УДК 517.95

В. І. Скрипка

Задача Неймана для рівняння Лапласа в зрізаному порожнинному еліпсоїді

(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)

Одержано точний розв'язок задачі Неймана про розподіл скалярного потенціалу в зрізаному порожнинному еліпсоїді. Доведено регулярність нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, що виникають внаслідок задоволення граничних умов. Досліджено властивості загального розв'язку і наведено рекомендації щодо його коректної числової реалізації.

Точні розв'язки крайових задач для канонічних областей становлять значний теоретичний і практичний інтерес. В монографії [1] викладено метод і розв'язки ряду векторних крайових задач теорії пружності для областей, обмежених частинами координатних поверхонь в декартовій, циліндричній та сферичній системах координат. В системах координат зі змінною гауссовою кривиною координатних поверхонь питання побудови точних розв'язків все ще лишається актуальним.

У цьому повідомленні пропонується точний розв'язок задачі Неймана для скалярного потенціалу в еліпсоїдальних координатах, яка має як самостійне значення (задача про стаціонарний теплообмін), так і допоміжне як базова для побудови розв'язків значно складніших векторних крайових задач (задач теорії пружності).

Постановка задачі. Розглянемо осесиметричну задачу в області, обмеженій частинами двох еліпсоїдальних поверхонь $\xi = \xi_0$ і $\xi = \xi_1$ ($\xi_1 < \xi_0$, $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$) та частиною гіперболоїдальної поверхні $\eta = \eta_0$ ($\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$) в еліпсоїдальній системі координат.

Зв'язок між еліпсоїдальними (ξ, η, ζ) та циліндричними (r, z, φ) координатами встановлюється за формулами [2].

$$\begin{aligned} &r = c\,\mathrm{sh}\,\xi \sin\eta, \qquad z = c\,\mathrm{ch}\,\xi \cos\eta, \qquad \varphi = \zeta, \\ &0 \leqslant \xi < \infty, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \zeta \leqslant 2\pi. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівняння Лапласа для гармонічної функції $\theta(\xi, \eta)$ набуває вигляду

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\,\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\mathrm{sh}\,\xi\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right) = 0. \tag{2}$$

Граничні умови для рівняння (2) задаються співвідношеннями

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_j} = \psi_j(\eta), \qquad j = 0; 1, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0, \qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta_0} = f(\xi), \qquad \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_0. \tag{3}$$

Побудова розв'язку. Загальний розв'язок знаходимо у вигляді суми $\theta(\xi, \eta) = \theta_1(\xi, \eta) + \theta_2(\xi, \eta)$ двох гармонічних функцій

$$\theta_1(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n P_{\lambda_n}(\mathrm{ch}\,\xi) + b_n Q_{\lambda_n}(\mathrm{ch}\,\xi)]P_{\lambda_n}(\cos\eta), \tag{4}$$

$$\theta_2(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kP_{\mu_k}(\cos\eta)\varphi(\xi,\xi_0,\mu_k), \tag{5}$$

де $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ — функції Лежандра відповідно 1-го та 2-го родів [2],

$$\varphi(\xi,\xi_0,\mu_k)=i\frac{\tau_k}{\xi_1-\xi_0}\frac{\pi}{2}\sqrt{\operatorname{sh}\xi_0\operatorname{sh}\xi_1}\,[P_{\mu_k}(\operatorname{ch}\xi_0)L_{\mu_k}(\operatorname{ch}\xi)-L_{\mu_k}(\operatorname{ch}\xi_0)P_{\mu_k}(\operatorname{ch}\xi)], \tag{6}$$

$$L_{\mu_k}(\operatorname{ch}\xi)=L_{-0,5+i\tau_k}(\operatorname{ch}\xi)=\frac{1}{\pi}[Q_{-0,5+i\tau_k}(\operatorname{ch}\xi)+Q_{-0,5-i\tau_k}(\operatorname{ch}\xi)]. \tag{7}$$

Значення параметрів відокремлення λ_n та $\mu_k=-0{,}5+i\tau_k$ знаходяться з умов $P_{\lambda_n}(\cos\eta_0)=0$; $\varphi(\xi_1,\xi_0,\mu_k)=0$.

Частинні розв'язки у співвідношенні (4) вибрані так, щоб виконувалась нульова умова при $\eta=\eta_0$, а будь-яка кусково-неперервна функція $\psi(\eta)$ розкладалась на інтервалі $[0,\eta_0]$ в ряд за базисними функціями $P_{\lambda_n}(\cos\eta)$. Аналогічно будується і система базисних функцій $\varphi(\xi,\xi_0,\mu_k)$ на сегменті $[\xi_1,\xi_0]$. Вибір комплексних значень параметрів μ_k зумовлений тим, що функція $\varphi(\xi,\xi_0,\mu)$ належить до штурм-ліувіллівського типу лише при комплексному значенні параметра $\mu=-0{,}5+i\tau$.

Граничні співвідношення (3) після підстановки в них виразів (4), (5) розкладаємо в ряди за відповідними базисними функціями на кожній частині поверхні. Внаслідок цього одержуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\alpha_n}{\lambda_n}\frac{P'_{\lambda_n}(\omega_j)}{P_{\lambda_n}(\omega_0)}+\frac{\beta_n}{\lambda_n}\frac{Q'_{\lambda_n}(\omega_j)}{Q_{\lambda_n}(\omega_1)}=-\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k s(n,k)\frac{\varphi'(\xi_j,\xi_0,\mu_k)}{\dot\varphi(\xi_1,\xi_0,\mu_k)}+\psi_{nj}, \tag{8}$$

$$\frac{\gamma_k}{\tau_k}\frac{P'_{\mu_k}(\varepsilon_0)}{P_{\mu_k}(\varepsilon_0)}=\sum_{n=1}^{\infty}t(k,n)\left[\frac{\alpha_nA_{nk}}{P_{\lambda_n}(\omega_0)}+\frac{\beta_nB_{nk}}{Q_{\lambda_n}(\omega_1)}\right]\frac{P'_{\lambda_n}(\varepsilon_0)}{\dot P_{\lambda_n}(\varepsilon_0)}+f_k, \tag{9}$$

де

$$\begin{gathered}\omega=\operatorname{ch}\xi;\qquad \varepsilon=\cos\eta;\qquad \omega_j=\operatorname{ch}\xi_j\qquad (j=0;1);\qquad \varepsilon_0=\cos\eta_0;\\ s(n,k)=\frac{(\lambda_n+1)(2\mu_k+1)}{\mu_k(\mu_k+1)[\mu_k(\mu_k+1)-\lambda_n(\lambda_n+1)]};\\ t(k,n)=\frac{(\mu_k+1)(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)[\mu_k(\mu_k+1)-\lambda_n(\lambda_n+1)]};\\ A_{nk}=\frac{\omega P_{\lambda_n}(\omega)\varphi'(\xi,\xi_0,\mu_k)\big|_{\xi_1}^{\xi_0}}{\omega_1\varphi'(\xi_1,\xi_0,\mu_k)};\qquad B_{nk}=\frac{\omega Q_{\lambda_n}(\omega)\varphi'(\xi,\xi_0,\mu_k)\big|_{\xi_1}^{\xi_0}}{\omega_1\varphi'(\xi_1,\xi_0,\mu_k)};\end{gathered} \tag{10}$$

α_n, β_n, γ_k — нормовані довільні сталі:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}=\frac{\lambda_n(\lambda_n+1)}{2\lambda_n+1}\dot P_{\lambda_n}(\varepsilon_0)\begin{pmatrix}a_nP_{\lambda_n}(\omega_0)\\ b_nQ_{\lambda_n}(\omega_1)\end{pmatrix},\\ \gamma_k=\frac{\mu_k(\mu_k+1)}{2\mu_k+1}\dot\varphi(\xi_1,\xi_0,\mu_k)P_{\mu_k}(\varepsilon_0)c_k.\end{gathered} \tag{11}$$

Штрихом позначено диференціювання за координатою, наприклад $P'_{\lambda_n}(\varepsilon_0) = \left.\dfrac{dP_{\lambda_n}(\cos\eta)}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_0}$, а крапкою — похідну за параметром, наприклад $\dot{\varphi}(\xi,\xi_0,\mu_k) = \left.\dfrac{d\varphi(\xi,\xi_0,\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_k}$. У формулах (10) для різниці значень функції $F(\xi_0)-F(\xi_1)$ використано позначення $F(\xi)|_{\xi_1}^{\xi_0}$. ψ_{n_j} та f_k — коефіцієнти розкладення функцій $\psi_j(\eta)$ та $f(\xi)$ в ряди:

$$\psi_{n_j} = \frac{1}{\sin\eta_0 P'_{\lambda_n}(\varepsilon_0)} \int\limits_0^{\eta_0} \psi_j(\eta) P_{\lambda_n}(\cos\eta)\sin\eta d\eta, \qquad j = 0; 1,$$

$$f_k = -\frac{2\mu_k+1}{\operatorname{sh}\xi_1 \dot{\varphi}(\xi_1,\xi_0,\mu_k)\varphi'(\xi_1,\xi_0,\mu_k)} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_0} f(\xi)\varphi(\xi,\xi_0,\mu_k)\operatorname{sh}\xi d\xi.$$

Доведемо регулярність системи (8), (9). Припустимо, що

$$\lim\alpha_n = \alpha; \qquad \lim\beta_n = \beta; \qquad \lim\gamma_k = \gamma. \tag{12}$$

Тоді, виділяючи в (8) асимптотичну складову ряду, одержуємо

$$\frac{\alpha_n}{\lambda_n}\frac{P'_{\lambda_n}(\omega_j)}{P_{\lambda_n}(\omega_0)} + \frac{\beta_n}{\lambda_n}\frac{Q'_{\lambda_n}(\omega_j)}{Q_{\lambda_n}(\omega_1)} = -\sum_{k=1}^{K}(\gamma_k-\gamma)s(n,k)\frac{\varphi'(\xi_j,\xi_0,\mu_k)}{\dot{\varphi}(\xi_1,\xi_0,\mu_k)} - \\ - \gamma\sum_{k=1}^{\infty}s(n,k)\frac{\varphi'(\xi_j,\xi_0,\mu_k)}{\dot{\varphi}(\xi_1,\xi_0,\mu_k)} + \psi_{nj}. \tag{13}$$

Скінченна сума в (13) при $n\to\infty$ є нескінченно малою порядку $1/n$. Такий самий порядок малості мають і коефіцієнти ψ_{n_j} за умови, що функції $\psi_j(\eta)$ кусково-неперервні у відрізку $[0,\eta_0]$.

Враховуючи це, а також граничні при $n\to\infty$ і $k\to\infty$ співвідношення для функцій Лежандра [2], з (13) одержуємо
при $\xi = \xi_0$:

$$\beta = \frac{2\gamma}{\xi_0-\xi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\tau_k^2+\lambda_n^2} + 0\left(\frac{1}{n}\right), \tag{14}$$

при $\xi = \xi_1$:

$$\alpha = \frac{2\gamma}{\xi_1-\xi_0}\sqrt{\frac{\operatorname{sh}\xi_1}{\operatorname{sh}\xi_0}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\lambda_n}{\tau_k^2+\lambda_n^2} + 0\left(\frac{1}{n}\right). \tag{15}$$

За формулою $\lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(kh) = \int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$ при $\lambda_n\eta_0 \sim n\pi$ $(n\to\infty)$, $\tau_k(\xi_0-\xi_1)\sim k\pi$ $(k\to\infty)$ знаходимо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\tau_k^2+\lambda_n^2} = \frac{\xi_0-\xi_1}{2} + 0\left(\frac{1}{n}\right). \tag{16}$$

З формул (14), (16) маємо

$$\beta = \gamma + 0\left(\frac{1}{n}\right). \tag{17}$$

Знакопереміжний ряд у формулі (15) при $n \to \infty$ є нескінченно малою величиною, що за абсолютним значенням не перевищує $\eta_0/(n\pi)$, отже,

$$\alpha = 0\left(\frac{1}{n}\right). \tag{18}$$

Аналогічними перетвореннями з (9) при $k \to \infty$ виводимо

$$\gamma = \frac{2}{\eta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k}{\tau_k^2 + \lambda_n^2}\left[(-1)^n\alpha\sqrt{\frac{\operatorname{sh}\xi_0}{\operatorname{sh}\xi_1}} + \beta\right] + 0\left(\frac{1}{k}\right),$$

Звідки, як і раніше, приходимо до співвідношень (17), (18).

Цим доведено, що для довільних сталих розв'язку виконується закон асимптотичних виразів:

$$\lim \alpha_n = 0; \qquad \lim \beta_n = \lim \gamma_k = A. \tag{19}$$

Дослідження розв'язку. Відомо, що ряди в загальному розв'язку швидко збігаються, але в міру наближення до межі області їх збіжність значно погіршується. Найгіршу (умовну) збіжність ряди мають у кутових точках, тому дослідимо властивості розв'язку в одній з кутових точок, наприклад у точці (ξ_1, η_0).

Виділимо асимптотичну складову $\theta_1^*(\xi, \eta)$ ряду у формулі (4), враховуючи при цьому співвідношення (11), (19):

$$\theta_1^*(\xi, \eta) = \frac{2A}{\pi}\sqrt{\frac{\operatorname{sh}\xi_1 \sin\eta_0}{\operatorname{sh}\xi \sin\eta}}\left(\sigma_1 \cos\frac{q}{4} - \sigma_2 \sin\frac{q}{4}\right), \qquad n \to \infty, \tag{20}$$

де

$$q = \pi\frac{\eta - \eta_0}{\eta_0}; \qquad p = \pi\frac{\xi - \xi_1}{\eta_0}; \tag{21}$$

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-np}\sin nq; \qquad \sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-np}\cos nq. \tag{22}$$

Суму рядів (22) у формулі (20) знаходимо з комплекснозначного ряду

$$\sigma = \sigma_2 + i\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n(p-iq)} = -\ln(1 - e^{-p+iq}),$$

який збігається рівномірно при $\xi > \xi_1$ ($p > 0$) і умовно при $\xi = \xi_1$ ($p = 0$). Після цього співвідношення (20) набуває такого вигляду:

$$\theta_1^*(\xi, \eta) = \frac{2A}{\pi}\sqrt{\frac{\operatorname{sh}\xi_1 \sin\eta_0}{\operatorname{sh}\xi \sin\eta}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sin q}{e^p - \cos q}\cos\frac{q}{4} + \frac{1}{2}\ln(1 - 2e^{-p}\cos q + e^{-2p})\sin\frac{q}{4}\right).$$

При наближенні до кутової точки (ξ_1, η_0) згідно з позначеннями (21) $p \to 0$ і $q \to 0$, тому з точністю до головного асимптотичного члена маємо

$$\theta_1^*(\xi,\eta)\big|_{\substack{\xi\to\xi_1\\ \eta\to\eta_0}} \sim \frac{2A}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{q}{p} = \frac{2A}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\eta-\eta_0}{\xi-\xi_1} = \frac{2A}{\pi}\varphi, \tag{23}$$

де $\xi - \xi_1 = \xi'$, $\eta - \eta_0 = \eta'$ — координати точки $M(\xi', \eta')$ в декартовій системі з початком в кутовій точці (ξ_1, η_0); φ — полярний кут точки M.

Аналогічно з формули (5) знаходимо

$$\theta_2^*(\xi,\eta)\big|_{\substack{\xi\to\xi_1\\ \eta\to\eta_0}} \sim \frac{2A}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\xi-\xi_1}{\eta-\eta_0} = \frac{2A}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right). \tag{24}$$

З формул (23), (24) видно, що, хоча кожна складова розв'язку в кутовій точці має розрив (граничні значення залежать від кута φ), у сумі вони дають границю, що дорівнює A.

Збіжність рядів при диференціюванні за координатами погіршується, результатом чого є поява в кутових точках особливості виду $1/\rho$, де ρ — полярний радіус точки $M(\xi', \eta')$. У сумі ці особливості взаємознищуються, в чому легко переконатися продиференціювавши вирази (23), (24).

Таким чином, одержано точний розв'язок крайової задачі. Всі асимптотичні співвідношення повністю збігаються з відповідними співвідношеннями в роботі [3]. Це вказує на наявність спільних асимптотичних властивостей розв'язків крайових задач для областей з кутовими точками. Знання цих властивостей дає можливість покращити збіжність рядів і здійснити коректний числовий аналіз розв'язку методом редукції.

1. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 263 с.
2. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1952. – 476 с.
3. *Кільчинський О. О., Скрипка В. І.* Задача Неймана для рівняння Лапласа в порожнинному параболоїді скінченної довжини // Пр. Міжнар. молодіж. мат. школи. "Питання оптимізації обчислень" (ПОО – XXXVII). – Київ, 2011. – С. 69–70.

Київська державна академія водного транспорту
ім. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного

Надійшло до редакції 07.11.2012

В. И. Скрипка

Задача Неймана для уравнения Лапласа в усеченном полом эллипсоиде

Получено точное решение задачи Неймана о распределении скалярного потенциала в усеченном полом эллипсоиде. Доказана регулярность бесконечной системы алгебраических уравнений, возникающих вследствие удовлетворения граничных условий. Исследованы свойства общего решения и даны рекомендации относительно его корректной числовой реализации.

V. I. Skrypka

The Neumann problem for the Laplace equation in a truncated hollow ellipsoid

The exact solution of the Neumann problem of the distribution of the scalar potential in a truncated hollow ellipsoid is obtained. The regularity of the infinite system of algebraic equations arising from the fulfillment of the boundary conditions is proved. The properties of the general solution are studied, and some recommendations on its correct numerical implementation are given.