УДК 517.95

О. А. Почекета

Групоїди еквівалентності узагальнених рівнянь Бюргерса

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

За допомогою перетворення Коула–Хопфа встановлено зв'язок між групоїдами еквівалентності класів лінеаризованих узагальнених рівнянь Бюргерса та класів відповідних лінійних рівнянь. Розглянуто групоїди еквівалентності класу узагальнених рівнянь Бюргерса з коефіцієнтом дифузії та його нормалізованих підкласів.

Об'єктом дослідження роботи є узагальнення відомого рівняння Бюргерса

$$u_t + uu_x + u_{xx} = 0, \tag{1}$$

отримані введенням одного або декількох довільних елементів — функцій від незалежних змінних. Знайдено групоїди еквівалентності кількох класів узагальнених рівнянь Бюргерса, зокрема найширшого класу рівнянь, які лінеаризуються до лінійних диференціальних рівнянь. Більшість елементів побудованої ієрархії класів узагальнених рівнянь Бюргерса є нормалізованими, що узгоджується з результатами [1].

Клас диференціальних рівнянь називають *нормалізованим*, якщо його групоїд еквівалентності породжено його групою еквівалентності [1]. *Групоїдом еквівалентності* класу диференціальних рівнянь називають множину допустимих перетворень у цьому класі з операцією композиції перетворень [2, с. 7]. *Допустиме перетворення* — це сукупність початкового рівняння, результуючого рівняння і відображення між ними.

Поняття нормалізованості класу диференціальних рівнянь природне і зручне для застосувань. Ієрархії нормалізованих підкласів виникають у процесі розв'язання задач групової класифікації. Кожне окреме диференціальне рівняння утворює нормалізований клас; будь-який клас усіх можливих рівнянь фіксованого порядку з наперед визначеною кількістю незалежних змінних також є нормалізованим.

Основні властивості нормалізованого класу такі: 1) розв'язання задачі повної групової класифікації для цього класу зводиться до його попередньої групової класифікації; 2) між випадками класифікаційного списку немає ніяких додаткових перетворень еквівалентності. Існують послаблення поняття нормалізованості. Наприклад, слабко нормалізовані класи мають першу з названих властивостей, але можуть втрачати другу; напівнормалізовані — навпаки (строгі визначення див. у [1, 2]). Усі класи в цій роботі нормалізовані у звичайному сенсі, якщо не вказано інше.

Щоб довести нормалізованість класу диференціальних рівнянь, потрібно порівняти його групу еквівалентності з його групоїдом еквівалентності. На практиці клас є нормалізованим, якщо в процесі розв'язання визначальних рівнянь для допустимих перетворень не виникає ніяких класифікуючих умов. Класифікуючою умовою називаємо визначальне рівняння, яке містить одночасно довільні елементи класу й параметри допустимих перетворень і призводить до розгалуження процесу розв'язання визначальних рівнянь.

Нормалізований надклас. Відомо, що t-компонента кожного точкового (і навіть контактного) перетворення між будь-якими двома фіксованими (1+1)-вимірними еволюційними рівняннями залежить тільки від t [3, 4]. Більш того, як доведено в [5, лема 2], будь-яке точкове перетворення між двома рівняннями з класу

$$u_t = F(t,x,u)u_{xx} + G(t,x,u,u_x), \tag{2}$$

де F і G — довільні гладкі функції своїх аргументів, $F \neq 0$, задовольняє умови

$$\widetilde{t} = T(t), \qquad \widetilde{x} = X(t,x), \qquad \widetilde{u} = U(t,x,u), \qquad T_t X_x U_u \neq 0. \tag{3}$$

Клас (2) є нормалізованим [5], причому будь-яке контактне перетворення між рівняннями з нього породжується деяким точковим перетворенням [6], але він занадто широкий для узагальнених рівнянь Бюргерса. Доцільно розглянути дещо вужчий клас рівнянь

$$u_t + F(t,x,u)u_{xx} + H^1(t,x,u)u_x + H^0(t,x,u) = 0, \tag{4}$$

де коефіцієнти F, H^1 і H^0 — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $F \neq 0$. Клас (4) є підкласом класу (2) і надкласом для усіх класів узагальнених рівнянь Бюргерса, що розглядаються у цій роботі. Таким чином, будь-яке перетворення між двома фіксованими рівняннями як з класу (4), так і з кожного його підкласу задовольняє обмеження (3).

Щоб знайти загальний вигляд допустимих перетворень для класу (4), запишемо рівняння з цього класу в тильдованих змінних: $\widetilde{u}_{\widetilde{t}} + \widetilde{F}\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}} + \widetilde{H}^1\widetilde{u}_{\widetilde{x}} + \widetilde{H}^0 = 0$. У цьому рівнянні замінимо $\widetilde{u}_{\widetilde{t}}$, $\widetilde{u}_{\widetilde{x}}$ та $\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}$ їхніми виразами в термінах нетильдованих змінних. Використавши підстановку $u_t = -Fu_{xx} - H^1u_x - H^0$, перейдемо на многовид, визначений початковим рівнянням. Результат розщепимо за u_{xx} та u_x і, розв'язавши визначальні рівняння, маємо

$$\begin{aligned}
&\widetilde{t} = T(t), \qquad \widetilde{x} = X(t,x), \qquad \widetilde{u} = U(t,x,u) = U^1(t,x)u + U^0(t,x),\\
&\widetilde{F} = \frac{X_x^2}{T_t}F, \qquad \widetilde{H}^1 = \frac{1}{T_t}\left(X_xH^1 + X_{xx}F - 2X_x\frac{U_x^1}{U^1}F + X_t\right),\\
&\widetilde{H}^0 = U^1H^0 + \frac{2U_xU_x^1}{T_tU^1}F - \frac{1}{T_t}(U_t + FU_{xx} + H^1U_x),
\end{aligned} \tag{5}$$

де $T = T(t)$, $X = X(t,x)$, $U^1 = U^1(t,x)$ та $U^0 = U^0(t,x)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $T_tX_xU^1 \neq 0$. Ніяких додаткових рівнянь (класифікуючих умов) на довільні елементи при цьому не виникає. Це означає, що всі допустимі перетворення в класі (4) породжуються перетвореннями з відповідної групи еквівалентності. Таким чином, клас (4) нормалізований.

Щоб знайти загальний вигляд допустимих перетворень будь-якого підкласу класу (4), достатньо надати відповідних значень довільним елементам F, H^1, H^0, $\widetilde{F}$, $\widetilde{H}^1$ та $\widetilde{H}^0$.

Лінеаризовані узагальнені рівняння Бюргерса. Розглянемо найширший клас узагальнених рівнянь Бюргерса, які за допомогою перетворення Коула–Хопфа $u = 2v_x/v$ можна лінеаризувати до лінійних рівнянь вигляду

$$v_t + a(t,x)v_{xx} + b(t,x)v_x + c(t,x)v = 0, \tag{6}$$

де коефіцієнти a, b, c пробігають множину гладких функцій від (t,x), причому $a \neq 0$. Такий клас складається з рівнянь вигляду

$$u_t + au_{xx} + (au + a_x + b)u_x + \frac{1}{2}a_xu^2 + b_xu + f = 0, \tag{7}$$

де $f = 2c_x$. Вищезгадану лінеаризацію неявно представлено в [7, с. 102, вправа 3]. Клас (7) є підкласом класу (4), де довільні елементи визначено як $F = a$, $H^1 = au + a_x + b$ та $H^0 = a_x u^2/2 + b_x u + f$. Підставивши ці та відповідні тильдовані вирази у рівняння (5) і розщепивши результат за u, отримаємо загальний вигляд допустимих перетворень між двома рівняннями з класу (7):

$$\begin{aligned} &\tilde t = T(t), \qquad \tilde x = X(t,x), \qquad \tilde u = \frac{1}{X_x}u + U^0(t,x),\\ &\tilde a = \frac{X_x^2}{T_t}a, \qquad \tilde b = \frac{1}{T_t}(X_x b + X_{xx}a - X_x^2 U^0 a + X_t),\\ &\tilde f = \frac{f}{T_t} - \frac{(X_xU^0b)_x}{T_t} + \frac{(X_xU^0)^2 - 2(X_xU^0)_x}{2T_t}a_x + \frac{X_xU^0(X_xU^0)_x - (X_xU^0)_{xx}}{T_t}a -\\ &\qquad - \frac{(X_xU^0)_t}{T_t}, \end{aligned} \tag{8}$$

де $T = T(t)$, $X = X(t,x)$ та $U^0 = U^0(t,x)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів і $T_tX_x \neq 0$. При цьому не виникло ніяких класифікуючих умов, отже, перетворення (8) утворюють групу еквівалентності класу (7) і цей клас нормалізований.

Підібравши перетворення вигляду (8), довільні елементи класу (7) можна відкалібрувати до простих фіксованих значень. Спочатку покладемо $a = 1$, виконавши перетворення

$$\tilde t = t\,\operatorname{sign} a(t,x), \qquad \tilde x = \int \frac{dx}{\sqrt{|a(t,x)|}}, \qquad \tilde u = u.$$

Таким чином, отримаємо клас рівнянь вигляду

$$u_t + u_{xx} + (u+b)u_x + b_x u + f = 0, \tag{9}$$

де $b = b(t,x)$ і $f = f(t,x)$ — довільні гладкі функції. Кожне рівняння (9) пов'язане перетворенням Коула–Хопфа з лінійним рівнянням $v_t + v_{xx} + bv_x + \left(\frac{1}{2}\int f\,dx\right)v = 0$.

Групоїд еквівалентності класу (9) можна обчислити безпосередньо або за допомогою підстановки $a = \tilde a = 1$ у співвідношення (8). Він породжується перетвореннями

$$\begin{aligned} &\tilde t = T(t), \qquad \tilde x = \varepsilon\big(\sqrt{T_t}x + X^0(t)\big), \qquad \tilde u = \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{T_t}}u + U^0(t,x)\right),\\ &\tilde b = \varepsilon\left(\frac{b}{\sqrt{T_t}} + \frac{T_{tt}}{T_t^{3/2}}x + \frac{X_t^0}{\sqrt{T_t}} - U^0\right),\\ &\tilde f = \varepsilon\left(\frac{f}{T_t^{3/2}} - \frac{(U^0b)_x}{T_t} + \frac{U^0U_x^0}{\sqrt{T_t}} - \frac{U_t^0}{T_t} - \frac{U_{xx}^0}{T_t} - \frac{T_{tt}U^0}{2T_t^2}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

де $T = T(t)$, $X^0 = X^0(t)$ та $U^0 = U^0(t,x)$ — довільні гладкі функції, причому $T_t > 0$, $\varepsilon = \pm 1$. З цих самих перетворень складається і група еквівалентності, тому клас (9) нормалізований. Далі відкалібруємо довільний елемент $b = b(t,x)$ до нуля за допомогою перетворення

$$\tilde t = t, \qquad \tilde x = x, \qquad \tilde u = u + b, \qquad \tilde f = f - b_t - bb_x - b_{xx},$$

що призведе до найпростішої форми лінеаризованих узагальнених рівнянь Бюргерса, яка містить лише одну довільну гладку функцію $f = f(t, x)$:

$$u_t + u_{xx} + uu_x + f = 0. \tag{11}$$

Підставивши $b = \widetilde{b} = 0$ у співвідношення (10), знайдемо загальний вигляд допустимих перетворень між рівняннями вигляду (11):

$$\widetilde{t} = T(t), \qquad \widetilde{x} = \varepsilon\big(\sqrt{T_t}x + X^0(t)\big), \qquad \widetilde{u} = \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{T_t}}u + \frac{T_{tt}}{2T_t^{3/2}}x + \frac{X_t^0}{T_t}\right),$$

$$\widetilde{f} = \varepsilon\left(\frac{1}{T_t^{3/2}}f + \frac{3T_{tt}^2 - 2T_tT_{ttt}}{4T_t^{7/2}}x + \frac{X_t^0T_{tt} - X_{tt}^0T_t}{T_t^3}\right),$$

де $T(t)$ і $X^0(t)$ — довільні гладкі функції, причому $T_t > 0$ і $\varepsilon = \pm 1$. Клас (11) нормалізований. Кожне рівняння з цього класу пов'язане перетворенням Коула–Хопфа з лінійним рівнянням $v_t + v_{xx} + \left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int f dx\right)v = 0$.

Покажемо, що цим самим перетворенням Коула–Хопфа пов'язані й елементи групоїдів еквівалентності лінеаризованих та відповідних їм лінійних класів. Групоїд еквівалентності класу лінійних рівнянь (6) породжується перетвореннями

$$\begin{aligned}
&\widetilde{t} = T(t), \qquad \widetilde{x} = X(t,x), \qquad \widetilde{v} = V^1(t,x)v + V^0(t,x),\\
&\widetilde{a} = \frac{X_x^2}{T_t}a, \qquad \widetilde{b} = \frac{1}{T_t}\left(X_xb + X_{xx}a - \frac{2X_xV_x^1}{V^1}a + X_t\right),\\
&\widetilde{c} = \frac{1}{T_t}\left(c - \frac{V_x^1}{V^1}b + \frac{2(V_x^1)^2 - V^1V_{xx}^1}{(V^1)^2}a - \frac{V_t^1}{V^1}\right),
\end{aligned} \tag{12}$$

де $T = T(t)$, $X = X(t, x)$, $V^1 = V^1(t, x)$ та $V^0 = V^0(t, x)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, що задовольняють обмеження $T_tX_xV^1 \neq 0$ і класифікуючу умову

$$\left(\frac{V^0}{V^1}\right)_t + a\left(\frac{V^0}{V^1}\right)_{xx} + b\left(\frac{V^0}{V^1}\right)_x + c\frac{V^0}{V^1} = 0$$

(див. [8]). Це означає, що $v = V^0/V^1$ є розв'язком початкового рівняння (6). Група еквівалентності $G^{\sim}$ класу (6) складається з перетворень вигляду (12) з $V^0 = 0$. Клас (6) не нормалізований, але він напівнормалізований, тому що кожне перетворення вигляду (12) є композицією перетворення ліївської симетрії $\overline{v} = v + V^0/V^1$ початкового рівняння і деякого елемента з $G^{\sim}$, тобто перетворення вигляду (12) з $V^0 = 0$.

Відповідність між групоїдами (і групами) еквівалентності класів (6) і (7) встановлюється таким чином:

$$\widetilde{t} = t, \qquad \widetilde{x} = x, \qquad \widetilde{u} = 2\frac{\widetilde{v}_{\widetilde{x}}}{\widetilde{v}} = \frac{2}{X_x}\frac{V^1v_x + V_x^1v + V_x^0}{V^1v + V^0} = \frac{1}{X_x}\frac{(V^1u + 2V_x^1)v + 2V_x^0}{V^1v + V^0}.$$

Перетворення компоненти u записується в термінах (t, x, u) тільки при $V^0 = 0$. У цьому випадку воно має вигляд

$$\widetilde{u} = \frac{1}{X_x}u + \frac{2V_x^1}{X_xV^1}, \qquad \text{тобто} \qquad U^0 = \frac{2V_x^1}{X_xV^1}.$$

Обмеження на V^0 пов'язане із загальним виглядом перетворень з групи еквівалентності класу (6). Допустимі перетворення з $V^0 \neq 0$ у класі (6) не мають відповідників у групоїді еквівалентності класу (7). Таким чином, напівнормалізованість класу (6) лінійних рівнянь індукує нормалізованість класу (7) лінеаризованих рівнянь.

Узагальнені рівняння Бюргерса з довільним коефіцієнтом дифузії. Поклавши в (4) $F = f(t,x)$, $H^1 = u$ та $H^0 = 0$, отримаємо клас узагальнених рівнянь Бюргерса з довільним ненульовим гладким коефіцієнтом $f = f(t,x)$ при u_{xx}:

$$u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0. \tag{13}$$

Клас (13) розглянуто, наприклад, у [9, 10]. Зауважимо, що [9] — перша публікація, у якій вичерпно досліджено всі допустимі перетворення для певного класу диференціальних рівнянь. Група еквівалентності класу (13) скінченновимірна і складається з перетворень

$$\begin{aligned} &\tilde{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \qquad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta}, \\ &\tilde{u} = \frac{\kappa(\gamma t + \delta)u - \kappa\gamma x + \mu_1\delta - \mu_0\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \qquad \tilde{f} = \frac{\kappa^2}{\alpha\delta - \beta\gamma} f, \end{aligned} \tag{14}$$

де набір сталих $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \mu_0, \mu_1)$ визначений з точністю до ненульового множника, причому $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ і $\kappa \neq 0$. Вигляд цих перетворень можна вивести безпосередньо або за допомогою підстановки $F = f$, $\tilde{F} = \tilde{f}$, $H^1 = u$, $\tilde{H}^1 = \tilde{u}$ та $H^0 = \tilde{H}^0 = 0$ у співвідношення (5). Оскільки всі перетворення між будь-якими двома фіксованими рівняннями з (13) вичерпуються перетвореннями вигляду (14), клас (13) нормалізований.

Клас рівнянь вигляду

$$u_t + uu_x + (f(t,x)u_x)_x = 0, \tag{15}$$

де f пробігає множину ненульових гладких функцій від (t,x), допускає перетворення

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \varkappa\sqrt{|T_t|}x + X^0(t), \quad \tilde{u} = \varkappa\frac{\sqrt{|T_t|}}{T_t}u + \varkappa\frac{T_{tt}\sqrt{|T_t|}}{2T_t^2}x + \frac{X^0}{T_t}, \quad \tilde{f} = \varkappa^2 f, \tag{16}$$

де $\varkappa$ — довільна ненульова стала, а гладкі функції T та X^0 від t задовольняють рівняння

$$\varkappa\sqrt{|T_t|}\,T_{tt}f_x + 2T_tX_{tt} - 2T_{tt}X_t = 0. \tag{17}$$

На відміну від усіх попередніх класів, клас (15) не є нормалізованим. У той же час його підклас, виокремлений нерівністю $f_{xxx} \neq 0$, нормалізований. У цьому випадку рівняння (17), розщеплене за f_x, призводить до обмежень $X_{tx} = 0$ і $T_{tt} = 0$, і групоїд еквівалентності такого підкласу породжується перетвореннями

$$\tilde{t} = c_1^2 t + c_0, \qquad \tilde{x} = \varkappa c_1 x + c_2 t + c_3, \qquad \tilde{u} = \frac{\varkappa c_1 u + c_2 t + c_3}{c_1^2}, \qquad \tilde{f} = \varkappa^2 f,$$

де c_0, c_1, c_2, c_3 та $\varkappa$ — довільні сталі, причому $\varkappa c_1 \neq 0$. Вказані перетворення утворюють і групу еквівалентності цього підкласу.

Підклас класу (15), визначений обмеженням $f_{xxx}=0$, тобто $f=f^2(t)x^2+f^1(t)x+f^0(t)$, має ширший групоїд еквівалентності: всі допустимі перетворення в цьому підкласі мають вигляд (16), де функції $T=T(t)$ та $X^0=X^0(t)$ задовольняють систему

$$4T_tT_{tt}f^2+2T_tT_{ttt}-3T_{tt}^2=0, \qquad \frac{\varkappa}{2}\sqrt{|T_t|}\,T_{tt}f^1+T_tX^0_{tt}-T_{tt}X^0_t=0,$$

де $\varkappa$ — довільна ненульова стала. Хоча загальний розв'язок цієї системи параметризований довільними елементами f^1 і f^2 нелокально, тобто

$$T=\pm\int\left(C_2\int e^{-2\int f^2dt}\mathrm{d}t+C_1\right)^{-2}\mathrm{d}t+C_0,$$

$$X^0=-\frac{\varkappa}{2}\int T_t\int\frac{\sqrt{|T_t|}T_{tt}}{T_t^2}f^1dtdt+C_3T+C_4,$$

де $C_0,\ldots,C_4$ — довільні сталі, його структура однакова для всіх значень параметрів. Іншими словами, підклас, виділений з класу (15) обмеженням $f_{xxx}=0$, має нетривіальну узагальнену розширену групу еквівалентності і нормалізований відносно цієї групи. Означення та приклади узагальнених розширених груп еквівалентності див., наприклад, у [1,5,11–13].

Клас рівнянь $u_t+uu_x+f(t)u_{xx}=0$, який відрізняється від класів (13) і (15) тільки аргументами функції f і є перетином цих класів, нормалізований відносно групи еквівалентності (14) усього класу (13). Груповий аналіз цього класу проводився в [14, 15].

Таким чином, у роботі розглянуто групоїди еквівалентності ієрархії нормалізованих класів узагальнених рівнянь Бюргерса. Завдяки властивості нормалізованості групова класифікація для цих класів полегшується і може бути проведена з використанням алгебраїчного методу. Досить неочікуваним результатом виявилось існування кількох прикладів нормалізованих класів, групи еквівалентності яких є скінченновимірними.

Щодо зв'язку між класами лінеаризованих узагальнених рівнянь Бюргерса (7) і лінійних рівнянь (6), як і їхніх підкласів, через перетворення Коула–Хопфа, важливо підкреслити, що з огляду на принцип суперпозиції, який справедливий для розв'язків лінійних рівнянь, клас (6) має ширшу множину допустимих перетворень, ніж клас (7). Перетворення, пов'язані з лінійною суперпозицією, залежать від довільних елементів відповідного початкового рівняння. Цей факт порушує властивість нормалізованості класу (6), проте цей клас напівнормалізований. У той же час для лінеаризованих рівнянь не існує локальних перетворень, пов'язаних з лінійною суперпозицією, тому клас (7) нормалізований.

Автор висловлює подяку Р. О. Поповичу за консультації та допомогу в проведенні дослідження.

1. *Popovych R. O., Kunzinger M., Eshraghi H.* Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations // Acta Appl. Math. – 2010. – **109**, No. 2. – P. 315–359.
2. *Popovych R. O., Bihlo A.* Symmetry preserving parameterization schemes // J. Math. Phys. – 2012. – **53**. – 073102, 36 p.
3. *Kingston J. G., Sophocleous C.* On form-preserving point transformations of partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – **31**, No 6. – P. 1597–1619.
4. *Магадеев Б. А.* О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений // Алгебра и анализ. – 1993. – **5**, № 2. – С. 141–156.
5. *Ivanova N. M., Popovych R. O., Sophocleous C.* Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification // Lobachevskii J. Math. – 2010. – **31**, No 2. – P. 100–122.

6. *Popovych R. O., Samoilenko A. M.* Local conservation laws of second-order evolution equations // J. Phys. A: Math. Theor. – 2008. – **41**, No 36. – 362002. – 11 p.
7. *Forsyth A. R.* The theory of differential equations. Vol. 6. Theory of differential equations. Pt. 4. Partial differential equations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1906. – 304 p.
8. *Popovych R. O., Kunzinger M., Ivanova N. M.* Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations // Acta Appl. Math. – 2008. – **100**, No 2. – P. 113–185.
9. *Kingston J. G., Sophocleous C.* On point transformations of a generalised Burgers equation // Phys. Lett. A. – 1991. – **155**, No 1. – P. 15–19.
10. *Pocheketa O. A., Popovych R. O.* Reduction operators and exact solutions of generalized Burgers equations // Phys. Lett. A. – 2012. – **376**, No 45. – P. 2847–2850.
11. *Vaneeva O. O., Johnpillai A. G., Popovych R. O., Sophocleous C.* Enhanced group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **330**, No 2. – P. 1363–1386.
12. *Vaneeva O. O., Popovych R. O., Sophocleous C.* Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source // Acta Appl. Math. – 2009. – **106**, No 1. – P. 1–46.
13. *Vaneeva O. O., Popovych R. O., Sophocleous C.* Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – **396**, No 1. – P. 225–242.
14. *Doyle J., Englefield M. J.* Similarity solutions of a generalized Burgers equation // IMA J. Appl. Math. – 1990. – **44**, No 2. – P. 145–153.
15. *Wafo Soh C.* Symmetry reductions and new exact invariant solutions of the generalized Burgers equation arising in nonlinear acoustics // Int. J. Engrg. Sci. – 2004. – **42**, No 11–12. – P. 1169–1191.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 29.11.2012

А. А. Почекета

Группоиды эквивалентности обобщенных уравнений Бюргерса

С помощью преобразования Коула–Хопфа установлена связь между группоидами эквивалентности классов линеаризованных обобщенных уравнений Бюргерса и классов соответствующих линейных уравнений. Рассмотрены группоиды эквивалентности класса обобщенных уравнений Бюргерса с коэффициентом диффузии и его нормализованных подклассов.

O. A. Pocheketa

Equivalence groupoids of generalized Burgers equations

A relationship between equivalence groupoids of classes of linearized generalized Burgers equations with those of classes of associated linear equations is established by means of the Hopf–Cole transformation. The equivalence groupoid of a class of generalized Burgers equations with a diffusion coefficient and those of its normalized subclasses are considered.