Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

4 • 2013

МЕХАНІКА

УДК 517.36

А. С. Хорошун

Об абсолютной параметрической устойчивости сингулярно возмущенных систем

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Исследована абсолютная параметрическая устойчивость системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Построена матричнозначная функция, которая позволяет установить указанное свойство системы. Определена область в пространстве параметров, для всех значений параметров из которой абсолютная параметрическая устойчивость рассматриваемой системы имеет место.

Постановка задачи. Рассмотрим неточную сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, p), \\ \mu\dot{y} = f_2(x, y, p), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ — переменные, определяющие состояние системы в момент времени $t \in \mathbb{R}_+$. Векторные функции $f_1(x, y, p) \in \mathbb{R}^n$, $f_2(x, y, p) \in \mathbb{R}^m$ предполагаются непрерывно дифференцироваными по переменным x и y и непрерывно зависящими от векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\mu \in (0, 1]$ — малый параметр.

Приведем определение абсолютной параметрической устойчивости неточной системы.

Определение 1. Неточная система дифференциальных уравнений называется абсолютно параметрически устойчивой относительно области $P \subseteq \mathbb{R}^l$, если для всех $p \in P$ выполняются следующие условия:

1) существует единственное состояние равновесия $x^e(p)$ рассматриваемой системы;

2) $x^e(p)$ глобально асимптотически устойчиво.

Используя формулу конечных приращений Лагранжа для функций $f_1(x, y, p)$ и $f_2(x, y, p)$, систему (1) приведем к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, p)x + A_{12}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, p)y + C_1(p), \\ \mu\dot{y} = A_{21}(\widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{\widetilde{y}}, p)x + A_{22}(\widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{\widetilde{y}}, p)y + C_2(p), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$A_{11}(\widetilde{x},\widetilde{y},p)=\frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=\widetilde{x}\\ y=\widetilde{y}}}; \qquad A_{12}(\widetilde{x},\widetilde{y},p)=\frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=\widetilde{x}\\ y=\widetilde{y}}};$$

$$A_{21}(\widetilde{\widetilde{x}},\widetilde{\widetilde{y}},p)=\frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=\widetilde{\widetilde{x}}\\ y=\widetilde{\widetilde{y}}}}; \qquad A_{22}(\widetilde{\widetilde{x}},\widetilde{\widetilde{y}},p)=\frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=\widetilde{\widetilde{x}}\\ y=\widetilde{\widetilde{y}}}};$$

$C_1(p)=f_1(0,0,p)$; $C_2(0,0,p)=f_2(0,0,p)$; $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$; $\widetilde{\widetilde{x}}\in\mathbb{R}^n$; $\widetilde{y}\in\mathbb{R}^m$; $\widetilde{\widetilde{y}}\in\mathbb{R}^m$ — некоторые точки соответствующих пространств.

Относительно системы (1) сделаем следующие предположения.

Предположение 1. Пусть система уравнений (1) такова, что

1) существует значение параметра $p=p^*$ такое, что при этом значении параметра существует состояние равновесия $x=x^*$, $y=y^*$ рассматриваемой системы;

2) существуют такие положительные числа α, β, γ, $\delta<+\infty$, что выполняются следующие оценки:

$$\|A_{11}(x,y,p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)\|\leqslant\alpha, \qquad \|A_{12}(x,y,p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*)\|\leqslant\beta,$$
$$\|A_{21}(x,y,p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*)\|\leqslant\gamma, \qquad \|A_{22}(x,y,p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*)\|\leqslant\delta$$

для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $p\in P\in\mathbb{R}^l$;

3) матрицы $A_{11}(x^*,y^*,p^*)$ и

$$A=A_{22}(x^*,y^*,p^*)-A_{21}(x^*,y^*,p^*)A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)A_{12}(x^*,y^*,p^*)$$

невырождены.

Замечание 1. Отметим, что здесь и далее по тексту используется спектральная норма для матриц и евклидова норма для векторов.

Следует подчеркнуть, что в работе [1] рассматривалась система вида (1) с управлением, для которой, на основании применения векторной функции Ляпунова, были получены достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости и определено управление, позволяющее гарантировать эту характеристику системы. Если предположить, что управление отсутствует, то результаты работы [1] могут быть интерпретированы как достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости системы вида (1), которые, однако, требуют устойчивости линейных приближений подсистем системы (1). В данной работе для исследования устойчивости исходной системы будет использована матричнозначная функция Ляпунова. Это позволит отказаться от требования устойчивости линейного приближения медленной подсистемы, т. е. даст возможность расширить результаты работы [1]. Также будет определена область $P\subseteq\mathbb{R}^l$ абсолютной параметрической устойчивости исходной системы и множество значений параметра μ, при которых указанное свойство системы (1) сохраняется.

Анализ существования состояния равновесия исследуемой системы. Следуя результатам п. 2 работы [1], получим, что если выбрать величины α, β, γ и δ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\alpha<1 \tag{3}$$

и

$$\|A^{-1}\|\delta + \|A^{-1}\|[\gamma M(\alpha)\beta + \gamma\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\beta + \gamma M(\alpha)\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)\| +$$
$$+ \gamma\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)\| + \|A_{21}(x^*,y^*,p^*)\|M(\alpha)\beta +$$
$$+ \|A_{21}(x^*,y^*,p^*)\|\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\beta +$$
$$+ \|A_{21}(x^*,y^*,p^*)\|M(\alpha)\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)\|] < 1, \tag{4}$$

то для всех $p \in P$ и функций $f_1(x,y,p)$, $f_2(x,y,p)$ таких, что выполняются оценки из п. 2 предположения 1, где α, β, γ и δ выбраны выше, существует единственное состояние равновесия системы (2), суть системы (1).

Замечание 2. Поскольку при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ соотношения (3), (4) выполняются и функции, входящие в эти соотношения, очевидно, непрерывны по α, β, γ и δ, то величины $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ всегда могут быть определены.

Достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем. Пусть для системы уравнений (1) выполняются условия предположения 1. Обозначим $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ состояние равновесия системы (1), соответствующее некоторому значению параметра p.

Рассмотрим матричнозначную функцию следующего вида (см. [3–5]):

$$V(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x,y,\mu) \\ v_{21}(x,y,\mu) & v_{22}(y,\mu) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $v_{11}(x) = (x-x^e)^T P_1 (x-x^e)$; $v_{22}(y,\mu) = \mu(y-y^e)^T P_3 (y-y^e)$; $v_{21}(x,y,\mu) = v_{12}(x,y,\mu) = \mu(x-x^e)^T P_2 (y-y^e)$; $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $P_3 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметрические положительно определенные матрицы; $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — постоянная матрица. Выбрав вектор $\eta^T = (1,1)$, следуя [3], образуем скалярную функцию

$$v(x,y,\mu) = \eta^T V(x,y,\mu)\eta. \tag{6}$$

Учитывая, что для элементов матричнозначной функции (5) имеют место оценки

$$v_{11}(x) \geqslant \lambda_{\min}(P_1)\|x-x^e\|^2 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$v_{22}(y,\mu) \geqslant \mu\lambda_{\min}(P_3)\|y-y^e\|^2 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathbb{R}^m, \mu \in (0,1],$$
$$v_{12}(x,y,\mu) \geqslant -\mu(\lambda_{\max}(P_2P_2^T))^{1/2}\|x-x^e\|\|y-y^e\| \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ \mu \in (0,1],$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ — минимальное и максимальное собственные значения соответствующей матрицы, для скалярной функции (6) имеет место следующая оценка:

$$v(x,y,\mu) \geqslant u^T A(\mu) u, \qquad \text{для всех} \qquad (x,y,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times (0,1],$$

где

$$u^T = (\|x-x^e\|, \|y-y^e\|), \qquad A(\mu) = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(P_1) & -\mu(\lambda_{\max}(P_2P_2^T))^{1/2} \\ -\mu(\lambda_{\max}(P_2P_2^T))^{1/2} & \mu\lambda_{\min}(P_3) \end{pmatrix}.$$

Найдем производную функции (6) по времени в силу системы (1)

$$\dot{v}(x,y,\mu)\Big|_{(1)} \leqslant (\|x-x^e\|,\|y-y^e\|)D(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu)(\|x-x^e\|,\|y-y^e\|)^T,$$

где

$$D(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu) = \begin{pmatrix} A(\alpha,\gamma) & C(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu) \\ C(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu) & B(\beta,\delta,\mu) \end{pmatrix};$$

$$A(\alpha,\gamma) = \lambda_{\max}(A_{11}^T(x^*,y^*,p^*)P_1 + P_1A_{11}(x^*,y^*,p^*) + A_{21}^T(x^*,y^*,p^*)P_2^T +$$
$$+ P_2A_{21}(x^*,y^*,p^*)) + 2\|P_1\|\alpha + 2\|P_2\|\gamma;$$

$$B(\beta,\delta,\mu) = \lambda_{\max}(A_{22}^T(x^*,y^*,p^*)P_3 + P_3A_{22}(x^*,y^*,p^*)) + 2\|P_3\|\delta +$$
$$+ 2\mu\|P_2\|\beta + \mu\lambda_{\max}(A_{12}^T(x^*,y^*,p^*)P_2 + P_2^TA_{12}(x^*,y^*,p^*));$$

$$C(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu) = \|P_1A_{12}(x^*,y^*,p^*) + P_2A_{22}(x^*,y^*,p^*) + A_{12}^T(x^*,y^*,p^*)P_3\| +$$
$$+ \|P_1\|\beta + \|P_2\|\delta + \mu\|P_2\|\|A_{11}(x^*,y^*,p^*)\| + \mu\|P_2\|\alpha + \|P_3\|\gamma.$$

Используя полученные оценки, сформулируем теорему, которая определяет достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости неточной сингулярно возмущенной системы относительно некоторой области в пространстве параметров.

Теорема 1. *Пусть для неточной сингулярно возмущенной системы* (1) *выполняются условия предположения 1, построена матричнозначная функция* (5) *и для матриц* P_1, P_2, P_3, *величин* α, β, γ, δ *и всех* $0 < \mu \leqslant \mu^* < \dfrac{\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_3)}{\lambda_{\max}(P_2P_2^T)}$ *выполняются соотношения* (3), (4),

$$A(\alpha,\gamma) < 0, \tag{7}$$

$$A(\alpha,\gamma)B(\beta,\delta,\mu) - C^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu) > 0. \tag{8}$$

Тогда система (1) *абсолютно параметрически устойчива относительно области* P *для всех* $\mu \in (0,\mu^*]$.

Пример. В качестве примера применения предложенного подхода исследуем поведение решений неточной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений четвертого порядка со скалярным параметром

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 20y_1 - 0{,}2\cos(x_1+y_1+p) + 0{,}2, \\ \dot{x}_2 = 0{,}8x_2 - 20{,}2y_2 + \operatorname{arctg}(0{,}2(x_2+y_2)) + \pi p^5, \\ \mu\dot{y}_1 = x_1 - 4y_1 + 0{,}2\sin^2(p)\ln\dfrac{x_1+\sqrt{x_1^2+1}}{y_1+\sqrt{y_1^2+1}}, \\ \mu\dot{y}_2 = x_2 - 4{,}2y_2 - 0{,}2\cos(px_2) + \operatorname{arctg}(0{,}2y_2) + 0{,}2. \end{cases} \tag{9}$$

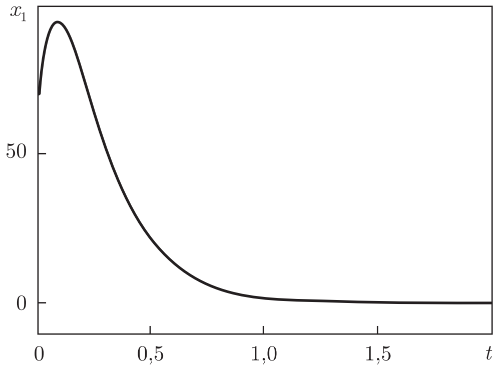

Рис. 1

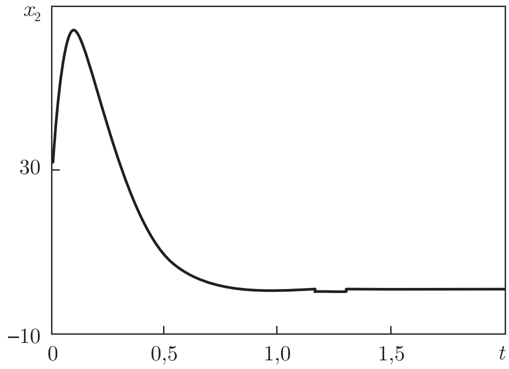

Рис. 2

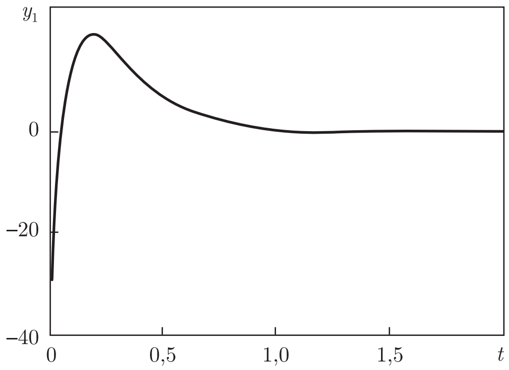

Рис. 3

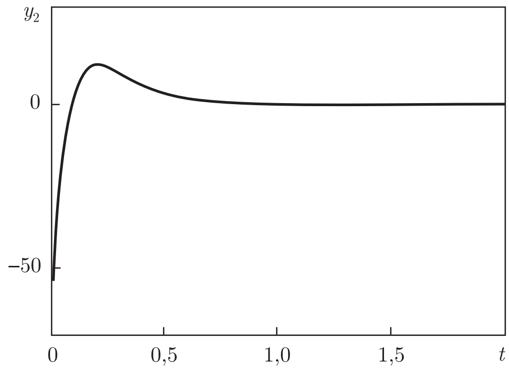

Рис. 4

Система (9) при $p^* = 0$ имеет состояние равновесия $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$ и для производных функций, входящих в ее состав, выполняются следующие равенства:

$$A_{11}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{12}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*) = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{22}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

и также для всех $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \in \mathbb{R}$, $y_2 \in \mathbb{R}$, $p \in [-1, 1]$

$$\|A_{11}(x_1, x_2, y_1, y_2, p) - A_{11}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*)\| \leqslant \alpha,$$

$$\|A_{12}(x_1, x_2, y_1, y_2, p) - A_{12}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*)\| \leqslant \beta,$$

$$\|A_{21}(x_1, x_2, y_1, y_2, p) - A_{21}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*)\| \leqslant \gamma,$$

$$\|A_{22}(x_1, x_2, y_1, y_2, p) - A_{22}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*)\| \leqslant \delta,$$

где $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0{,}12$. То есть все условия предположения 1 выполнены.

Построим матричнозначную функцию (5), где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

и определим верхнюю оценку для величины малого параметра: $\mu < 0{,}6$. Для системы (9) выполняются соотношения (3), (4), (7), (8) для всех $\mu \in (0, 0{,}32]$. Значит, согласно теореме 1, система (9) абсолютно параметрически устойчива относительно области $P = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \leqslant \leqslant 1\}$. На рис. 1–4 представлены графики, которые иллюстрируют поведение решений этой системы при значениях параметра $p = 0{,}9$, $\mu = 0{,}23$ и начальных значениях переменных $x_{1_0} = 70$, $x_{2_0} = 25$, $y_{1_0} = -30$, $y_{2_0} = -50$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Украины для поддержки научных исследований молодых ученых.

1. *Мартынюк А. А, Хорошун А. С.* К задаче стабилизации движения параметрической семьи нелинейных сингулярно возмущенных систем // Нелинейные колебания. – 2011. – **14**, № 2. – С. 238–254.
2. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.
3. *Martynyuk A. A.* Stability by Lyapunov's matrix function method with applications. – New York: Marcel Dekker, 1998. – 276 p.
4. *Martynyuk A. A.* Uniform asymptotic stability of a singularly perturbed system via the Lyapunov matrix-function // Nonlin. Analusis – 1987. – No 11. – P. 1–4.
5. *Martynyuk A. A., Miladzhanov V. G.* Stability investigation of autonomous singularly perturbed systems on the basis of matrix Lyapunov function // Diff. Uravn. – 1988. – No 24. – P. 416–424.
6. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 223 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 07.09.2012

А. С. Хорошун

Про абсолютну параметричну стійкість сингулярно збурених систем

Досліджено абсолютну параметричну стійкість системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Побудовано матричнозначну функцію, яка дозволяє встановити вказану властивість системи. Визначено область у просторі параметрів для всіх значень параметрів, з якої абсолютна параметрична стійкість системи, що розглядається, має місце.

A. S. Horoshun

On the absolute parametric stability of singularly perturbed systems

The absolute parametric stability of a singularly perturbed system of differential equations is investigated. A matrix-valued function which gives an ability to hold such property of the system is built. A region in the space of parameters, where the absolute parametrical stability of the investigated system holds for all values of parameters is determined.