УДК 517.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк, И. Л. Иванов**

О связной устойчивости трехмашинной энергетической системы при импульсных возмущениях

Найдены достаточные условия связной устойчивости трехкомпонентной энергосистемы с импульсами и запаздыванием в условиях наличия более мощного дополнительного генератора. Представлены оценки областей устойчивости в пространстве параметров системы.

Настоящая работа посвящена исследованию связной устойчивости трехмашинной энергосистемы при импульсных возмущениях с запаздыванием в условиях наличия эталонного генератора, который моделируется шинами постоянного напряжения. Применяемый нами подход для анализа устойчивости систем основан на некоторых результатах работ [1–4], в которых рассматриваются общие вопросы устойчивости импульсных систем, систем с последействием, устойчивости (в том числе связной) крупномасштабных систем, устойчивости систем с запаздыванием и импульсным воздействием.

Постановка и анализ устойчивости. Рассмотрим математическую модель энергосистемы, состоящую из трех генераторов в виде

$$M_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = P_{mi} - P_{ei}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где M_i — инерционная постоянная; P_{mi} — механическая мощность на валу машины; θ_i — угол поворота ротора i-го генератора относительно некоторой синхронной оси вращения; P_{ei} — активные мощности, определяемые с помощью соотношения

$$P_{ei} = E_iUY_{i,4}\sin x_i + \sum_{j=1}^{3} E_iE_jY_{ij}\sin(x_i - x_j),$$

где E_i — э. д. с. i-й машины; Y_{ii} — собственные проводимости машины; Y_{ij} — взаимные проводимости, причем $Y_{ij} = Y_{ji}$. Имеющиеся слагаемые $E_iUY_{i,4}\sin x_i$ соответствуют шинам постоянного напряжения с $U = E_4$. Модель с шинами постоянного напряжения может применяться при описании динамики энергосистемы, в которой один из генераторов системы имеет существенно большую мощность, чем все остальные [5].

Пусть $Q_{ij} = E_iE_jY_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3$, $P_{mi} = 0$ и $Q_i = E_iUY_{i,4}$, $i = 1, 2, 3$. Тогда уравнения (1) принимают вид

$$M_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = -Q_i\sin x_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\sin(x_i - x_j), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Предположим, что в математической модели трехмашинной энергосистемы учитываются импульсные возмущения и последействие в цепи обратной связи. В этом случае в общей постановке система принимает вид:

$$M_i\frac{d^2x_i}{dt^2} + D_i\frac{dx_i}{dt} = P_{mi} - P_{ei} + P_{\tau i}, \qquad t \geqslant t_0, \qquad t \neq t_k, \tag{3}$$

$$x_i(t_k) = I_{ki}(\mathbf{x}_i(\tau_k^-)), \tag{4}$$

$$\frac{dx_i}{dt}(\tau_k) = J_{ki}(\mathbf{x}_i(\tau_k^-)), \tag{5}$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \qquad t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0, \tag{6}$$

где $P_{\tau i} = \alpha_i \sin(k_i x_i(t - r))$, α_i, k_i, r — некоторые постоянные; $t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \infty$, $I_{ki}, J_{ki}, \varphi_i, \psi_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $I_{ki}(0) = J_{ki}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Из физических соображений будем считать, что в задаче (3)–(6) мгновенным изменениям подвержены только скорости. Положим также $P_{mi} = 0$, тогда система (3)–(5) приобретет вид

$$\begin{gathered}
M_i\ddot{x}_i + D_i\dot{x}_i + Q_i \sin x_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} \sin(x_j - x_i) + \alpha_i \sin k_i x_i(t - r),\\
t \in [t_0, +\infty), \qquad t \neq \tau_k, \qquad k \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3,\\
\dot{x}_i(\tau_k^+) = J_{ki}(\mathbf{x}_i(\tau_k)), \qquad k \in \mathbb{N}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Будем считать, что данная система имеет место при $E = E_f$. Общий случай системы будем подразумевать в виде:

$$\begin{gathered}
M_i\ddot{x}_i + D_i\dot{x}_i + Q_i \sin x_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} Q_{ij} \sin(x_j - x_i) + \alpha_i \sin k_i x_i(t - r), \qquad i = 1, 2, 3,\\
t \in [t_0, +\infty), \qquad t \neq \tau_k, \qquad k \in \mathbb{N},\\
\dot{x}_i(\tau_k^+) = J_{ki}(\mathbf{x}_i(\tau_k)), \qquad k \in \mathbb{N}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Замечание 1. В системе (7) импульсы не зависят от матрицы взаимосвязи, поскольку они лишены связей между системами.

После линеаризации получим систему

$$\begin{gathered}
M_i\ddot{x}_i + D_i\dot{x}_i + Q_i x_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} (x_j - x_i) + A_i x_i(t - r), \qquad i = 1, 2, 3,\\
t \in [t_0, +\infty), \qquad t \neq \tau_k, \qquad k \in \mathbb{N},\\
\dot{x}_i(\tau_k^+) = c_{1ki} x_i(\tau_k) + c_{2ki}\dot{x}_i(\tau_k), \qquad k \in \mathbb{N},
\end{gathered} \tag{9}$$

где c_{1ki}, c_{2ki} — некоторые действительные постоянные, $A_i = \alpha_i k_i$, $i = 1, 2, 3$, $k \in \mathbb{N}$.

С учетом линейного представления (9) матричную функцию Ляпунова будем брать в виде

$$\begin{gathered}
v_{ii}(\mathbf{x}_i) = M_i\dot{x}_i^2 + 2R_i\dot{x}_i x_i + Q_i x_i^2, \qquad i = 1, 2, 3,\\
v_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{1}{2} Q_{ij}(x_i - x_j)^2, \qquad i, j = 1, 2, 3, \qquad i \neq j.
\end{gathered} \tag{10}$$

Матрица-функция (10) используется для построения скалярной функции

$$V(\mathbf{x}) = \beta^T U(\mathbf{x})\beta, \qquad \beta \in \mathbb{R}^3_+. \tag{11}$$

Взяв в (11) вектор β единичным, получим функцию Ляпунова в виде

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3}(\dot{x}_i^2 + 2Rx_i\dot{x}_i + Q_ix_i^2) + \sum_{i=1}^{3}(x_i - x_j)^2.$$

Рассмотрим производную этой функции вдоль системы (9):

$$\left.\frac{dv(\mathbf{x})}{dt}\right|_{(9)} = \sum_{i=1}^{3}\Biggl(-D_i\dot{x}_i - Q_ix_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}(x_j - x_i) + A_ix_i(t-r)\Biggr) + 2R_i\dot{x}_i^2 +$$

$$+\frac{2R_i}{M_i}x_i\Biggl(-D_i\dot{x}_i - Q_ix_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}(x_j - x_i) + A_ix_i(t-r)\Biggr) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}(\dot{x}_j - \dot{x}_i)(x_j - x_i) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{3}((-D_i + R_i)\dot{x}_i^2 - \tilde{R}_iQ_ix_i^2 - \tilde{R}_iD_ix_i\dot{x}_i) + 2\sum_{i=1}^{3}x_i(t-r)(\dot{x}_i - \tilde{R}_ix_i) -$$

$$-2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}Q_{ij}x_i(x_i - x_j),$$

где введено обозначение $\tilde{R}_i = R_i/M_i$.

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$\sum_{i=1}^{3}A_ix_i(t-r)(\dot{x}_i + R_ix_i) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i^2}{M_i}x_i^2(t-r)}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}M_i(\dot{x}_i + R_ix_i)^2}.$$

Покажем далее, что выполняется оценка

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i^2}{M_i}x_i^2(t-r)}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}M_i(\dot{x}_i + R_ix_i)^2} \leqslant \max_{i=1,2,3}\frac{|A_1|}{\sqrt{Q_iM_i - R_i^2}}\sqrt{v(t)v(t-r)}. \tag{12}$$

Поскольку

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3}(M_i\dot{x}_i^2 + 2R_ix_i\dot{x}_i + Q_ix_i^2) + \sum_{i=1}^{3}(Q_ix_i - x_j)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{3}\Biggl(M_i\dot{x}_i^2 + 2R_ix_i\dot{x}_i + \frac{R_i^2}{M_i}x_i^2 + \Bigl(Q_i - \frac{R_i^2}{M_i}\Bigr)x_i^2\Biggr) \geqslant \sum_{i=1}^{3}\Bigl(Q_i - \frac{R_i^2}{M_i}\Bigr)x_i^2,$$

то

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|=1} \frac{v}{\sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{A_i}{M_i} x_i^2} = \inf_{\|\mathbf{x}\|=1} \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} \left(Q_i - \dfrac{R_i^2}{M_i}\right) x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{A_i}{M_i} x_i^2} = \min_{i=1,2,3} \frac{Q_i M_i - R_i^2}{A_i^2}$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{A_i^2}{M_i} x_i^2(t-r) \leqslant \max_{i=1,2,3} \frac{A_i^2}{Q_i M_i - R_i^2} v(t-r).$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{i=1}^{3} M_i(\dot{x}_i + \tilde{R}_i x_i)^2 \leqslant v.$$

Из этих двух неравенств следует неравенство (12).

Будем требовать, чтобы $\tilde{R}_i$ $i = 1, 2, 3$, были равны между собой и обозначим $\tilde{R}_i = \tilde{R}$.

Пусть $p(s) = (1+q)^2 s$, где $q > 0$ — некоторый параметр. Тогда при условии $v(t-r) \leqslant p(v(t))$ верным будет неравенство

$$\dot{v}(\mathbf{x})|_{(9)} \leqslant -2 \sum_{i=1}^{3} \left((D_i - R_i)\dot{x}_i^2 + \frac{R_i Q_i}{M_i} x_i^2 + \frac{R_i D_i}{M_i} x_i \dot{x}_i \right) +$$
$$+ 2(1+q) \max_{i=1,2,3} \frac{|A_i|}{\sqrt{Q_i M_i - R_i^2}} v - 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{3} \tilde{R} Q_{ij} (x_j - x_i)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{3} ((-D_i + \tilde{R} M_i + (1+q)\lambda M_i)\dot{x}_i^2 - \tilde{R}(D_i - 2(1+q)\lambda M_i) x_i \dot{x}_i -$$
$$- Q_i(\tilde{R} - (1+q)\lambda) x_i^2) - 2 \max\{0, (1+q)\lambda - \tilde{R}\} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{3} (x_j - x_i)^2,$$

где $\lambda = \max\limits_{i=1,2,3} \left(|A_i| / \left(M_i \sqrt{Q_i/M_i - \tilde{R}^2} \right) \right)$. Для отрицательной определенности этой квадратичной формы необходимо, чтобы

$$\tilde{R} - (1+q)\lambda > 0,$$

откуда следует равенство

$$\max\{0, (1+q)\lambda - \tilde{R}\} = 0.$$

Поэтому для полной производной функции Ляпунова будет иметь место оценка

$$\dot{v}(\mathbf{x})|_{(9)} \leqslant 2\sum_{i=1}^{3}((-D_i + \tilde{R}M_i + (1+q)\lambda M_i)\dot{x}_i^2 - \tilde{R}(D_i - 2(1+q)\lambda M_i)x_i\dot{x}_i - $$
$$- Q_i(\tilde{R} - (1+q)\lambda)x_i^2). \tag{13}$$

Для того чтобы существовало $q > 0$, при котором квадратичная форма (13) будет отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы эта форма была отрицательно определенной при $q = 0$. Получим условие отрицательной определенности этой формы в виде системы неравенств:

$$\begin{aligned} &\tilde{R}^2(D_i - 2\lambda M_i)^2 - 4(D_i - \tilde{R}M_i - \lambda M_i)Q_i(\tilde{R} - \lambda) < 0, \qquad i = 1,2,3,\\ &\tilde{R} > \lambda. \end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим дискретную часть системы. Требование $v(\tau_k + 0, \mathbf{x}(\tau_k + 0)) \leqslant v(\tau_k, \mathbf{x}(\tau_k))$, $k \in \mathbb{N}$, приводит к неравенству

$$\sum_{i=1}^{3}(M_i(c_{1ik}x_i + c_{2ik}\dot{x}_i)^2 + 2M_i\tilde{R}(c_{1ik}x_i + c_{2ik}\dot{x}_i)x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{3}(M_i\dot{x}_i^2 + 2M_i\tilde{R}\dot{x}_i x_i)$$

или, что то же самое, к неравенствам

$$(c_{2ik}^2 - 1)\dot{x}_i^2 + 2(c_{1ik}c_{2ik} + \tilde{R}(c_{2ik} - 1))x_i\dot{x}_i + 2(\tilde{R}c_{1ik} + c_{1ik}^2)x_i^2 \leqslant 0, \qquad i = 1,2,3.$$

Отрицательная полуопределенность этой формы имеет место в случае выполнения условий

$$\begin{aligned} &|c_{2ik}| \leqslant 1,\\ &-\tilde{R}^2(1 - c_{2ik})^2 - 2\tilde{R}c_{1ik}(1 - c_{2ik}) - c_{1ik}^2 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $i = 1,2,3$, $k \in \mathbb{N}$.

Если $c_{2ik} \neq 1$, то второе неравенство в (15) позволяет однозначно определить параметр $\tilde{R}$, поэтому условия (15) равносильны условиям

$$\begin{aligned} &|c_{2ik}| \leqslant 1,\\ &\tilde{R} = -\frac{c_{1ik}}{1 - c_{2ik}}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $i = 1,2,3$, $k \in \mathbb{N}$. Из (16) также следует, что величины $-c_{1ik}/(1 - c_{2ik})$ при разных значениях коэффициента i равны между собой. Случай $c_{2ik} = 1$, $c_{1ik} = 0$ соответствует отсутствию импульсов и, очевидно, удовлетворяет требованию $v(\tau_k + 0, \mathbf{x}(\tau_k + 0)) \leqslant v(\tau_k, \mathbf{x}(\tau_k))$. В этом случае на $\tilde{R}$ не налагаются ограничения. Если $c_{2ik} = 1$, но $c_{1ik} \neq 0$, то, как это видно из второго неравенства в (16), данное требование удовлетворяться не будет.

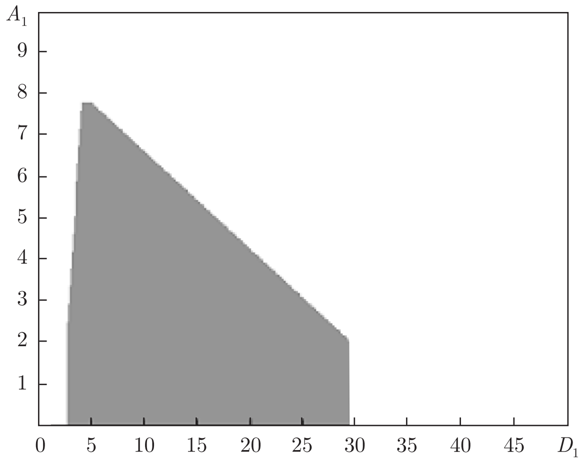

Рис. 1. Оценка области связной асимптотической устойчивости системы (8) в пространстве параметров D_1, A_1 при $A_2 = A_3 = 2$, $M_i = 1$, $Q_i = 20$, $i = 1,2,3$, $D_2 = D_3 = 5$, $c_{1ik} = -0{,}5$, $c_{2ik} = 0,5$, $i = 1,2,3$, $k \in \mathbb{N}$ и произвольных r, Q_{ij}, $i,j = 1,2,3$

Принимая во внимание неравенства (14), получим условия

$$\begin{aligned}
&\frac{c_{1ik}^2}{(1-c_{2ik})^2}(D_i - 2\lambda M_i)^2 - 4\left(D_i + \frac{c_{1ik}}{1-c_{2ik}}M_i - \lambda M_i\right)Q_i\left(-\frac{c_{1ik}}{1-c_{2ik}} - \lambda\right) < 0,\\
&-\frac{c_{1ik}}{1-c_{2ik}} > \lambda,\\
&|c_{2ik}| \leqslant 1,\\
&\frac{c_{11k}}{1-c_{21k}} = \frac{c_{12k}}{1-c_{22k}} = \frac{c_{13k}}{1-c_{23k}},\\
&i = 1,2,3, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad \lambda = \max_{i=1,2,3} \frac{|A_i|}{M_i\sqrt{\dfrac{Q_i}{M_i} - \dfrac{c_{1ik}^2}{(1-c_{2ik})^2}}}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, воспользовавшись методами доказательства теоремы 1 работы [6], можно установить, что система уравнений и неравенств (17) является достаточными условием асимптотической устойчивости системы (9), а значит, и системы (8) при фундаментальной матрице взаимосвязи.

Замечание 2. Если выполняются условия (17), то система (8) связно асимптотически устойчива, поскольку в эти условия устойчивости не входят параметры Q_{ij}.

Численное построение оценки области устойчивости и анализ результатов. Зафиксируем часть параметров и будем рассматривать устойчивость системы при помощи условий (17) в пространстве остальных параметров. А именно, пусть в системе (8) заданы следующие параметры: $A_2 = A_3 = 2$, $M_i = 1$, $Q_i = 5$, $i = 1,2,3$, $D_1 = D_2 = 5$, $c_{1ik} = -1$, $c_{2ik} = 0{,}5$, $i = 1,2,3$, $k \in \mathbb{N}$. Параметры r, Q_{ij}, $i,j = 1,2,3$, можно считать произвольными. Построение оценки области будет производиться в пространстве параметров D_1 и A_1. Область подана на рис. 1.

Отметим, что, согласно (17), зависимость условий устойчивости от импульсного воздействия выражается лишь в виде зависимости от параметра $\tilde{R} = -c_{2ik}/(1-c_{1ik})$, поэтому построенная для некоторого $\tilde{R}$ оценка области устойчивости будет также актуальной и при всех иных комбинациях параметров c_{1ik}, c_{2ik}, $i = 1, 2, 3$, $k \in \mathbb{N}$, которые соответствуют этому значению $\tilde{R}$.

Покажем, что границы всех этих оценок областей устойчивости являются кусочно-линейными. Рассмотрим сперва случай, когда $|A_i|$ и D_i не зависят от i. Предположим также, что от i не зависят константы M_i и Q_i. Обозначим $|A_i| = A$, $D_i = D$, $M_i = M$, $Q_i = Q$, $\mu = \lambda/A$. Пусть $\tilde{R} = -c_{2ik}/(1 - c_{1ik})$, тогда из условий (17) следует неравенство

$$\tilde{R}^2(4\mu^2A^2M^2 - 4\mu AMD + D^2) - 4Q(A^2\mu^2M - A\mu D + D\tilde{R} - \tilde{R}^2M) < 0,$$

$$-4A^2 + 4\frac{D}{M\mu}A + (D\tilde{R} - 2Q)^2 - 4\frac{Q}{M\mu^2} < 0,$$

откуда

$$A \in \left(-\infty, \frac{D}{2\mu M} - \frac{Q}{2M}|D - 2M\tilde{R}|\right) \bigcup \left(\frac{D}{2\mu M} + \frac{Q}{2M}|D - 2M\tilde{R}|, \infty\right). \tag{18}$$

Из (18) видно, что границы оценки области устойчивости являют собой линейную зависимость A_i от D_i.

Требование $\tilde{R} > \lambda$ приводит к исключению правого интервала в (18), и оценка области устойчивости приобретает связный вид, изображенный, например, на рис. 1.

Отметим, что граница оценки области на рис. 1 содержит в том числе прямолинейные участки, параллельные координатным осям: вертикальные и горизонтальный. Однако при нулевых значениях амплитуд A_2 и A_3 вертикальных участков уже нет, поэтому их существование следует связывать с фигурирующим в условиях устойчивости параметром λ. Кроме того, из проведенных анализов для промежуточных значений параметров A_2 и A_3 следует, что имеет место следующий характер исчезновения вертикальных участков при стремящихся к нулю параметрах A_2 и A_3. А именно, левый вертикальный участок постепенно смещается влево, а правый удаляется вправо на бесконечность.

Таким образом, из полученных результатов следует, что стабилизация энергетической системы с последействием при помощи демпфирования возможна лишь локально: начиная с определенных достаточно больших значений такая стабилизация оказывается невозможной.

Полученные оценки области устойчивости в пространстве параметров демпфирования и амплитуды запаздывания имеют вид полигонов. Такой характер этих оценок говорит о том, что возможным здесь является расширение использования аналитических методов исследований в сравнении с численными.

1. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных возмущениях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 308 с.
2. *Ribbens-Pavella M.* Transient stability of multimachine power systems by Lyapunov's direct method. – IEEE PES Winter Meeting. Conf. Paper. – New York, January–February, 1971. – P. 1–9.
3. *Pai M. A., Narayana C. I.* Stability of large scale power systems. – Proc. Sixth IFAC Congr., Boston, Mass., 1975. – P. 1–10.
4. *Jocič L., Ribbens-Pavella M., Šiljak D. D.* Multimachine power systems stability decomposition and aggregation // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1978. – **23**, No 2. – P. 325–332.
5. *Вайман М. Я.* Устойчивость нелинейных механических и электромеханических систем. – Москва: Машиностроение, 1981. – 126 с.

6. *Слынько В. И.* Об условиях устойчивости движения линейных импульсных систем с запаздыванием // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 6. – С. 130–138.

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 25.12.2012

Академік НАН України **А. А. Мартинюк, І. Л. Іванов**

Про зв'язну стійкість тримашинної енергетичної системи при імпульсних збуреннях

Знайдено достатні умови зв'язної стійкості трикомпонентної енергосистеми з імпульсами та запізненням в умовах наявності більш потужного додаткового генератора. Наведено оцінки областей стійкості у просторі параметрів системи.

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk, I. L. Ivanov**

On the connective stability of a three-machine energetic system with impulsive disturbances

The sufficient conditions for the connective stability of a three-machine energetic system with impulses and time-delay are found. The estimations of the stability regions in the space of parameters of the system are given.