УДК 517.983

К. В. Вербинина, С. Л. Гефтер

Формула Рисса–Данфорда для формальных степенных рядов класса Жевре

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Классическое функциональное исчисление Рисса–Данфорда переносится на случай формальных степенных рядов со специальным свойством a-голоморфности. В качестве следствий построенное исчисление используется для решения некоторых операторных уравнений. Кроме того, приведена явная формула для резольвенты сверточного интегрального уравнения Вольтерра, ядро которого является степенным рядом с конечным радиусом сходимости.

Пусть B — банахова алгебра с единицей и $a \in B$. Если спектр $\sigma(a)$ элемента a лежит в области G и функция f голоморфна в этой области, то формула Рисса–Данфорда позволяет следующим образом определить элемент $f(a)$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta - a)^{-1} d\zeta, \tag{1}$$

где контур Γ охватывает $\sigma(a)$ [1]. Существует множество расширений голоморфного функционального исчисления на другие классы функций (см., например, [2]).

В начале 1970-х гг. С. Грабинер построил некоторое функциональное исчисление формальных степенных рядов для квазинильпотентных операторов и успешно использовал его для решения сверточных интегральных уравнений [3, 4]. Однако отметим, что в построенном исчислении не было ни теоремы об отображении спектра, ни аналога формулы Рисса–Данфорда.

В нашей работе классическое исчисление Рисса–Данфорда и функциональное исчисление Грабинера перенесены на случай, когда f является формальным степенным рядом со специальным свойством *a-голоморфности* (см. определение 1). Основными результатами работы являются теорема 2 об a-голоморфном функциональном исчислении и формула Рисса–Данфорда для формальных степенных рядов. Последняя требует дополнительных ограничений на рост коэффициентов ряда $f(\zeta)$, а именно f должен принадлежать классу Жевре (см. теорему 3). Отметим, что в последнее время степенные ряды Жевре находят многочисленные применения в дифференциальных уравнениях (см., например, [5–7]).

Поскольку мы имеем дело с формальными степенными рядами, контурный интеграл в формуле Рисса–Данфорда не имеет буквального смысла. Вместо него естественно использовать определение интеграла в пространстве формальных рядов Лорана (определение 3). Такой интеграл ранее применялся в многочисленных работах по комбинаторике, вершинным операторным алгебрам и конформной теории поля. Отметим, что ограничения на f и a в формуле Рисса–Данфорда являются существенными (см. замечание 2 и пример 2). Далее в работе получена явная формула для резольвенты сверточного интегрального уравнения Вольтерра в случае, когда ядро уравнения является степенным рядом с конечным радиусом сходимости (см. следствие 3).

1. Предварительные сведения. Пусть B — банахова алгебра с единицей, $a \in B$ и $f(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ — формальный степенной ряд над $\mathbb{C}$. Положим $f(za) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n a^n z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $f(za)$ является степенным рядом над B. Обозначим через $R_a(f)$ радиус сходимости $f(za)$.

Определение 1. Будем говорить, что ряд $f(z)$ является a-голоморфным, если $R_a(f) > 0$.

Пусть степенной ряд f имеет положительный радиус сходимости $R(f)$. Такой ряд является a-голоморфным для всех $a \in B$. Обозначим через $\rho(a)$ спектральный радиус элемента a. Если $|z|\rho(a) < R(f)$, то $f(za)$ приобретает обычный смысл: $f(za)$ — результат применения голоморфной функции f к элементу za.

В случае, когда элемент a не является квазинильпотентным, понятие a-голоморфного степенного ряда совпадает с обычным понятием голоморфного степенного ряда: если a имеет положительный спектральный радиус $\rho(a)$, степенной ряд $f(\zeta)$ будет a-голоморфным тогда и только тогда, когда он имеет ненулевой радиус сходимости. Таким образом, если $f(\zeta)$ имеет нулевой радиус сходимости и a-голоморфен, то элемент a квазинильпотентен.

Приведем пример квазинильпотентного элемента a и a-голоморфного степенного ряда с нулевым радиусом сходимости (см. также [4, с. 652; 7]).

Пример 1. Пусть $E = C[0,1]$, $B = B(E)$ — алгебра всех ограниченных операторов в E, a — оператор интегрирования:

$$(a\xi)(x) = \int_0^x \xi(y)\,dy, \qquad \xi \in C[0,1].$$

Хорошо известно, что

$$(a^n\xi)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-y)^{n-1}\xi(y)\,dy, \qquad \|a^n\| = \frac{1}{n!}, \qquad n \geqslant 1, \tag{2}$$

и $\sigma(a) = \{0\}$. Рассмотрим формальный степенной ряд $\varphi(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\zeta^n$. Тогда φ является a-голоморфным, $R_a(\varphi) = 1$ и

$$(\varphi(za)\xi)(x) = \xi(x) + \int_0^x \frac{z\xi(y)}{(1-z(x-y))^2}dy, \qquad |z| < 1.$$

Определение 2. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$. Будем говорить, что f принадлежит классу Жевре β и имеет тип M, если $|f_n| \leqslant CM_1^n(n!)^\beta$ для некоторых $C, M_1 > 0$ и всех $n \geqslant 0$, а M является инфимумом всех M_1, которые удовлетворяют неравенству. Пространство таких формальных степенных рядов мы будем обозначать через $\mathbb{C}[[z]]_{\beta,M}$.

Определение 3. Пусть V — комплексное векторное пространство. Обозначим $V[[\zeta, 1/\zeta]]$ пространство формальных рядов Лорана с коэффициентами из V. Для $g(\zeta) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\zeta^n \in V[[\zeta, 1/\zeta]]$ положим $\oint g(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i b_{-1}$.

Определение 4. Преобразованием Лапласа формального степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ будем называть ряд Лорана $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!c_n}{s^{n+1}}$.

Следующая теорема есть аналог классического результата, относящегося к исчислению Рисса–Данфорда для оператора интегрирования [8, с. 291–297].

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

i) f является a-голоморфным;

ii) $f \in \mathbb{C}[[z]]_{1,M}$, причем $M = \dfrac{1}{R_a(f)}$.

Кроме того, в обоих случаях

$$(f(za)u)(x) = \int\limits_0^x \varphi_z(x-y)u(y)\,dy, \qquad u \in C[0,1],$$

где преобразование Лапласа функции $\varphi_z(t)$ равно $zf(1/(zt))$.

2. Основные результаты. Обозначим пространство всех a-голоморфных степенных рядов через $H(a)$. Для $r>0$ положим $H_r(a) = \Big\{f(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n \colon \|f\|_r := \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|\|a^n\|r^n < +\infty\Big\}$. Тогда $(H_r(a), \|\cdot\|_r)$ — банаховы пространства и $H(a) = \bigcup\limits_{r>0} H_r(a)$. На $H(a)$ будем рассматривать топологию индуктивного предела банаховых пространств $H_r(a)$, $r>0$. Пусть $B\langle z\rangle$ — алгебра всех сходящихся степенных рядов с коэффициентами из B, также наделенная естественной топологией индуктивного предела. Рассмотрим отображение $T\colon H(a) \to B\langle z\rangle$, $T(f) = f(za)$.

Теорема 2 (об a-голоморфном функциональном исчислении).

i) Если $\rho(a)=0$, ряд f является a-голоморфным и $|z| < R_a(f)$, то $\sigma(f(za)) = \{f(0)\}$, т. е. $\sigma(f(za)) = f(\sigma(za))$.

ii) $H(a)$ — подалгебра $\mathbb{C}[[\zeta]]$ и отображение T является единственным непрерывным гомоморфизмом из $H(a)$ в $B\langle z\rangle$, для которого $T(p) = p(za)$, когда $p \in \mathbb{C}[z]$.

iii) Предположим, что $\rho(a)=0$, $f \in H(a)$ и $f(0)=0$. Если функция g голоморфна в окрестности нуля, то $g\circ f \in H(a)$ и $T(g\circ f)(z) = g(f(za))$, $|z| < R_a(f)$.

Замечание 1. Вариант утверждения 2 (*iii*) был доказан С. Грабинером в [4, теорема 2.33].

Теперь приведем аналог формулы Рисса–Данфорда, с помощью которого отображение T можно записать в виде интегрального оператора.

Рассмотрим сначала чисто алгебраическую ситуацию. Пусть сейчас B — комплексная алгебра с единицей, $a \in B$, $f \in \mathbb{C}[[\zeta]]$ и $f(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n$. Введем ядро Коши $(\zeta - az)^{-1}$, которое будем рассматривать как элемент пространства $B[[z]][[\zeta, 1/\zeta]]$:

$$(\zeta - az)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n a^n}{\zeta^{n+1}}. \tag{3}$$

Теперь определим умножение элемента из $\mathbb{C}[[\zeta]]$ на $(\zeta - az)^{-1}$:

$$f(\zeta)(\zeta - az)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k a^{-n+k} z^{-n+k}\right)\zeta^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k} a^k z^k\right)\zeta^{n-1}. \tag{4}$$

Таким образом, $f(\zeta)(\zeta - az)^{-1} \in B[[z]][[\zeta, 1/\zeta]]$.

Замечание 2. Если B является банаховой алгеброй, то произведение $f(\zeta)(\zeta - az)^{-1}$ не обязательно лежит в пространстве $B\langle z\rangle[[\zeta, 1/\zeta]]$ (см. пример 2).

Теорема 3. *Пусть B — банахова алгебра, $a \in B$, и $f(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n \in \mathbb{C}[[\zeta]]$. Предположим, что $f \in \mathbb{C}[[z]]_{\beta,M}$, $M_1 > M$ и a удовлетворяет условию*

$$\exists\, M_2 > 0 \qquad \exists\, n_0 \qquad \forall\, n > n_0\colon \quad \|a^n\| \leqslant \frac{M_2^n}{(n!)^\beta}. \tag{5}$$

Если $|z_0| < 1/(M_1 M_2)$, то $f \in H(a)$, произведение $f(\zeta)(\zeta - z_0 a)^{-1}$ корректно определено как элемент из $B[[\zeta, 1/\zeta]]$, $|z_0| < R_a(f)$, и имеет место следующий аналог формулы Рисса–Данфорда:

$$f(z_0 a) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(\zeta)(\zeta - z_0 a)^{-1} d\zeta, \tag{6}$$

где интеграл понимается в смысле определения 3.

Доказательство. Из (5) элемент a является квазинильпотентным и

$$\frac{1}{R_a(f)} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n| \cdot \|a^n\|} \leqslant M_1 M_2, \tag{7}$$

т. е. $f \in H(a)$ и $|z_0| < R_a(f)$. Рассмотрим коэффициент $b_n(z) \in B[[z]]$ при степени ζ^{n-1} в ряде (4). Покажем, что все ряды $b_n(z)$ сходятся и их радиусы сходимости не меньше $1/(M_1 M_2)$. Для $n < 0$ это очевидно. В случае $n \geqslant 0$ имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{k+n}| \cdot \|a^k\|} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{M_1^{k+n} M_2^k (k+1)^\beta \cdots (k+n)^\beta} \leqslant M_1 M_2.$$

Итак, если $|z_0| < 1/(M_1 M_2)$, то $f(\zeta)(\zeta - z_0 a)^{-1} \in B[[\zeta, 1/\zeta]]$. Теперь формула Рисса–Данфорда является прямым следствием определения 3.

Приведем пример ситуации, когда каждый коэффициент $b_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{n+k} a^k z^k$ при степени ζ^{n-1} ряда (4) имеет нулевой радиус сходимости для каждого $n > 0$.

Пример 2. Пусть $\gamma_n = 1/(n!)^n$. Рассмотрим множество B_γ всех степенных рядов $a(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m z^m \in \mathbb{C}[[z]]$, для которых $\sum\limits_{m=0}^{\infty} |c_m| \gamma_m < +\infty$. Тогда B_γ является банаховой алгеброй с нормой $\|a\| = \sum\limits_{m=0}^{\infty} |c_m| \gamma_m$. Если $a(z) = z$, то $\|a^m\| = \gamma_m$ (см. [1, §19]). Рассмотрим ряд $f(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n!)^n \zeta^n$. Очевидно, $f \in H(a)$, $\|a^n\| = 1/(n!)^n$ и $R_a(f) = 1$. Обратим внимание на коэффициенты $b_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{n+k} a^k z^k$ в (4) для $n > 0$, где $c_n = (n!)^n$. Так как $\sqrt[k]{(n+k)!^{n+k} \|a^k\|} \to \infty$, $k \to \infty$, то радиус сходимости $b_n(z)$ равен нулю.

Следствие 1 (формула Тейлора). *Пусть B — банахова алгебра, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in \mathbb{C}[[z]]_{\beta,M_1}$, a, $h \in B$ и $ha = ah$. Предположим, что a и h удовлетворяют следующему условию:*

$$\exists\, M_2, M_3 > 0 \qquad \exists\, n_0 \qquad \forall\, n > n_0\colon \quad \|a^n\| \leqslant \frac{M_2^n}{(n!)^\beta}, \qquad \|h^n\| \leqslant \frac{M_3^n}{(n!)^\beta}.$$

Тогда f является $(a+h)$-голоморфным и $f(z(a+h)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(za) h^n z^n$.

Рассмотрим приложение формулы Рисса–Данфорда (6) к решению некоторых операторных уравнений.

Следствие 2. *Пусть* a *— ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве* E *и* $\varphi(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ *— формальный степенной ряд над* $\mathbb{C}$. *Если* $\varphi \in \mathbb{C}[[z]]_{\beta, M_1}$, $c_0 \neq 0$, *и оператор* a *удовлетворяет условию* (5) *теоремы 3 с константой* M_2, *то для фиксированного* t_0, $|t_0| < 1/(M_1 M_2)$, *и для каждого* $v \in E$ *уравнение* $\varphi(t_0 a)u = v$ *имеет единственное решение*

$$u = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(\zeta - t_0 a)^{-1} v}{\varphi(\zeta)} d\zeta. \tag{8}$$

Следующее утверждение переносит классические вычисления из [8, § 5.6, пример 3] на случай степенного ряда с конечным радиусом сходимости.

Следствие 3. *Пусть* $k(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *— степенной ряд с радиусом сходимости* $R > 1$ *и* $|t_0| < 1$ *— такая константа, что ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|/|t_0|^n$ *сходится. Рассмотрим ряд* $\varphi(\zeta) = 1 + K(t_0/\zeta)$, *где* K *— преобразование Лапласа ряда* k. *Тогда для каждого* $v \in C[0,1]$ *сверточное интегральное уравнение Вольтерра*

$$u(x) + \int\limits_0^x k(x-y)u(y)\,dy = v(x)$$

имеет единственное непрерывное решение $u(x) = v(x) + \int\limits_0^x g(x-y)v(y)\,dy$, *где*

$$g(x) = \frac{t_0}{2\pi i} \oint \frac{e^{t_0 x/\zeta}}{\zeta^2 \varphi(\zeta)} d\zeta,$$

и интеграл в последней формуле понимается в смысле определения 3.

1. *Гельфанд И. М., Райков Д. М., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. – Москва: Наука, 1960. – 316 с.
2. *Dunford N., Schwartz I. T.* Linear operators. Pt. 3. Spectral operators. – New York; London: Interscience Publ., 1971. – 592 p.
3. *Grabiner S.* The use of formal power series to solve finite convolution integral equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – **30**. – P. 415–419.
4. *Grabiner S.* A formal power series operational calculus for quasinilpotent operators // Duke Math. J. – 1971. – **38**. – P. 641–658.
5. *Lysik G.* Non-analyticity in time of solutions to the KdV equation // J. Anal. and Appl. – 2004. – **23**, No 1. – P. 67–93.
6. *Lysik G.* Formal solutions of Burgers type equations // Funct. Approx. Comment. Math. – 2009. – **40**, No 1. – P. 33–43.
7. *Гефтер С. Л., Мокренюк В. Н.* Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$ и голоморфные решения некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. – 2005. – № 1. – С. 53–70.
8. *Taylor A. E.* Introduction to functional analysis. – New York: Wiley, 1958. – 423 p.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 25.10.2012

К. В. Вербініна, С. Л. Гефтер

Формула Рисса–Данфорда для формальних степеневих рядів класу Жевре

Класичне функціональне числення Рисса–Данфорда перенесено на випадок формальних степеневих рядів зі спеціальною властивістю a-голоморфності. Як наслідок побудоване числення використано для розв'язання деяких операторних рівнянь. Крім того, наведено явну формулу для резольвенти згорткового інтегрального рівняння Вольтерра, ядро якого є степеневим рядом зі скінченним радіусом збіжності.

K. V. Verbinina, S. L. Gefter

The Riesz–Dunford formula for the Gevrey formal power series

The classical Riesz–Dunford calculus is transferred to the case of formal power series endowed with special property of a-holomorphicity. As an application of the constructed calculus, we solve some operator equations. Moreover, an explicit formula for the resolvent is obtained for the Volterra convolution integral equation in the case where its kernel is a power series with finite radius of convergence.