УДК 517.51

А. С. Сердюк, В. В. Боденчук

Оцінки колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Доведено, що ядро Пуассона $P_{q,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \beta\pi/2)$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ *задовольняє умову* $C_{y,2n}$ *починаючи з деякого номера* n_q, *залежного лише від* q. *Як наслідок, для всіх* $n \geqslant n_q$ *встановлено оцінки знизу колмогоровських поперечників у просторі* C *класів* $C^q_{\beta,\infty}$ *інтегралів Пуассона від функцій, що належать одиничній кулі в просторі* L_∞. *Отримані оцінки збігаються з найкращими рівномірними наближеннями зазначених класів тригонометричними поліномами. Знайдено точні значення поперечників класів* $C^q_{\beta,\infty}$ *і показано, що підпростори тригонометричних поліномів порядку* $n-1$ *є оптимальними для поперечників розмірності* $2n-1$.

Через $L = L_1$ позначимо простір 2π-періодичних сумовних функцій f з нормою $\|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$, через L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$, C — простір 2π-періодичних неперервних функцій f, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

Нехай $\Psi_\beta(t)$ — фіксоване сумовне ядро вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \psi(k) > 0, \qquad \beta \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty. \tag{1}$$

Через $C^\psi_{\beta,p}$, $p = 1, \infty$, позначимо клас функцій f, що зображуються у вигляді згортки з ядром Ψ_β

$$f(x) = A + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)\,dt = A + (\Psi_\beta * \varphi)(x), \qquad A \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де

$$\|\varphi\|_p \leqslant 1, \qquad \varphi \perp 1.$$

Функцію φ в рівності (2) називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають через f^ψ_β.

Важливим частковим випадком ядер $\Psi_\beta(t)$ вигляду (1) при $\psi(k) = q^k$, $q \in (0,1)$ є ядра Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ з параметрами q і β, тобто функції вигляду

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Функції f, які допускають зображення у вигляді згортки (2) з ядром $\Psi_\beta(t) = P_{q,\beta}(t)$, називають інтегралами Пуассона. У цьому випадку класи $C^\psi_{\beta,p}$ позначатимемо через $C^q_{\beta,p}$, а (ψ,β)-похідні f^ψ_β функції $f \in C^\psi_{\beta,p}$ при $\psi(k) = q^k$ — через f^q_β.

Через $E_n(C^\psi_{\beta,p})_X$, де $X = L$ або C, $p = 1, \infty$, позначимо найкраще наближення в просторі X класу $C^\psi_{\beta,p}$ підпростором $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку $n-1$, тобто величину вигляду

$$E_n(C^\psi_{\beta,p})_X = \sup_{f\in C^\psi_{\beta,p}} \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_X, \tag{3}$$

а через $d_m(C^\psi_{\beta,p}, X)$ — поперечник за Колмогоровим порядку m класу $C^\psi_{\beta,p}$ в просторі X, тобто величину вигляду

$$d_m(C^\psi_{\beta,p}, X) = \inf_{F_m\subset X} \sup_{f\in C^\psi_{\beta,p}} \inf_{y\in F_m} \|f - y\|_X, \tag{4}$$

де зовнішній inf розглядається по всіх m-вимірних лінійних підпросторах F_m із X.

Задача про знаходження колмогоровських поперечників для різноманітних функціональних компактів у різних функціональних просторах має багату історію (див. [1, 2]). У даній роботі розглядається задача про знаходження точних значень поперечників $d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$ для усіх натуральних n, більших деякого номера, залежного лише від q.

Для величин вигляду (3) і (4) має місце співвідношення

$$d_{2n-1}(C^\psi_{\beta,p}, X) \leqslant E_n(C^\psi_{\beta,p})_X.$$

Як випливає з [3–6], для довільних $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L = \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|,$$

де

$$\varphi_n(t) = \operatorname{sign}\sin nt,$$

а $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(2\nu+1)n} \cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0. \tag{5}$$

Тому для розв'язання задачі про точні значення вказаних поперечників залишається встановити оцінки знизу

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C, \tag{6}$$

$$d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) \geqslant \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C. \tag{7}$$

Отримання оцінок (6) та (7) спряжене з принциповими труднощами, які викликані тим, що ядра Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ можуть збільшувати осциляції (зокрема, як показано в [8, с. 1318–1319], $P_{q,\beta} \notin \mathrm{CVD}$ при $q = 1/7$ і $\beta = 0$). Тому для класів згорток з ядрами $P_{q,\beta}(t)$ неможливо отримати точні оцінки знизу поперечників, користуючись методами і підходами, які розвинуто А. Пінкусом [1]. До цього часу оцінки (6) і (7) були відомі у таких випадках:

для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли $0 < q \leqslant q(\beta)$, де $q(\beta) = 0{,}2$ при $\beta \in \mathbb{Z}$ і $q(\beta) = 0{,}196881$ при $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (див. [6]);

при $\beta = 2kl$, $l \in \mathbb{Z}$, довільних $0 < q < 1$ і всіх номерів n, більших деякого номера n_* (при цьому доведено існування n_*, але не вказано конструктивного способу його відшукання) [7].

У перелічених випадках результати вдалось одержати на базі застосування започаткованого О. К. Кушпелем [8] методу знаходження оцінок знизу поперечників класів зготок із твірними ядрами Ψ_β, що задовольняють так звану умову $C_{y,2n}$. У рамках даної роботи ми також притримувались цього підходу. Наведемо точні означення і відомі твердження, які будуть використовуватись для викладу результатів роботи.

Нехай $\Delta_{2n} = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = 2\pi\}$, $x_k = k\pi/n$ — розбиття проміжку $[0, 2\pi]$. Розглянемо функцію

$$\Psi_{\beta,1}(t) = (\Psi_\beta * B_1)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} \cos\left(kt - \frac{(\beta+1)\pi}{2}\right),$$

де $B_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sin kt$ — ядро Бернуллі. Через $S\Psi_{\beta,1}(\Delta_{2n})$ позначатимемо простір SK-сплайнів $S\Psi_{\beta,1}(\cdot)$ за розбиттям Δ_{2n}, тобто множину функцій вигляду

$$\begin{gathered} S\Psi_{\beta,1}(\cdot) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \Psi_{\beta,1}(\cdot - x_k), \qquad \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = 0, \\ \alpha_k \in \mathbb{R}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n. \end{gathered} \tag{8}$$

Фундаментальним SK-сплайном називають функцію $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot) = \overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, \cdot)$ вигляду (8), що задовольняє співвідношення

$$\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, y_k) = \delta_{0,k} = \begin{cases} 0, & k = \overline{1, 2n-1}, \\ 1, & k = 0, \end{cases}$$

де $y_k = x_k + y$, $x_k = k\pi/n$, $y \in [0, \pi/n)$. Сплайн $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, \cdot)$ породжує систему фундаментальних сплайнів вигляду $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, \cdot - x_k)$, $k = \overline{0, 2n-1}$, яка утворює базис в просторі $S\Psi_{\beta,1}(\Delta_{2n})$. Необхідні і достатні умови існування і єдиності фундаментального сплайну $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, \cdot)$ в залежності від співвідношення між y — зсувом вузлів інтерполяції та параметрами ψ і β твірного ядра $\Psi_{\beta,1}$ досліджувались у роботах [8–12].

Оскільки на підставі означення (ψ, β)-похідної для ядра $\Psi_{\beta,1}$ виконується рівність

$$(\Psi_{\beta,1}(\cdot))^{\psi}_{\beta} = B_1(\cdot), \tag{9}$$

то внаслідок (8) маємо

$$(S\Psi_{\beta,1}(\cdot))^{\psi}_{\beta} = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k B_1(\cdot - x_k). \tag{10}$$

Рівності в (9) та (10) розуміють як рівності між двома функціями з L (тобто майже скрізь). На підставі леми 2.3.4 роботи [2, с. 76] функція, що знаходиться в правій частині рівності (10) є сталою на кожному інтервалі (x_k, x_{k+1}). Отже, серед (ψ, β)-похідних будь-якого сплайну вигляду (8), а значить, і для фундаментального сплайну $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot)$ існує функція, яка є сталою на кожному інтервалі (x_k, x_{k+1}). Надалі саме таку функцію будемо розуміти під записом $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot))^{\psi}_{\beta}$.

Означення. Будемо казати, що для деякого дійсного числа y і розбиття Δ_{2n} ядро $\Psi_\beta(\cdot)$ вигляду (1) задовольняє умову $C_{y,2n}$ (і записувати $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$), якщо для цього ядра існує єдиний фундаментальний сплайн $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,\cdot)$ і для нього виконуються рівності

$$\operatorname{sign}(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t_k))^{\psi}_{\beta} = (-1)^k \varepsilon e_k, \qquad k = \overline{0, 2n-1},$$

де $t_k = (x_k + x_{k+1})/2$, e_k дорівнює або 0, або 1, а ε набуває значення ± 1 і не залежить від k.

Нижченаведена теорема дозволяє знаходити оцінки знизу колмогоровських поперечників класів згорток, породжених ядрами, що задовольняють умову $C_{y,2n}$.

Теорема (О. К. Кушпель [8, 13]). *Нехай при деякому $n \in \mathbb{N}$ функція Ψ_β вигляду* (1), *що породжує класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $p = 1, \infty$, задовольняє умову $C_{y,2n}$, коли y — точка, в якій функція $|(\Psi_\beta * \varphi_n)(t)|$, $\varphi_n(t) = \operatorname{sign}\sin nt$ набуває максимального значення. Тоді*

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C,$$

$$d_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,1}, L) \geqslant \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C.$$

У роботах [6–8, 10, 14, 15] були встановлені достатні умови включення $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$ для ядер вигляду (1). Це дозволило авторам зазначених робіт застосувати наведену вище теорему і одержати в ряді нових випадків точні оцінки поперечників $d_m(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C)$ та $d_m(C^{\psi}_{\beta,1}, L)$.

Сформулюємо основні результати роботи. Для кожного фіксованого $q \in (0,1)$ позначимо через n_q найменший з номерів $n \geqslant 9$, для яких виконується нерівність

$$\frac{43}{10(1-q)} q^{\sqrt{n}} + \frac{8}{3n - 7\sqrt{n}} \frac{q}{(1-q)^2} \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{4/(1-q^2)}.$$

Теорема 1. *Нехай $q \in (0,1)$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ і усіх номерів $n \geqslant n_q$ виконуються нерівності* (6) *та* (7).

Доведення теореми 1 базується на нижченаведеному твердженні, яке містить зображення (q,β)-похідної фундаментального сплайну $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,\cdot) = \overline{SP}_{q,\beta,1}(y,\cdot)$, породженого ядром Пуассона $P_{q,\beta}$.

Лема. *Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $y = \theta_n \pi/n$, θ_n — единий на $[0,1)$ корінь рівняння* (5). *Тоді для довільного $t \in \left(\dfrac{(k-1)\pi}{n}, \dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k = \overline{1, 2n}$ при всіх натуральних $n \geqslant n_q$ виконується рівність*

$$(\overline{SP}_{q,\beta,1}(y,t))^q_\beta = (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sign}\sin\left(ny - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)}{4nq^n} (\mathcal{P}_q(t_k - y) + r^{(y)}_{n,\beta}),$$

в якій

$$\mathcal{P}_q(t) = \frac{1}{2} + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos jt}{q^j + q^{-j}}$$

та справджується нерівність

$$|r_{n,\beta}^{(y)}| \leqslant \min_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{P}_q(t).$$

Теорема 2. *Нехай $q \in (0,1)$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ та усіх номерів $n \geqslant n_q$ мають місце рівності*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L =$$

$$= \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|,$$

де $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (5).

Зокрема, при $n \geqslant n_q$ і $\beta \in \mathbb{Z}$ виконуються рівності

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,1})_L = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} q^n, \qquad \beta = 2k, \qquad k \in \mathbb{Z};$$

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,1})_L = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+q^n}{1-q^n}, \qquad \beta = 2k-1, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 2 дозволяє записати асимптотичні при $n \to \infty$ рівності для поперечників $d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$.

Теорема 3. *Нехай $q \in (0,1)$ та $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n \to \infty$*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L =$$

$$= q^n\left(\frac{4}{\pi} + O(1)\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right),$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена за n, q та β.

1. *Pinkus A.* n-widths in approximation theory. – Berlin: Springer, 1985. – 291 p.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – Москва: Наука, 1987. – 424 с.
3. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 4–5. – С. 245–249.
4. *Никольский С. М.* Приближения функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 207–256.
5. *Бушанский А. В.* О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 29–37.
6. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 6. – С. 126–136.
7. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Экстремальные задачи на некоторых классах гладких периодических функций: Дис. … д-ра физ.-мат. наук / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. – Москва, 1994. – 219 с.
8. *Кушпель А. К.* Точные оценки поперечников классов сверток // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 6. – С. 1305–1322.

9. *Шевалдин В. Т.* Оценки снизу поперечников классов истокообразно представимых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 185–201.
10. *Шевалдин В. Т.* Оценки снизу поперечников классов периодических функций с ограниченной дробной производной // Мат. заметки. – 1993. – **53**, № 2. – С. 145–151.
11. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* О существовании интерполяционных SK-сплайнов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1546–1554.
12. *Сердюк А. С.* Про існування та єдиність розв'язку задачі рівномірної SK-сплайн інтерполяції // Там само. – 1999. – **51**, № 4. – С. 486–492.
13. *Кушпель А. К.* Оценки поперечников классов сверток в пространствах C и L // Там само. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1070–1076.
14. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Оценки снизу поперечников классов сверток периодических функций в метриках C и L // Там само. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1112–1121.
15. *Сердюк А. С.* Поперечники та найкращі наближення класів згорток періодичних функцій // Там само. – 1999. – **51**, № 5. – С. 674–687.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 23.10.2012

А. С. Сердюк, В. В. Боденчук

Оценки колмогоровских поперечников классов интегралов Пуассона

Доказано, что ядро Пуассона $P_{q,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \beta\pi/2)$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* $C_{y,2n}$ *начиная с некоторого номера* n_q*, зависимого только от* q*. Как следствие, для всех* $n \geqslant n_q$ *установлены оценки снизу колмогоровских поперечников в пространстве* C *классов* $C^q_{\beta,\infty}$ *интегралов Пуассона от функций, принадлежащих единичному шару в пространстве* L_∞*. Полученные оценки совпали с наилучшими равномерными приближениями указанных классов тригонометрическими полиномами. Найдены точные значения поперечников классов* $C^q_{\beta,\infty}$ *и показано, что подпространства тригонометрических полиномов порядка* $n-1$ *являются оптимальными для поперечников размерности* $2n-1$.

A. S. Serdyuk, V. V. Bodenchuk

Estimates for Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals

We prove that the Poisson kernel $P_{q,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \beta\pi/2)$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ *satisfies condition* $C_{y,2n}$ *beginning from some number* n_q *that depends only on* q*. As a consequence, the lower bounds for Kolmogorov widths in the space* C *of classes* $C^q_{\beta,\infty}$ *of Poisson integrals of functions from a unit ball in space* L_∞ *are found for all* $n \geqslant n_q$*. These estimates coincide with the best uniform approximation of the mentioned classes by trigonometric polynomials. As a result, the exact values of the widths of classes* $C^q_{\beta,\infty}$ *are found, and it is shown that the subspaces of trigonometric polynomials of order* $n-1$ *are optimal for the widths of dimension* $2n-1$.