Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2013

*МАТЕМАТИКА*

УДК 517.968/968.78

**Н. О. Вірченко**

# Парні інтегральні рівняння з узагальненими гіпергеометричними функціями

*(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)*

*Розглянуто і розв'язано три нові типи парних інтегральних рівнянь: з r-узагальненою конфлюентною гіпергеометричною, з $\tau$-узагальненою конфлюентною гіпергеометричною, з $(\tau, \beta)$-узагальненою гіпергеометричною функціями. Запроваджено нові узагальнення дробових інтегральних операторів типу Ердеї–Кобера і доведено композиційні співвідношення з відповідними модифікованими інтегральними перетвореннями Лапласа. Розв'язок розглянутих парних інтегральних рівнянь отримано в замкненій формі.*

В останні десятиріччя для розв'язання достатньо широкого класу змішаних крайових задач застосовується метод парних, потрійних і більшого числа інтегральних (суматорних) рівнянь. Цей метод виявився одним із ефективних сучасних аналітичних методів розв'язання змішаних крайових задач. Він допоміг розв'язати і ряд нових складних задач, наприклад, змішані крайові задачі для різного роду клиноподібних областей, деякі задачі теорії пружності для півпростору, простору з тріщинами і т. п. [1].

Парні ($N$-арні) інтегральні рівняння широко використовуються як механіками-теоретиками, так й інженерами, спеціалістами у різних розділах прикладної математики. Огляд літератури про застосування методу парних рівнянь див., наприклад, у [1–3].

Завдяки великій практичній вагомості методу парних рівнянь, його ефективності питання подальшого розвитку теорії парних ($N$-арних) інтегральних рівнянь, розв'язання та дослідження нових типів такого роду рівнянь становлять актуальну задачу успішного використання цієї області теорії інтегральних рівнянь.

Серед парних інтегральних рівнянь з різними спеціальними функціями в ядрах викликають інтерес парні інтегральні рівняння з гіпергеометричними функціями, оскільки вони виникають при розв'язанні змішаних крайових задач з теорії фільтрації, гідродинаміки, теорії пружності та ін. (див., наприклад, [3–6]). Нові узагальнення спеціальних функцій гіпергеометричного типу дозволяють використовувати ці функції в теорії та практиці нових типів парних інтегральних рівнянь.

© Н. О. Вірченко, 2013

У даній роботі розглядаються парні інтегральні рівняння з узагальненими гіпергеометричними функціями, а саме з $r$-конфлюентною гіпергеометричною функцією, з ${}_1\Phi_1^{\tau}(a;c;x)$, ${}_2F_1^{\tau}(a;b;c;x)$.

**1**. Розглянемо парні інтегральні рівняння вигляду

$$\int\limits_0^\infty \omega^{a_1-1}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a_1;b_1;-x\omega)\varphi(\omega)\,d\omega = p_1(x), \qquad 0<x<1, \tag{1}$$

$$\int\limits_0^\infty \omega^{a_2-1}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a_2;b_2;-x\omega)\varphi(\omega)\,d\omega = p_2(x), \qquad 1<x<\infty, \tag{2}$$

Тут $\varphi(x)$ — шукана функція; $p_i(x)$, $i=1,2$, — задані на своєму проміжку функції; ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ — $r$-узагальнена конфлюентна (вироджена) гіпергеометрична функція [7]:

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{1}{B(a,c-a)}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{xt}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\delta;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \tag{3}$$

де $\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,a > 0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$, $\tau-\beta<1$, $r>0$, $B(a,c-a)$ — класична бета-функція [8], $\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\delta > 0$, $\{\delta,\gamma\}\subset R$, $\delta>0$, $\gamma>0$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ – $(\tau,\beta)$-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [9]:

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{B(a,c-a)}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(c;\tau)\\(c;\beta)\end{matrix}\,\middle|\, zt^{\tau}\right]dt, \tag{4}$$

де ${}_1\Psi_1[\ldots]$ — узагальнена Fox–Wright функція [8].

Запровадимо інтегральний оператор $N_{c,\lambda}^a$ вигляду

$$(N_{c,\lambda}^a f)(x) \equiv x^{\lambda}\int\limits_0^\infty (xt)^{a-1}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-xt)f(t)\,dt, \tag{5}$$

де $x>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$, $\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,a > 0$, $\tau-\beta<1$, $r>0$, ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ — функція вигляду (3). Справедлива така теорема.

**Теорема 1.** *При* $0<1/p\leqslant 1, 0\leqslant \lambda+(2/p)-1<c-a$, $1/p<a$, $1/q=1-(1/p)-\lambda>0$ *для інтегрального оператора* (5) *має місце таке композиційне співвідношення:*

$$(N_{c,\lambda}^a f)(x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} I^{c-a}_{\frac{2}{p}-1,\lambda+\frac{2}{p}-1} T^a f(x), \tag{6}$$

*де* $T^a$ *— оператор модифікованого інтегрального перетворення Лапласа:*

$$(T^a f)(x) = x^{a-\frac{2}{p}}\int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{xt}f(t)\,dt, \qquad x>0, \tag{7}$$

$I^{c-a}_{\frac{2}{p}-1,\lambda+\frac{2}{p}-1}$ — *дробовий інтегральний оператор типу Ердеї–Кобера:*

$$I^{c-a}_{\frac{2}{p}-1,\lambda+\frac{2}{p}-1}f(x)=\frac{x^{\lambda-c+a}}{\Gamma(c-a)}\int\limits_0^x(x-t)^{c-a-1}t^{\frac{2}{p}-1}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\delta;\gamma;-\frac{r}{(t/x)(1-t/x)}\right)f(t)\,dt, \qquad (8)$$

*тут* ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ — *функція вигляду* (4).

**Доведення.** Застосуємо оператор (8) до (6):

$$I^{c-a}_{\frac{2}{p}-1,\lambda+\frac{2}{p}-1}(N^a_{c,\lambda}f)=\frac{x^{\lambda-c+a}}{\Gamma(c-a)}\int\limits_0^x(x-t)^{c-a-1}t^{\frac{2}{p}-1}\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\delta;\gamma;-\frac{r}{(t/x)(1-t/x)}\right)t^{c-a-\frac{2}{p}}dt\int\limits_0^\infty\xi^{c-a-1}e^{-t\xi}f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{x^{\lambda-c+a}}{\Gamma(c-a)}\int\limits_0^\infty\xi^{c-a-1}f(\xi)\,d\xi\int\limits_0^x(x-t)^{c-a-1}t^{c-a-1}e^{-t\xi}\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\delta;\gamma;-\frac{r}{(t/x)(1-t/x)}\right)dt=$$

$$=\frac{x^{\lambda-c+a}}{\Gamma(c-a)}\int\limits_0^\infty\xi^{c-a-1}f(\xi)\,d\xi\int\limits_0^1x^{2c-2a-1}(1-\omega)^{c-a-1}\omega^{c-a-1}e^{-\omega(\xi x)}\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\delta;\gamma;-\frac{r}{\omega(1-\omega)}\right)d\omega.$$

Тут було використано можливість перестановки порядку інтегрування та здійснено заміну $t=\omega x$.

Врахувавши інтегральне зображення $r$-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції (3), остаточно дістанемо (6).

**Теорема 2** (формула обернення для оператора $N^a_{c,\lambda}$). *При* $x>0$, $a>1/p$, $c-a>0$, $0<1/p\leqslant 1$, $\lambda+(2/p)-1<c-a<\lambda+1/p$ *справедлива формула*

$$f(x)=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}x^{1-a}L^{-1}\left(t^{1-a}\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{2}{p}}I^{1+a-c}_{c-a-\lambda,1-\frac{2}{p}-\lambda}g(t)\right]\right), \qquad (9)$$

*де* $g(x)=(N^a_{c,\lambda}f(x))$, $L^{-1}$ — *обернене перетворення Лапласа.*

**Доведення** теореми виконується безпосереднім застосуванням операторів вигляду (8) та $L^{-1}$.

Повернемося до розв'язання парних інтегральних рівнянь (1), (2). Застосувавши до рівняння (1) оператор $I^a_{c-\lambda,\lambda+\frac{2}{p}}$ (див. (8)), композиційне співвідношення (6), одержимо, що парні інтегральні рівняння (1), (2) зводяться до розв'язання одного інтегрального рівняння:

$$\int\limits_0^\infty(xt)^{c-1}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+\alpha;-xt)\,dt=R(x), \qquad (10)$$

де

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+c)}{\Gamma(c)} I^{a}_{c-\lambda,\lambda+\frac{2}{p}} x^{\lambda} p_1(x), & 0 < x < 1, \\ x^{a+\lambda-1} p_2(x), & 1 < x < \infty. \end{cases} \tag{11}$$

Розв'язок рівняння (10) за допомогою формули (9) записуємо в замкненій формі:

$$\varphi(x) = \left( N^{a}_{c+\lambda,\lambda+\frac{2}{p}} \right)^{-1} R(x). \tag{12}$$

**2.** Аналогічно розв'язуємо такі парні інтегральні рівняння з $\tau$-узагальненою конфлюентною функцією ${}_1\Phi_1^{\tau}(a;c;-xt)$:

$$\int\limits_0^{\infty} \xi^{\alpha_1 - 1}\, {}_1\Phi_1^{\tau}(\alpha_1;\beta_1;-x\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = r_1(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{13}$$

$$\int\limits_0^{\infty} \xi^{\alpha_2 - 1}\, {}_1\Phi_1^{\tau}(\alpha_2;\beta_2;-x\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = r_2(x), \qquad 1 < x < \infty, \tag{14}$$

де $r_i(x)$, $i = 1, 2$, — задані функції, $\varphi(x)$ — шукана функція, ${}_1\Phi_1^{\tau}(\ldots)$ — $\tau$-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [9]:

$${}_1\Phi_1^{\tau}(a;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} e^{xt^{\tau}}\,dt, \tag{15}$$

або

$${}_1\Phi_1^{\tau}(a;c;x) = \frac{1}{B(a,c-a)\tau} \int\limits_0^1 t^{\frac{a}{\tau}-1}(1-t^{\frac{1}{\tau}}) e^{xt} dt,$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \qquad \tau > 0.$$

Нехай $\alpha_2 = \alpha_1 = (a/\tau) - 1$, $\beta_2 = \beta_1 + \alpha$, $\varphi(x) \in L_p$, $0 < 1/p \leqslant 1$, $x > 0$, $c > a > 0$, $a > 1/p$, $\tau > 0$.

Застосувавши до рівняння (13) дробовий інтегральний оператор типу Ердеї–Кобера

$$\left( {}_{\tau}I^{\beta_1-\alpha_1}_{\frac{2}{p}-1,\frac{2}{p}-1} f \right)(x) = \frac{x^{a-c}}{\Gamma(c-a)} \int\limits_0^x (x^{\frac{1}{\tau}} - t^{\frac{1}{\tau}})^{c-a-1} t^{\frac{2}{p}-1} f(t)\,dt \tag{16}$$

та оператор модифікованого інтегрального перетворення Лапласа

$$({}_{\tau}K_p^a f)(x) = x^{\frac{a}{\tau}-\frac{2}{p}} \int\limits_0^{\infty} t^{\frac{a}{\tau}-1} e^{-xt} f(t)\,dt, \tag{17}$$

врахувавши відповідне композиційне співвідношення, отримаємо з (13), (14) одне інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty (x\xi)^{\alpha_1-1}\varphi(\xi)\,{}_1\Phi_1^\tau(\alpha_1;\beta_1+\alpha;-x\xi)\,d\xi = M(x), \tag{18}$$

розв'язком якого буде

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}x^{1-\frac{a}{\tau}}L^{-1}\left\{x^{1-\frac{a}{\tau}}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{p}}\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{2}{p}}\,{}_\tau I^{1-c+a}_{c-a,1-\frac{2}{p}}\,x^{\frac{c}{\tau}+a-c-1}M(x)\right]\right)\right\}, \tag{19}$$

де $M(x)$ виражається через $r_1(x)$, $r_2(x)$.

Легко отримати і розв'язок парних інтегральних рівнянь з $(\tau,\beta)$-узагальненою гіпергеометричною функцією ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;(-xt)^\beta)$ [11] в ядрі. У даному випадку потрібне композиційне співвідношення матиме вигляд

$$I^\alpha_{c-\lambda-b,\beta}\left(x^\lambda\int_1^\infty (xt)^{b-1}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;(-xt)^\beta)f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+\alpha)}x^{\lambda+\beta}\int_1^\infty (xt)^{b-1}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c+\alpha;(-xt)^\beta)f(t)\,dt. \tag{20}$$


1. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
2. *Попов Г. Я.* Метод парных уравнений // Развитие теории контактных задач в СССР. – Москва: Наука, 1976. – С. 56–87.
3. *Вірченко Н. О.* Парні ($N$-арні) інтегральні рівняння. – Київ: Задруга, 2009. – 476 с.
4. *Гандель Ю. В.* О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1983. – Вып. 40. – С. 33–36.
5. *Мандрик П. А.* Парные интегральные уравнения для решения задачи нагрева полупространства через бесконечно длинную полосу // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 2000. – № 1. – С. 75–76.
6. *Ентов В. М.* О парных интегральных уравнениях, возникающих в задачах фильтрации с предельным градиентом // Прикл. математика и механика. – 1970. – **34**, No 3. – С. 532–542.
7. *Вірченко Н. О.* Узагальнення конфлюентних гіпергеометричних функцій // Доп. НАН України. – 2012. – № 5. – С. 7–11.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – Москва: Наука, 1965. – 296 с.
9. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // Fract. Calc. and Appl. Anal. – 2006. – **9**, No 2. – P. 101–108.
10. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-Transforms. – London: Chapman and Hall, 2004. – 390 p.
11. *Virchenko N. O.* On some generalizations of the function hypergeometric type // Fract. Calc. and Appl. Anal. – 1999. – **2**, No 3. – P. 233–244.


*НТУ України "Київський політехнічний інститут"* *Надійшло до редакції 26.12.2012*

**Н. А. Вирченко**

## Парные интегральные уравнения с обобщенными гипергеометрическими функциями

*Рассмотрены и решены три новых типа парных интегральных уравнений: с $r$-обобщенной конфлюэнтной гипергеометрической, с $\tau$-обобщенной конфлюэнтной гипергеометрической, с $(\tau, \beta)$-обобщенной гипергеометрической функциями. Введены новые обобщения дробных интегральных операторов типа Эрдейи–Кобера и доказаны композиционные соотношения с соответствующими модифицированными интегральными преобразованиями Лапласа. Решение рассмотренных парных интегральных уравнений получено в замкнутой форме.*

**N. O. Virchenko**

## Dual integral equations with generalized hypergeometric functions

*This paper is devoted to the solution of new types of dual integral equations. Three types of dual integral equations, respectively, with $r$-generalized confluent, $r$-generalized confluent, and with the $(\tau, \beta)$-generalized hypergeometric functions are considered. Introducing the new generalizations of fractional operators of the Erdelyi–Kober type, some composition relations with the corresponding modified integral Laplace transforms are proved. The solutions of the considered dual integral equations in the closed form are obtained.*