

П. А. Миненко, Р. В. Миненко

Методы устойчивого решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на основе статистических критериев оптимизации

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Н. А. Якимчуком)

Экссесс и асимметрия распределения поля могут быть использованы в качестве критериев условной и безусловной оптимизации при решении обратных задач гравиметрии и магнитометрии итерационными методами. Использование их более эффективно для решения обратных задач при последовательном применении десятков или сотен итераций каждого метода в комбинациях как между собой, так и с другими методами. Продолжена разработка экстремально избирательных методов устойчивого решения обратных задач с оптимизацией по минимуму невязок поля или поправок к плотности при более сильных условиях о максимальных скачках плотности на границах слоев в блоках интерпретационной модели.

Известны фильтрационные методы устойчивого решения обратных задач (ОЗ) для измеренного с большими и дискретно распределенными по площади погрешностями гравитационного (g) или магнитного (Z) поля (ГП, МП) [1–4]. Одним из недостатков таких методов, основанных на критериях оптимизации (КО) по минимуму суммы квадратов (МСК) текущих невязок поля (НП) или поправок к физическим параметрам (ФП) горных пород, является то, что они сильно чувствительны к локально распределенным по площади погрешностям поля (ПП), обусловленным ошибками определения поправок Буге из-за локальных изменений плотности промежуточного слоя (для ГП) или изменениями рельефа местности (для ГП и МП). Эти погрешности известными методами не устраняются и не подавляются, а трансформируются в добавки к получаемым в процессе решения ОЗ реальным значениям аномальной плотности (АП) или интенсивности намагничивания (ИН) горных пород. В результате нами получено псевдорешение ОЗ с эквивалентным распределением АП или ИН, иногда очень далеким от их реального распределения в геологическом массиве (ГМ) [5, 6].

Другие статистические критерии, например сумма произведений ошибок поля на полезные сигналы (Rr) [2, 7] или произведение простых критериев [3], в решениях ОЗ на практике проверены только авторами в упрощенных модификациях [8]. Более сложные статистические критерии, например с использованием эксцесса E_k и асимметрии A_s распределения поля (РП), еще не применялись. Не исключено, что с их помощью можно подавить влияние существенной части распределенных ПП или создать более эффективные для этого методы, чтобы оценить точность решений ОЗ упомянутыми выше дисперсионными методами на основе НП и поправок к ФП: АП и ИН.

Целью настоящего сообщения является поиск новых критериев условной и безусловной оптимизации решений ОЗ с использованием эксцесса, асимметрии или их составляющих и проверка их эффективности на реальных полях.

Поставленная цель достигается тем, что в известном фильтрационном методе решения ОЗ [1, 2] (a – b на рис. 1) вместо КО F_r по текущим невязкам $r_{j,n+1}$ поля g_j или КО F_B по поправкам к ФП на $n + 1$ -й итерации используют КО по минимуму эксцесса E_k (см. z на

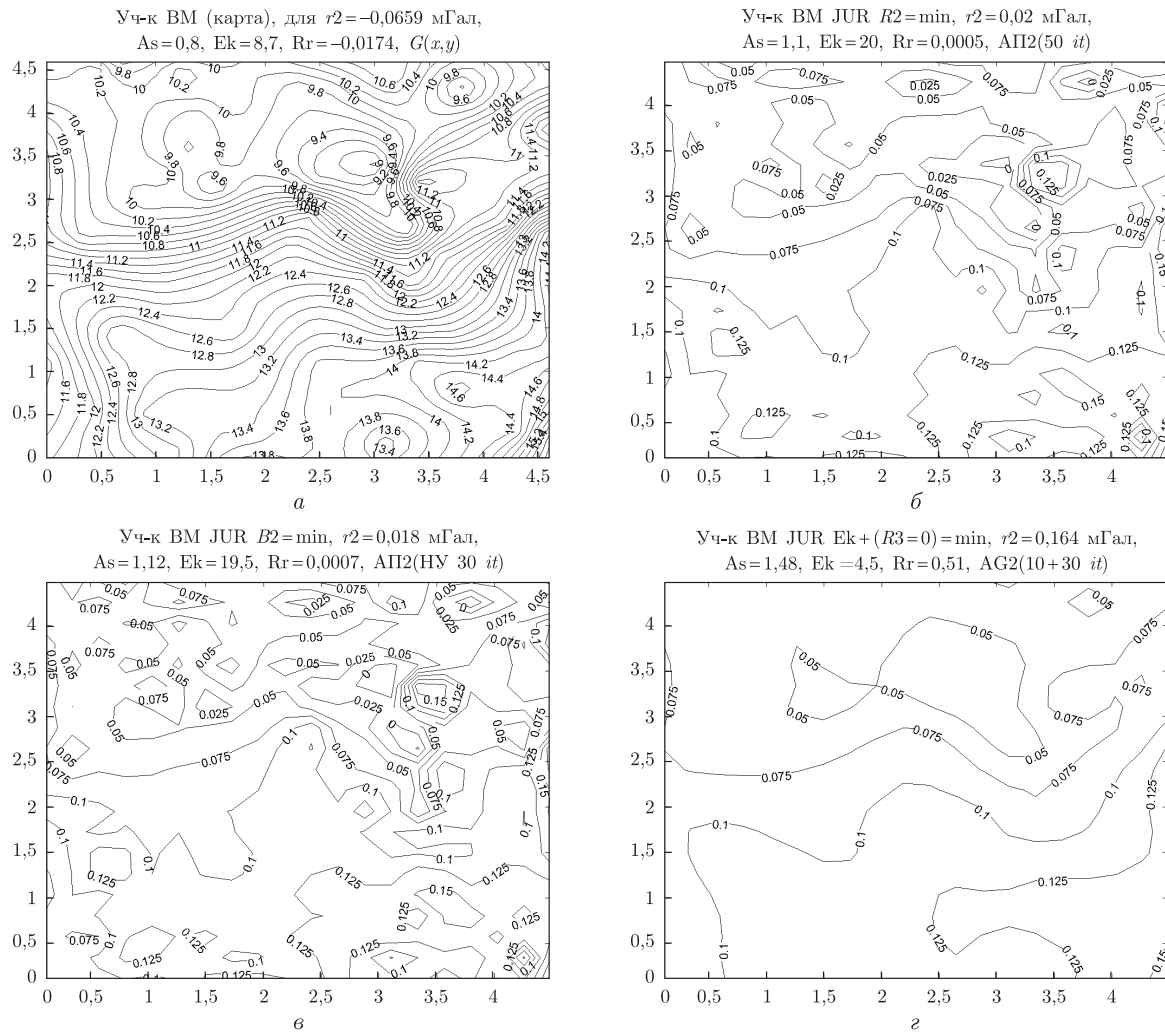


Рис. 1. Карта измеренного поля силы тяжести, 10^{-5} м/с² (а); б, в, г — результаты решения ОЗ гравиметрии: АП (здесь и далее, 10^3 кг/м³) 2-го слоя четырехслойной модели ГМ с применением КО, соответственно по НП, по поправкам к АП и по Ek при $As = 0$, начиная с общих для всех методов ПНУ

рис. 1). После выполнения всех преобразований запишем формулы, приведенные в новом методе:

$$F_r = (r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) = \min(\tau); \quad (1)$$

$$F_B = (B_{i,n+1}, B_{i,n+1}) = \min(\tau); \quad (2)$$

$$E_k = \frac{(r_{j,n+1}^2, r_{j,n+1}^2)}{(r_{j,n+1}, r_{j,n+1})^2} - 3 = \min(\tau), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} r_{j,n+1} &= r_{j,n} - \tau_{r,n+1} Z_{j,n}; & r_{j,n} &= (\sigma_{i,n}, a_{ij}) - g_j; \\ \sigma_{i,n+1} &= \sigma_{i,n} - \tau_{r,n+1} B_{i,n}; & B_{i,n} &= \left(r_{j,n}, \frac{a_{ij}}{\lambda_j \lambda_i} \right); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\lambda_i = (a_{ji}, 1)_j; \quad \lambda_j = (a_{ji}, 1)_i; \quad Z_{j,n} = (B_{i,n}, a_{ij});$$

$$(r, Z) = (r_{j,n}, Z_{j,n}); \quad F_z = (Z_{j,n}, Z_{j,n}) = (Z, Z); \quad \tau_{r,n+1} = \frac{(r, Z)}{F_z}; \quad (5)$$

$$B_{i,n+1} = B_{i,n} - \tau_{B,n+1} C_{i,n}; \quad C_{i,n} = \left(Z_{j,n}, \frac{a_{ij}}{\lambda_j \lambda_i} \right);$$

$$F_C = (C_{i,n}, C_{i,n}) = (C, C); \quad (C, B) = (B_{i,n}, C_{i,n}); \quad \tau_{B,n+1} = \frac{(C, B)}{F_C};$$

$$\tau_{E,n+1} = \frac{(r^3, Z)(r, r) - (r, Z)(r^2, r^2)}{3(r^2, Z^2)(r, r) - 2(r^3, Z)(r, Z) - (Z, Z)(r^2, r^2)}. \quad (6)$$

Здесь $B_{i,n}$ — итерационная поправка (ИП) к ФП $\sigma_{i,n}$; $Z_{j,n}$ — ИП к НП; $C_{i,n}$ — ИП к ФП; $\tau_{r,n+1}$ — оптимизирующий итерационный коэффициент (ИК) для итерационной формулы (4) и КО формулы (1) по невязкам $r_{j,n+1}$ поля на $n + 1$ -й итерации; $\tau_{r,n+1}$ — ИК для формулы (4) и КО формулы (2) по поправкам к ФП; $\tau_{E,n+1}$ — ИК для формулы (4) и КО формулы (3) по эксцессу E_k ; a_{ij} ($i = 1, M; j = 1, N$) — матрица решений прямой задачи для поля.

Из выражения (3) следует, что КО по эксцессу РП представляет собой частное от деления двух выпуклых функционалов с различной кривизной, которое варьирует больше, чем каждый отдельно взятый функционал, а поэтому может иметь от 1 до 5 экстремумов по ИК. Из рис. 1 следует, что соответствующее карте поля (см. *a* на рис. 1) распределение АП 2-го слоя четырехслойной интерпретационной модели ГМ, полученное с КО (1) по НП при произвольных начальных условиях (ПНУ) по АП (см. *b* на рис. 1), достигается через 350 итераций (*it*) (среднеквадратическая невязка поля (СКНП) $2 \cdot 10^{-7}$ м/с², асимметрия $As = 1,1$, эксцесс $Ek = 20,0$, $Rg = 5 \cdot 10^{-15}$ м²/с⁴ на 1 точку).

Примерно такое же распределение АП было получены с КО (2) и ИК (5) по поправкам к АП при почти тех же статистических параметрах (СП) вычислительного процесса (СКНП $1,94 \cdot 10^{-7}$ м/с², $As = 1,17$, $Ek = 20,6$, $Rg = 8,8 \cdot 10^{-14}$ м²/с⁴), но значительно быстрее — через 140 *it*. Еще через 70 *it* (см. *в* на рис. 1) при СКНП $1,8 \cdot 10^{-7}$ м/с², $As = 1,12$, $Ek = 19,5$, $Rg = 7 \cdot 10^{-14}$ м²/с⁴ получено значительно большее восстановление максимальной АП до $175 \cdot 10^3$ кг/м³, чем при КО (1). Но, минимизируя эксцесс (3), нами получены ИК (6) и конечное распределение АП всего лишь через 25 *it* (СКНП $5,3 \cdot 10^{-7}$ м/с², $As = 1,34$, $Ek = 15,0$, $Rg = 10^{-12}$ м²/с⁴), а на следующих итерациях ни АП, ни СП уже не изменялись, хотя в методах с применением КО (1) и (2) еще через 300 *it* СКНП уменьшились соответственно до $1,8 \cdot 10^{-7}$ и $1,4 \cdot 10^{-7}$ м/с² за счет трансформации ПП в АП или за счет недовосстановления плотности некоторых аномалий поля. В методе (11), (12) по минимуму Ek при условии $As = 0$ и ПНУ через 70 *it* (СКНП $1,64 \cdot 10^{-6}$ м/с², $As = 1,48$, $Ek = 4,5$, $Rg = 5,1 \cdot 10^{-11}$ м²/с⁴) эксцесс стал в 3,5 раза меньше, асимметрия осталась почти на прежнем уровне, а СКН и Rg получены значительно большими и могут быть уменьшены продолжением решения ОЗ другими итерационными методами в том числе с применением КО (1) и (2). Таким образом, решая ОЗ тремя методами нами установлено, что при КО (11) эксцесс достигает минимума, а плотность геологических массивов по измеренному полю силы тяжести до конца не восстановлена в сильно аномальных зонах (АЗ). На остальных участках изолинии АП $0,050 \cdot 10^3$, $0,075 \dots 0,150 \cdot 10^3$ кг/м³ на всех трех картах (см. *б-г* на рис. 1) практически полностью повторяются и находятся на одних и тех же местах.

Для продолжения решения воспользуемся методами условной оптимизации. Поставим условие минимума F_r или F_B при дополнительном условии: $As = 0$ или $Rr = 0$ [2, 3, 7]. Составим соответствующие каждой паре условий критерии условной оптимизации (КУО) (7)–(11), а затем запишем их с учетом обозначений (5) вместе с ИК, полученными для каждого метода:

$$F_{r,rR} = (r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) + \lambda((r_{j,n+1}, R_{j,n+1}) = 0) = \min(\tau); \quad (7)$$

$$\tau_{r,rR,n+1} = \frac{(Z, r) + \lambda(Z, R_g)}{(Z, Z)(1 + \lambda)}; \quad \lambda = -(\lambda_j, r)/(\lambda_j, R_g);$$

$$F_{B,rR} = (B_{i,n+1}, B_{i,n+1}) + \lambda((r_{j,n+1}, R_{j,n+1}) = 0) = \min(\tau); \quad (8)$$

$$\tau_{B,rR,n+1} = \frac{(B, C) + \lambda(Z, R_g)}{(C, C) + (Z, Z)\lambda}; \quad \lambda = -(B, 1)/(\lambda_j, R_g);$$

$$F_{r,rR} = (r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) + \lambda((r_{j,n+1}, r_{j,n+1}^2) = 0) = \min(\tau); \quad (9)$$

$$\tau_{r,r^3,n+1} = ((Z, r) + 1,5\lambda(Z, r^2))/((Z, Z) + 3\lambda(r, Z^2)); \quad \lambda = -(\lambda_j, r)/(\lambda_j, r^2)/1,5;$$

$$F_{B,r^3} = (B_{i,n+1}, B_{i,n+1}) + \lambda((r_{j,n+1}, r_{j,n+1}^2) = 0) = \min(\tau); \quad (10)$$

$$\tau_{B,r^3,n+1} = \frac{(B, C) + 1,5\lambda(Z, r^2)}{(C, C) + 3\lambda(r, Z^2)}; \quad \lambda = -(B, 1)/(\lambda_j, r^2)/1,5;$$

$$F_{E_k,rR} = E_{k,j,n+1} + \lambda((r_{j,n+1}, r_{j,n+1}^2) = 0) = \min(\tau); \quad (11)$$

$$\tau_{E_k,r^3,n+1} = ((Z, r^3)(r, r) - (r^2, r^2)(Z, r) + 0,75\lambda_1(Z, r^2)(r, r)^3)/$$

$$/(3(Z^2, r^2)(r, r) - 2(r^3, Z)(Z, r) - (Z, Z)(r^2, r^2) +$$

$$+ 1,5\lambda(r, r)^2((r, Z^2)(r, r) + 3(r^2, Z)(Z, r))); \quad (12)$$

$$\lambda_1 = -((\lambda_j, r^3)(r, r) - (\lambda_j, r)(r^2, r^2))/(\lambda_j, r^2)/(r, r)^3/0,75,$$

где $R_g = r_{j,n+1} + g_j/2$; λ, λ_1 — коэффициенты Лагранжа.

Любой из методов (3)–(12), начиная с ПНУ, окончательного решения ОЗ не дает. Для них нужно сначала получить задающее решение методами (1), (2). В методах (1), (2) при недостаточном количестве точек измерения поля итерационный процесс сходится значительно медленнее. Поэтому невозможно определить требуемое количество итераций для получения окончательного решения ОЗ. Методы оптимизации ОЗ на основе статистических критериев (экссесса, асимметрии и входящих в них формул) дают быстрый выход на постоянное значение среднеквадратичной невязки (остатков) поля после решения ОЗ за счет снижения поправок к ФП до нуля. Следовательно, целесообразно после выполнения нескольких десятков или сотен итераций методом (1) или (2) выполнить несколько десятков или сотен итераций, используя поочередно любые два-три метода из формул (3)–(16), как это следует из рис. 2. В качестве задающих также можно использовать несколько итераций методами (3) или (11). Применяя комбинацию методов (3), (8), (10) (см. а, б на рис. 2) и заканчивая интерпретацию экстремально избирательным методом (13) с оптимизацией по минимуму НП при максимальной плотности в блоках, получаем практически точно такое же решение ОЗ (см. в), как и решение ОЗ комбинацией аналогичных по структуре методов (3), (7), (9), но с остановкой через 210 *it* методом безусловной оптимизации (2) по

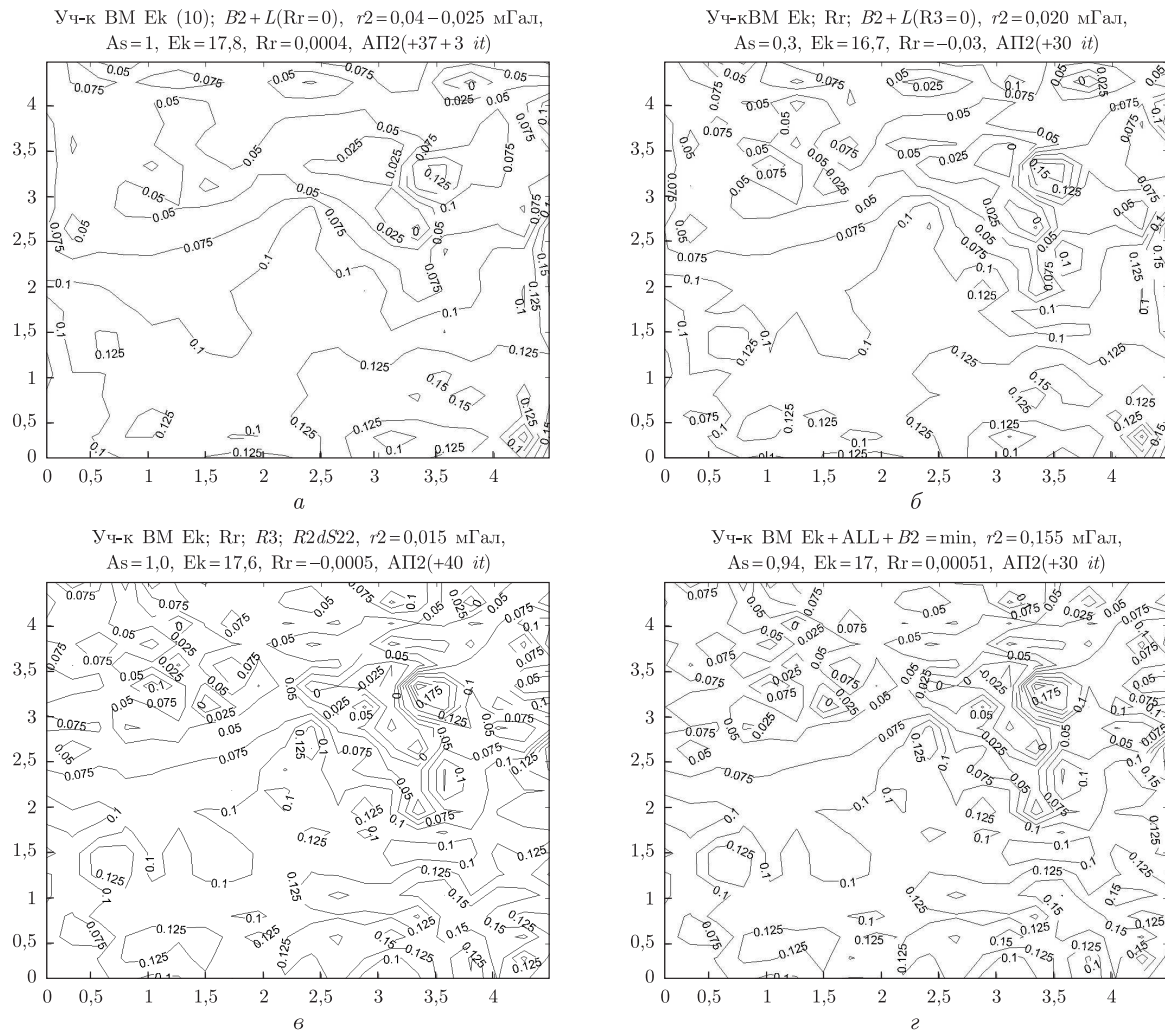


Рис. 2. Результаты решения ОЗ гравиметрии: АП для 2-го слоя четырехслойной МГМ с применением: *а* — 70 *it* с КО (3) + 263 *it* с КУО (8); *б* — с добавлением еще 210 *it* с КУО (10); *в* — с добавлением к ним еще 280 *it* с КУО (13) и ИК (15); *г* — с добавлением к промежуточному результату решения ОЗ (см. *б* на рис. 1) еще 210 *it* с КО (2)

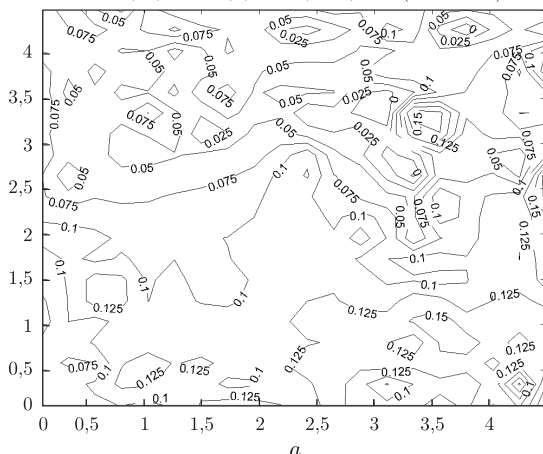
МСК поправок к плотности всех блоков (см. *г*), который быстро выхода на постоянное значение СНКП не имеет.

Используя полученные результаты, можно продолжить разработку приведенных в статье [8] экстремально избирательных методов по минимуму невязок поля или поправок к плотности при максимальной плотности в блоках интерпретационной модели (ИМ) или ее максимальных скачках на границах слоев ИМ. Возьмем из работы [8] формулы для КО экстремально избирательного направления и по аналогии с формулой (3) увеличим в них степень знаменателя с 1 до $n > 1$:

$$F_{r/\sigma^n} = \frac{(r_{j,n+1}, r_{j,n+1})}{(\sigma_{i,n+1}, \sigma_{i,n+1})^n} = \min(\tau); \quad (13)$$

$$F_{B/\sigma^n} = \frac{(B_{i,n+1}, B_{i,n+1})}{(\sigma_{i,n+1}, \sigma_{i,n+1})^n} = \min(\tau). \quad (14)$$

Уч-к ВМ Ek+(R3=0); B2dS22 = min, r2=0,0192 мГал,
As=1,17, Ek=20,5, Rr=0,0008, АП2(+30+10 it)



Уч-к ВМ B2(20); B2dS22(11); EkR3(40), R2S22(60),
r2=0,012 мГал, As=0,97, Ek=20,5, Rr=0,0003, АП2

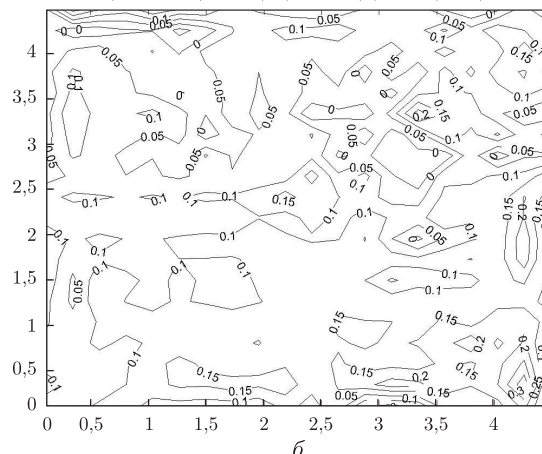


Рис. 3. Результаты решения ОЗ гравиметрии: АП для 2-го слоя четырехслойной МГМ с применением: *a* — 70 *it* с КУО (11) + 210 *it* с КО (14); *б* — 140 *it* с КО (2) с добавлением к ним еще 80 *it* с КО (14) и ИК (16), 210 *it* с КО (2), затем 280 *it* с КО (11) и ИК (12), 420 *it* с КО (13) и ИК (15), по 105 *it* с КО (1) и (2)

Для этих критериев ИК линеаризованных методов имеют вид

$$\tau_{r/\sigma^n, n+1} = \frac{(r, Z)(\sigma, \sigma) - n(\sigma, B)(r, r)}{(Z, Z)(\sigma, \sigma) - 2(n-1)(\sigma, B)(r, Z) - n(B, B)(r, r)}; \quad (15)$$

$$\tau_{B/\sigma^n, n+1} = \frac{(B, C)(\sigma, \sigma) - n(\sigma, B)(B, B)}{(C, C)(\sigma, \sigma) - 2(n-1)(\sigma, B)(B, C) - n(B, B)^2}. \quad (16)$$

Каждый из семейства методов (13), (14) заканчивается выходом на постоянное значение СКНП, хотя после его применения другой метод может продолжать снижение невязки поля. Методом с КО (14) после 70 *it* метода с КУО (11) получено решение ОЗ (см. *a* на рис. 3) для той же карты поля силы тяжести (см. *a* на рис. 1), которое закончилось через 210 *it* с выходом на постоянное значение СКНП, равное $1,92 \cdot 10^{-7}$ м/с², но при этом максимальные значения АП в АЗ не были достигнуты.

В результате применения еще более сложной комбинации методов (см. *б* на рис. 3) в АЗ получено такое же распределение АП, как и на рис. 2 (см. *в, г*), но на остальной части карты оно существенно изменилось и по форме изолиний, и по величине при значительно большем снижении СКНП до $1,2 \cdot 10^{-7}$ м/с². Это свидетельствует о почти полном восстановлении плотности по полю.

Таким образом, можно констатировать следующее:

экспесс и асимметрия распределения поля могут быть использованы в качестве критериев условной и безусловной оптимизации при решении обратных задач гравиметрии и магнитометрии итерационными методами;

использование их эффективно для решения ОЗ при последовательном применении десятков или сотен итераций каждого метода в комбинациях как между собой, так и с другими методами;

необходимо более детально исследовать свойства предложенного ряда методов при интерпретации измеренных полей в различных геологических условиях.

1. *Миненко П. А.* Оптимизационные линейные алгоритмы обработки геологической и геофизической информации при поисках рудных залежей: Сб. науч. тр // Пробл. разработки руд черн. металлов. – 1991. – С. 107–111.
2. *Миненко П. А.* Фильтрация интенсивных помех в обратной линейной задаче гравиметрии при исследованиях на кристаллических щитах // Наук. вісн. Нац. гірн. ун-ту. – 2006. – № 6. – С. 38–43.
3. *Миненко П. А.* Модификации метода регуляризации в ОЛЗГ для поисковых работ в кристаллических породах // Там само. – 2006. – № 9. – С. 34–39.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – Москва: Наука. – 1979. – 286 с.
5. *Миненко П. А., Миненко Р. В.* Исследование кристаллического фундамента линейно-нелинейными методами магнитометрии и гравиметрии // Рос. геофиз. журн. – 2007. – № 45./46. – С. 60–64.
6. *Миненко Р. В., Миненко П. А., Мечников Ю. П.* Исследование глубинного строения южной части Криворожского синклинали методами гравиметрии // Наук. вісн. Нац. гірн. ун-ту. – 2009. – № 2. – С. 60–64.
7. *Страхов В. Н.* Про ефективні за швидкодією та точністю методи побудови лінійних аналітичних апроксимацій в геодезії, геоінформатиці та гравиметрії: Зб. наук. праць. Всеукр. асоц. геоінформатики “Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики”. – Київ, 2005. – С. 12–57.
8. *Миненко П. А., Миненко Р. В.* О поисках избирательных экстремальных решений обратной задачи магнитометрии при исследованиях на кристаллическом фундаменте // Наук. вісн. Нац. гірн. ун-ту. – 2006. – № 9. – С. 39–44.

Государственное высшее учебное заведение
“Криворожский национальный университет”

Поступило в редакцию 08.11.2012

П. О. Міненко, Р. В. Міненко

Методи стійкого розв’язання обернених задач гравиметрії й магнітометрії на основі статистичних критеріїв оптимізації

Екцес і асиметрія розподілу поля можуть бути використані як критерії умовної й безусловної оптимізації при розв’язанні обернених задач гравиметрії й магнітометрії ітеративними методами. Використання їх є більш ефективним для розв’язку обернених задач при послідовному застосуванні десятків або сотень ітерацій кожного методу в комбінаціях як між собою, так і з іншими методами. Продовжено розробку екстремально вибіркового методів розв’язання обернених задач із оптимізацією за мінімумом нев’язок поля або поправок до щільності при сильніших умовах про максимальні стрибки щільності на границях шарів у блоках інтерпретаційної моделі.

P. A. Minenko, R. V. Minenko

Methods of steady solution of inverse problems of gravimetry and magnetometry on the basis of statistical criteria of optimization

The excess and asymmetry of the distribution of a field can be used as criteria of conditional and unconditional optimizations at the solution of inverse problems of gravimetry and magnetometry by iterative methods. Their use is more effective for solution of inverse problems at the consecutive application of tens or hundreds iterations of each method in combinations among themselves, and with other methods. Working out the extremely selective methods of steady solution of inverse problems is continued with optimization by the minimum of field residuals or corrections to the density under stronger conditions on the maximum jumps of the density on the borders of layers in blocks of the interpretative model.