоремы 1. Если i_* — изоморфизм фундаментальных групп, то $i\colon K \to B$ — гомотопическая эквивалентность. Поэтому число связных компонент ∂B равно двум, иначе мы имели бы $i_*(H_{n-1}(K)) = 0$ в $H_{n-1}(B)$ при том, что гомотопическая эквивалентность должна индуцировать изоморфизм групп гомологий, а из ориентируемости слоения следует, что $H_{n-1}(K) \neq 0$. Если число связных компонент ∂B равно двум, то $i_*\colon \pi_1(K) \to \pi_1(B)$ — эпиморфизм, так как в противном случае, как и выше, блок B имел бы конечнолистное накрытие с большим, чем два числом компонент связности границы. Но $i_*\colon \pi_1(K) \to \pi_1(B)$ — мономорфизм, как отмечалось в начале доказательства п. *2* теоремы, поэтому вложение $i\colon K \to B$ является гомотопической эквивалентностью. Мы заключаем, что индекс $i_*(\pi_1(K))$ в $\pi_1(B)$ равен двум тогда и только тогда, когда ∂B имеет одну компоненту связности. В этом случае B имеет двулистное накрытие с двумя компонентами связности границы, вложение каждой из которых в блок является гомотопической эквивалентностью.

Ф. Т. Фаррел и В. К. Хсианг доказали, что группа Уайтхеда $Wh(\pi_1(K)) = 0$ для любого замкнутого плоского риманова многообразия K [13]. Поэтому если B — блок с двумя компонентами связности границы, то по теореме об s-кобордизме $B \cong K \times I$ (см. [14], если $\dim K \geqslant 5$, и [15], если $\dim K = 4$). Отсюда при условии, что все блоки имеют две компоненты связности границы, M гомеоморфно расслоению над S^1 со слоем K. В случае, если имеется блок с одной компонентой связности границы, M можно представить в виде объединения двух блоков A и B, пересекающихся по компактному слою K. Из вышедоказанного следует, что $\pi_1(M) = \pi_1(A) *_{\pi_1(K)} \pi_1(B)$. В этом случае существует двулистное накрытие $\overline{M} \to M$, соответствующее подгруппе $\pi' \in \pi_1(M)$ индекса два, такое, что A и B поднимаются в $\overline{M}$ в блоки $\overline{A}$ и $\overline{B}$, имеющие две общие компоненты связности границы, каждая из которых гомеоморфна K. Поэтому все блоки в двулистном накрытии $\overline{M}$ гомеоморфны $K \times I$ и $\overline{M}$ является расслоением над S^1, что и требовалось доказать.

Автор выражает благодарность проф. А. А. Борисенко за внимание к работе.

1. *Болотов Д. В.* Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях // Мат. сб. – 2009. – **200**. – С. 3–16.
2. *Nishimori T.* Compact leaves with abelian holonomy // Tohoku Math. J. – 1975. – **27**. – P. 259–272.
3. *Болотов Д. В.* О структуре слоений коразмерности один неотрицательной кривизны // Тр. конф. “Актуальные проблемы современной математики, механики и информатики”, ХНУ им. В. Н. Каразина. – Харьков: Апостроф, 2011. – С. 324–331.
4. *Новиков С. П.* Топология слоений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1965. – **14**. – С. 249–278.
5. *Imanishi H.* Structure of codimension one foliations which are almost without holonomy // J. Math. Kyoto Univ. – 1976. – **313**, No 1. – P. 93–99.
6. *Adams S., Stuck G.* Splitting of non-negatively curved leaves in minimal sets of foliations // Duke Math. J. – 1993. – **71**. – P. 71–92.

7. *Stuck G.* Un analogoue feuillete du theoreme de Cartan–Hadamard // C. r. Acad. Sci. Paris. – 1991. – **313**. – P. 519–522.
8. *Болотов Д. В.* Об универсально равномерно стягиваемых слоениях коразмерности // Доп. НАН України. – 2010. – № 9. – С. 7–9.
9. *Kon-Fossen S.* Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen // Compos. Math. – 1935. – **2**. – P. 69–133.
10. *Bieri R.* Gruppen mit Poincaré-Dualität // Comment. Math. Helv. – 1972. – **47**. – P. 373–396.
11. *Cheeger G., Gromoll D.* On structure of complete manifolds of nonnegative curvature // Ann. Math. – 1972. – **96**. – P. 413–443.
12. *Strebel R.* A remark on subgroups of finite index in Poincaré duality groups // Comment. Math. Helv. – 1977. – **52**. – P. 317–324.
13. *Farrell F. T., Hsiang W. C.* The topological-Euclidean space form problem // Invent. Math. – 1978. – **45**. – P. 181–192.
14. *Милнор Дж.* Теорема об h-кобордизме. – Москва: Мир, 1969. – 114 с.
15. *Freedman M., Teichner P.* Teichner 4-manifold topology // Invent. Math. – 1995. – **122**, No 3. – P. 509–529.

Физико-технический институт низких температур
НАН Украины им. Б. И. Веркина, Харьков

Поступило в редакцию 04.02.2013

Д. В. Болотов

Топологія плоских шарувань ковимірності один

Описано топологічну структуру замкнених орієнтовних многовидів, що допускають плоскі трансверсально орієнтовні шарування ковимірності один.

D. V. Bolotov

Topology of flat codimension one foliations

We describe the topological structure of closed oriented manifolds admitting flat transversally oriented codimension one foliations.