УДК 514.76

**В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов**

# О структуре обобщенных главных расслоений

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. В. Шарко)*

*Найдены структурные уравнения обобщенного главного расслоения, аналогичные уравнениям главного расслоения.*

В [1] было введено понятие обобщенного расслоенного пространства. В настоящей работе мы записываем структурные уравнения обобщенного главного расслоения.

**1.** Напомним [2], что главное расслоенное пространство (главное расслоение) есть четверка $(P, M, \pi, G)$, где $P$ и $M$ — гладкие многообразия, $\dim P = n + r$, $\dim M = n$, $\pi\colon P \to M$ — проекция, $G$ — группа Ли, действующая справа на $P$, $\dim G = r$, причем выполнены три условия: 1) $G$ действует на $P$ свободно; 2) $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ тогда и только тогда, когда существует элемент $g$ в $G$ такой, что $g(p_1) = p_2$ $(p_1, p_2 \in P)$; 3) $P$ локально тривиально. Последнее означает, что у любой точки $x$ из $M$ существует окрестность $U$ и диффеоморфизм $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$ такие, что $\psi(p) = (\pi(p), \eta(p))$, где $\eta(p) \in G$ и $\psi(p \cdot g) = (\pi(p), \eta(p) \cdot g)$, $g \in G$. Согласно этому определению, многообразие $P$ расслаивается на орбиты действия группы $G$.

Обобщение этой конструкции получается следующим образом. Пусть $G$ — группа Ли размерности $r$, допускающая гладкую $n$-параметрическую деформацию $G(x)$, где $x = (x^i)$ — параметры деформации. Будем далее предполагать, что пространство параметров деформации является гладким многообразием, обозначим его $M$, $\dim M = n$. Пусть $\pi\colon P \to M$ — субмерсия, и в слое $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$, свободно и транзитивно действует группа $G(x)$. Многообразие $M$ с такой структурой будем называть обобщенным главным расслоенным пространством или просто обобщенным главным расслоением.

Найдем структурные уравнения обобщенного главного расслоения аналогично тому, как в [3] найдены структурные уравнения главного расслоенного пространства. Пусть $\omega^i$, $i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n$, — базисные формы многообразия $M$, зависящие от дифференциалов параметров $x^i$ — локальных координат на $M$; $\theta^\alpha(a, x)$ — базисные инвариантные формы группы $G(x)$, зависящие от локальных групповых координат $a^\alpha$ и параметров деформации $x^i$. Фиксируем $x = x_0$, тогда формы

$$\pi^\alpha \equiv \theta^\alpha(a, x_0)$$

есть инвариантные формы группы $G(x_0)$. Следовательно, они удовлетворяют структурным уравнениям Маурера–Картана:

$$\delta\pi^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}(x_0)\pi^\beta \wedge \pi^\gamma, \tag{1}$$

где $\delta$ — символ дифференцирования по вторичным параметрам, т. е. при фиксированных переменных $x^i$; $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \ldots = 1, 2, \ldots, r$; $C^\alpha_{\beta\gamma}(x_0)$ — структурные постоянные группы $G(x_0)$, удовлетворяющие условиям антисимметричности по нижним индексам и тождествам Якоби:

$$C^\alpha_{\varepsilon[\beta}(x_0) C^\varepsilon_{\gamma\sigma]}(x_0) = 0. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) выполняются при условии $x = x_0$, которое эквивалентно условию $\omega^i = 0$. Следовательно, на многообразии $P$ будут выполняться уравнения

$$d\theta^\alpha = \frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}(x)\theta^\beta \wedge \theta^\gamma + \widetilde{C}^\alpha_{\beta k}\theta^\beta \wedge \omega^k + \overline{C}^\alpha_{km}\omega^k \wedge \omega^m, \tag{3}$$

где функции $\widetilde{C}^\alpha_{\beta k}$ и $\overline{C}^\alpha_{km}$ зависят от переменных $a^\alpha$ и $x^i$, и для любых $x$ выполняются соотношения

$$C^\alpha_{\varepsilon[\beta}(x)C^\varepsilon_{\gamma\sigma]}(x) = 0. \tag{4}$$

Согласно [4], базисные формы $\omega^i$ многообразия $M$ удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\begin{aligned} &d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \\ &d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Формы $\omega^i$ и $\theta^\alpha$ образуют базис на многообразии $P$. При этом на $P$ допустимы гладкие замены локальных координат вида

$$\widetilde{x}^i = \widetilde{x}^i(x^j), \qquad \widetilde{\theta}^\alpha = \widetilde{\theta}^\alpha(\theta^\beta, x^j),$$

сохраняющие структуру расслоения. Относительно таких замен формы $\theta^\alpha$ не будут инвариантными, поэтому введем формы

$$\Omega^\alpha = \theta^\alpha - x^\alpha_k\omega^k, \tag{6}$$

где $x^\alpha_k$ — некоторые новые переменные. Дифференцируя (6) внешним образом и пользуясь уравнениями (3) и (5), приходим к уравнениям

$$d\Omega^\alpha = \frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}(x)\Omega^\beta \wedge \Omega^\gamma + \omega^k \wedge \Omega^\alpha_k, \tag{7}$$

где

$$\Omega^\alpha_k = dx^\alpha_k - x^\alpha_l\omega^l_k + x^\beta_k\Omega^\alpha_\beta - \widetilde{C}^\alpha_{\beta k}(x)\Omega^\beta - x^\alpha_{kl}\omega^l. \tag{8}$$

Здесь $x^\alpha_{k\ell}$ — некоторые новые переменные, симметричные по нижним индексам, и

$$\Omega^\alpha_\beta = C^\alpha_{\beta\gamma}(x)\Omega^\gamma. \tag{9}$$

**2.** Функции $C^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ задают деформацию $\mathfrak{g}(x)$ алгебры Ли, соответствующую деформации группы Ли $G(x)$. Их дифференциалы запишем в виде

$$dC^\alpha_{\beta\gamma}(x) = C^\alpha_{\beta\gamma,k}(x)\omega^k. \tag{10}$$

Продифференцируем эти уравнения внешним образом и воспользуемся уравнениями (5). Получим

$$(dC^\alpha_{\beta\gamma,k} - C^\alpha_{\beta\gamma,l}\omega^l_k) \wedge \omega^k = 0.$$

По лемме Картана находим

$$dC^{\alpha}_{\beta\gamma,k} - C^{\alpha}_{\beta\gamma,l}\omega^{l}_{k} = C^{\alpha}_{\beta\gamma,kl}\omega^{l}, \tag{11}$$

причем величины $C^{\alpha}_{\beta\gamma,kl}$ симметричны по индексам $k$ и $l$. Дальнейшее дифференцирование уравнений (11) приведет к уравнениям

$$dC^{\alpha}_{\beta\gamma,kl} - C^{\alpha}_{\beta\gamma,pl}\omega^{p}_{k} - C^{\alpha}_{\beta\gamma,kp}\omega^{p}_{l} - C^{\alpha}_{\beta\gamma,p}\omega^{p}_{kl} = C^{\alpha}_{\beta\gamma,klp}\omega^{p} \tag{12}$$

и т. д.

Система (10) является правильно продолжаемой. Это означает, что последовательное внешнее дифференцирование уравнений системы и дальнейшее их раскрытие по лемме Картана приводит к появлению новых функций, но при этом между ними не возникает никаких связей.

Выясним смысл функций, которые появляются при продолжении структурных функций $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$. Мы предполагаем, что деформация $\mathfrak{g}(x)$ существует, т. е. соотношения (4) выполняются тождественно относительно $x$. Дифференцируя (4), получаем серии соотношений:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Alt}(C^{\alpha}_{\varepsilon\beta,k}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma} + C^{\alpha}_{\varepsilon\beta}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma,k}) = 0,\\ &\mathrm{Alt}(C^{\alpha}_{\varepsilon\beta,kl}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma} + C^{\alpha}_{\varepsilon\beta,k}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma,l} + C^{\alpha}_{\varepsilon\beta,l}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma,k} + C^{\alpha}_{\varepsilon\beta}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma,kl}) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

и т. д., где символ Alt означает альтернацию по индексам $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Если деформация существует, и только в этом случае, соотношения (13) должны выполняться тождественно. Таким образом, левые части соотношений (13) можно рассматривать как препятствия к существованию деформации. Как известно, эти препятствия могут быть сформулированы в терминах когомологий алгебр Ли [5].

В рассматриваемой нами конструкции деформация существует по определению, т. е. соотношения (4) и все их дифференциальные следствия (13) должны выполняться тождественно.

Таким образом, базисные формы $\omega^i$ и $\Omega^\alpha$ многообразия $P$ удовлетворяют структурным уравнениям (5) и (7), которые будем называть структурными уравнениями рассматриваемого обобщенного главного расслоенного пространства. К этим уравнениям следует присоединить еще пфаффовы уравнения (10), (11) и им аналогичные, которым удовлетворяют функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $C^{\alpha}_{\beta\gamma,k}$, $C^{\alpha}_{\beta\gamma,kl}$ и т. д. Наконец, дифференцируя (9), получаем уравнения

$$d\Omega^{\alpha}_{\beta} - \Omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \Omega^{\alpha}_{\gamma} = \omega^{k} \wedge \Omega^{\alpha}_{\beta k}, \tag{14}$$

где

$$\Omega^{\alpha}_{\beta k} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Omega^{\gamma}_{k} + C^{\alpha}_{\beta\gamma,k}\Omega^{\gamma}. \tag{15}$$

Доказана следующая

**Теорема.** *Пусть $P$ — гладкое многообразие. На $P$ задана структура обобщенного главного расслоения тогда и только тогда, когда на $P$ существуют локально определенные формы $\omega^i$ и $\Omega^\alpha$, удовлетворяющие структурным уравнениям* (5) *и* (7), *причем входящие в них функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ кососимметричны по нижним индексам и удовлетворяют пфаффовой системе* (10), *которая является правильно продолжаемой. Кроме того, функции*

$C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ *удовлетворяют тождествам Якоби* (2) *и всем соотношениям, которые получаются из них при дифференцировании.*

*Замечание.* В частном случае, если деформация является тривиальной, обобщенное главное расслоение становится обычным главным расслоением и структурные уравнения первого становятся структурными уравнениями второго, найденными в [2].


1. *Кузаконь В. М.* Обобщенные расслоенные пространства // Мат. методи та фiз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 2. – С. 58–63.
2. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. – Москва: Мир, 1970. – 412 с.
3. *Лаптев Г. Ф.* Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Тр. геометрич. семинара. Т. 2. – Москва: ВИНИТИ АН СССР, 1969. – С. 161–178.
4. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геометрич. семинара. Т. 1. Москва: ВИНИТИ АН СССР, 1966. – С. 139–189.
5. *Hochschild G., Serre J.-P.* Cohomology of Lie algebras // Ann. Math. – 1953. – **57**, No 2. – P. 591–603.



*Одесская национальная академия пищевых технологий*
*Тверской государственный университет, Россия*



*Поступило в редакцию 17.10.2012*



**В. М. Кузаконь, О. М. Шелехов**


## Про структуру узагальнених головних розшарувань


*Знайдено структурні рівняння узагальненого головного розшарування, аналогічні рівнянням головного розшарування.*



**V. M. Kuzakon, A. M. Shelekhov**


## On the structure of generalized principal bundles


*The structure equations of the generalized principal bundle, similar to equations for the principal bundle, are found.*