УДК 519.854

В. О. Михайлюк

Наближення до оптимальних сублінійних алгоритмів реоптимізації обмежених задач про узагальнену виконуваність

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Для розв'язання задачі Ins$-\Lambda-CSP$ *(реоптимізація обмеженої* $\Lambda-CSP$ *задачі при додаванні довільного обмеження) існує оптимальний наближений алгоритм з адитивною помилкою з константною складністю. Відношення апроксимації алгоритму залежить від цілочислового розриву лінійної релаксації вихідної задачі.*

Теоретичні дослідження алгоритмів сублінійної складності є новим розділом теоретичної інформатики, що інтенсивно розвивається. Вони виникли внаслідок необхідності обробки величезних масивів інформації, що має місце в багатьох застосуваннях. Фінансові операції з мільярдами вхідних даних, аналіз інтернет-трафіку є прикладами сучасних наборів даних величезного обсягу. Аналіз та керування такими даними змусили переглянути традиційні поняття ефективних алгоритмів обробки інформації. Раніше під такими алгоритмами розуміли алгоритми поліноміальної складності від n (розмірності задачі). Зараз навіть лінійні алгоритми можуть бути занадто повільними. Таким чином, доцільною є розробка не тільки поліноміальних алгоритмів, а й сублінійних від n.

Говоритимемо, що алгоритм має сублінійну складність, якщо час його роботи оцінюється величиною $o(n)$, де n — розмірність входу. Для того щоб сублінійний алгоритм був точним, необхідно, щоб він використовував паралельну або некласичну обробку даних або враховував спеціальні обмеження на вхідні дані (наприклад, логарифмічний бінарний пошук у відсортованих масивах). Інакше такий алгоритм не в змозі прочитати весь вхід, щоб забезпечити деякий результат роботи. Тому сублінійні алгоритми повинні видавати результат без читання всього входу, а мати доступ до нього тільки деякими обмеженими порціями і бути випадковими, видаючи тільки наближені розв'язки. Ефективність таких алгоритмів вимірюється так званою складністю запитів (query complexity) — кількістю доступів до деякого оракулу, що обробляє вхід (порціями). Сублінійні алгоритми знайшли широке застосування в розділі теоретичної інформатики, який називається "перевірка властивостей проблем" (property testing) [1]. Перевірка властивостей проблем (релаксація проблем розпізнавання) пов'язана з розробкою сублінійних алгоритмів, що розрізняють об'єкти із заданою властивістю від об'єктів, далеких від неї (ε-далекі, ε-far). Наприклад, для задач теорії графів з n вершинами і обмеженим степенем вершин d властивість "бути ε-далекими від деякої властивості P" означає: треба додати або видалити щонайменше εdn ребер, щоб граф мав цю властивість P. Сублінійні алгоритми перевірки властивостей (тестери) знайшли своє застосування в теорії навчання і теорії наближення [1].

При розв'язанні дискретних задач оптимізації виникла ідея використання інформації про оптимальний (або близький до нього) розв'язок екземпляра проблеми для знаходження оптимального (або близького до нього) розв'язку екземпляра проблеми, одержаного в результаті незначних локальних модифікацій вихідного екземпляра. Даний підхід, названий реоптимізацією (і вперше запропонований в [2]), дозволяє в деяких випадках отримати, наприклад, кращу якість наближення (воно визначається як відношення наближеного значення цільової функції до оптимального і називається відношенням апроксимації) в локально модифікованих екземплярах, ніж у вихідних. Якщо для деяких оптимізаційних задач відношення апроксимації не можна покращити (наприклад, для класу всіх наближених алгоритмів з поліноміальною складністю), то таке відношення називають пороговим або оптимальним (алгоритм, на якому досягається це відношення, також називають пороговим або оптимальним). У [3] вдалося одержати точне значення порогового відношення апроксимації для реоптимізації узагальнених проблем про виконуваність спеціального класу для алгоритмів поліноміальної складності. У даній роботі це питання вивчається для реоптимізації проблем про узагальнену виконуваність у класі сублінійних алгоритмів, зокрема константної складності.

Основні означення. В роботі [4] пропонується наближений алгоритм з константною складністю для розв'язання задач про узагальнену виконуваність з обмеженим степенем (обмежені $\Lambda{-}CSP$ задачі). Час роботи цього алгоритму не залежить від розмірності екземплярів задачі. Вивчаються задачі з обмеженим степенем (bounded-degree model). У цій моделі число символів в алфавіті, максимальна розмірність (число входів предикатів), максимальний степінь (число обмежень, де зустрічається кожна змінна) і максимальна вага обмежень оцінюються зверху константами, що не залежать від n. Нехай I — екземпляр такої $\Lambda{-}CSP$ задачі. Оскільки алгоритм з константною складністю не може прочитати весь вхід I, припускаємо існування оракула O_I, який дає інформацію про I. Вказуючи значення змінної v та індексу i, O_I видає i-те обмеження P, де зустрічається v. Ефективність алгоритму вимірюється числом звернень до оракула O_I, яке називається складністю запитів (query complexity). У [4] отримано результат, аналогічний [5]: для кожної обмеженої $\Lambda{-}CSP$ задачі релаксація лінійного програмування (LP) разом з деяким алгоритмом округлення видає найкраще наближення серед всіх алгоритмів з константною складністю. При цьому результат є *безумовним* (не використовується унікальна ігрова гіпотеза, UGC [6]). Для формального подання результатів наведемо деякі означення.

Для цілого $k[k]$ позначає множину $\{1, \ldots, k\}$. Розмірністю предиката $P\colon [q]^k \to \{0, 1\}$ є число входів P, тобто в даному випадку k. Степінь змінної — це число обмежень, де вона зустрічається. Для обмеження P в CSP екземплярі $V(P)$ позначає множину змінних у P. Нехай β — вектор або множина, індексована елементами з множини V. Для підмножини $S \subseteq V$ визначимо $\beta_{|S} = \{\beta_v\}_{v \in S}$.

Означення 1. Задача про узагальнену виконуваність з обмеженим степенем (обмежена $\Lambda{-}CSP$ задача) визначається так: $\Lambda = ([q], s, t, w, \Pi)$, де $[q] = \{1, \ldots, q\}$ — скінченна область; s — максимальна розмірність предикатів; t — максимальний степінь змінних (число обмежень, де зустрічається змінна); w — максимальна вага предикатів і $\Pi = \{P\colon [q]^k \to \{0, 1\} \mid k \leqslant s\}$ — множина предикатів.

Означення 2. Екземпляр I обмеженої $\Lambda{-}CSP$ задачі визначається як

$$I = (V, S, P_S, w),$$

де $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — множина змінних із значеннями з $[q]$; P_S — множина обмежень, що складається з предикатів $P \in \Pi$, які застосовуються до послідовності S змінних Vрозміром не більше s. Більш точно, коли предикат P застосовується до послідовності

$S = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [n]^k$, то P вибирає змінні $V_{|S} = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ як вхідні; w є множиною ваг $\{w_P\}_{P \in P_S}$, приписаних до кожного обмеження $P \in P_S$, де $1 \leqslant w_P \leqslant w$.

Задача полягає у знаходженні приписування змінним $\beta \in [q]^V$, що максимізує загальну вагу виконаних обмежень, тобто $\sum_{P \in P_S} w_P P(\beta)$. Будемо вважати, що q, s, t, w обмежені і не залежать від розмірності задачі n.

Означення 3. У задачі про узагальнену виконуваність з обмеженим степенем Λ і множиною змінних V (обмеженій $\Lambda{-}CSP$ задачі) екземпляр $I = (V, S, P_S, w)$ подається оракулом O_I, таким, що O_I за двома числами $v \in V$, $i \in [t]$ видає $P \in P_S$, P є i-м обмеженням, де знаходиться v. Якщо таких обмежень не існує, то він видає деякий спеціальний символ $\perp$. Складністю запитів алгоритму (query complexity) є число звернень до O_I.

У [4] наводиться релаксація лінійного програмування (LP релаксація) для обмеженої $\Lambda{-}CSP$ задачі, яку назвемо BasicLP. Нехай $\mathrm{lp}(I)$ та $\mathrm{opt}(I)$ — відповідно значення цільової функції для оптимального розв'язку LP релаксації BasicLP екземпляра I та екземпляра I, а $\mathrm{val}(I, \beta)$ — значення, отримане приписуванням $\beta \in [q]^V$. Нехай w_I є сума всіх ваг обмежень з I. Визначимо $\overline{\mathrm{lp}}(I) = \mathrm{lp}(I)/w_I$, $\overline{\mathrm{opt}}(I) = \mathrm{opt}(I)/w_I$ і $\overline{\mathrm{val}}(I, \beta) = \mathrm{val}(I, \beta)/w_I$, а також криву цілочислового розриву і цілочисловий розрив LP релаксації $\Lambda{-}CSP$ задачі як $S_\Lambda(c) = \inf\limits_{I \in \Lambda, \overline{\mathrm{lp}}(I) \geqslant c} \{\overline{\mathrm{opt}}(I)\}$ і $\alpha_\Lambda = \inf\limits_{I \in \Lambda} \{\overline{\mathrm{opt}}(I)/\overline{lp}(I)\}$.

Означення 4. Значення x будемо називати (α, β)-наближенням x^*, якщо $\alpha x^* - \beta \leqslant x \leqslant x^*$. Алгоритм називається (α, β)-наближеним алгоритмом для $\Lambda{-}CSP$ задачі, якщо для довільного екземпляра I він обчислює (α, β)-наближення до $\mathrm{opt}(I)$ з ймовірністю, не меншою, ніж $2/3$.

Теорема 1 [4]. *Для довільної обмеженої $\Lambda{-}CSP$ задачі і $\varepsilon > 0$ існує алгоритм, який для екземпляра I з n змінними і $\overline{\mathrm{lp}}(I) = c \in (0, 1]$ з ймовірністю, не меншою, ніж 2/3, видає значення x, таке, що $S_\Lambda(c - \varepsilon)w_I - \varepsilon n \leqslant x \leqslant \mathrm{opt}(I)$. Для деякого фіксованого приписування β, такого, що $S_\Lambda(c - \varepsilon)w_I - \varepsilon n \leqslant \mathrm{val}(I, \beta) \leqslant \mathrm{opt}(I)$ для даної змінної v з I обчислює β_v за константний час.*

Маємо такий результат з безумовної неапроксимованості.

Теорема 2 [4]. *Для довільних обмеженої $\Lambda{-}CSP$ задачі, $c \in [0, 1]$ і $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що будь-який алгоритм для екземпляра I з n змінними і $\overline{\mathrm{opt}}(I) = c \in [0, 1]$, який з ймовірністю, не меншою, ніж 2/3, видає значення x, таке, що $(S_\Lambda(c) + \varepsilon)w_I - \delta n \leqslant x \leqslant \mathrm{opt}(I)$, вимагає $\Omega\left(\sqrt{n}\right)$ запитів.*

Використовуючи алгоритм з теореми 1 для екземпляра I, можна відрізнити випадок $\mathrm{opt}(I) \geqslant c w_I$ від випадку $\mathrm{opt}(I) \leqslant S_\Lambda(c - \varepsilon)w_I - \varepsilon n$. Навпаки, теорема 2 стверджує, що не можна відрізнити випадок $\mathrm{opt}(I) \geqslant c w_I$ від випадку $\mathrm{opt}(I) \leqslant (S_\Lambda(c) + \varepsilon)w_I - \delta n$ з константною складністю.

Оптимальні наближені алгоритми з константною складністю для обмежених $\boldsymbol{\Lambda{-}CSP}$ задач. Використовуючи визначення $S_\Lambda(c)$, α_Λ, означення 4 та теореми 1 і 2, отримаємо такий наслідок.

Наслідок 1. *Для довільної обмеженої $\Lambda{-}CSP$ задачі і $\varepsilon > 0$ існує $(\alpha_\Lambda - \varepsilon, \varepsilon n)$-наближений алгоритм з константною складністю. З іншого боку, для довільної обмеженої $\Lambda{-}CSP$ задачі і $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що довільний $(\alpha_\Lambda + \varepsilon, \delta n)$-наближений алгоритм вимагає $\Omega\left(\sqrt{n}\right)$ запитів.*

Означення 5. Говоритимемо, що для довільної обмеженої $\Lambda{-}CSP$ задачі існує оптимальний $(\alpha, \varepsilon n)$-наближений алгоритм з константною складністю, якщо виконуються такі умови:

для $\Lambda-CSP$ задачі і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $(\alpha - \varepsilon, \varepsilon n)$-наближений алгоритм з константною складністю;

для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої $\Lambda-CSP$ задачі не існує $(\alpha + \varepsilon, \delta n)$-наближеного алгоритму з константною складністю.

При цьому α називається *порогом відношення* апроксимації наближеного алгоритму, а сам алгоритм — оптимальним α-наближеним алгоритмом з адитивною помилкою з константною складністю.

Використовуючи наслідок 1 і означення 5, маємо

Наслідок 2. *Для довільної обмеженої* $\Lambda-CSP$ *задачі і* $\varepsilon > 0$ *існує оптимальний* $(\alpha_\Lambda, \varepsilon n)$*-наближений алгоритм з константною складністю.*

Реоптимізація обмежених $\Lambda-CSP$ задач. Поріг відношення апроксимації. Визначимо реоптимізаційний варіант обмеженої $\Lambda-CSP$ задачі. Нехай $I = (V, S, P_S, w)$ — екземпляр $\Lambda-CSP$ задачі. Будемо вважати, що $w_P = 1$ для довільного $P \in P_S$. Екземпляр $I' = (V, S', P_{S'}, w)$ отримується з I таким чином: $S' = S \bigcup \{i'_1, \ldots, i'_k\}$, де $\{i'_1, \ldots, i'_k\} \subseteq [n]^k$ при деякому $k \leqslant s$.

Задача Ins$-\Lambda-CSP$. Вхідні дані. Довільний екземпляр $I\Lambda-CSP$ задачі, x^* — оптимальний розв'язок екземпляра I.

Результат. Знайти оптимальний розв'язок екземпляра I' (отриманого з I, як описано вище) $\Lambda-CSP$ задачі, використовуючи x^*.

Мета. Знайти x, яке максимізує число виконаних обмежень екземпляра I'.

Теорема 3. *Якщо для довільної обмеженої* $\Lambda-CSP$ *задачі і* $\varepsilon > 0$ *існує* $(\rho - \varepsilon, \varepsilon n)$*-наближений алгоритм з константною складністю, то для задачі* Ins$-\Lambda-CSP$ *існує* $(\varphi(\rho) - \varepsilon_1, \varepsilon_1 n)$ *такий же алгоритм, де* $\varphi(\rho) = 1/(2 - \rho)$ *і* $\varepsilon_1 = \varepsilon\varphi(\rho)$.

Теорема 4. *Нехай A — це будь-який* $(\gamma - \varepsilon, \varepsilon n)$*-наближений алгоритм з константною складністю для задачі* Ins$-\Lambda-CSP$, *тоді* $\gamma \leqslant \varphi(\alpha_\Lambda)$.

Використовуючи теореми 3 і 4, отримаємо основний результат.

Теорема 5. *Для задачі* Ins$-\Lambda-CSP$ *і* $\varepsilon_1 > 0$ *існує оптимальний* $(\varphi(\alpha_\Lambda), \varepsilon_1 n)$*-наближений алгоритм з константною складністю.*

Таким чином, для задачі Ins$-\Lambda-CSP$ існує оптимальний $\varphi(\alpha_\Lambda)$-наближений алгоритм з адитивною помилкою з константною складністю.

Приклад застосування. Розглянемо задачу Max-3-Sat, що є варіантом обмеженої $\Lambda-CSP$ задачі, коли множина предикатів Π становить диз'юнкцію не більше трьох літералів. Щоб застосувати теорему 5, треба знайти цілочисловий розрив α_Λ LP релаксації задачі Max-3-Sat. Верхня оцінка (7/8) для α_Λ випливає з застосування алгоритму з теореми 1 (і наслідку 2).

Важливим є отримання нижніх оцінок цілочислового розриву. Безумовна нижня оцінка для α_Λ в класі алгоритмів константної складності одержана для Max-3-Sat в [7]. Зокрема, має місце твердження.

Теорема 6 [7]. Для довільного $\varepsilon > 0$ кожний $(7/8 + \varepsilon)$-наближений алгоритм для Max-3-Sat має складність запитів $\Omega(n + m)$, де n — число змінних, а m — число диз'юнкцій. Теорема залишається справедливою і для спеціального випадку, коли кожна змінна зустрічається в $O(1)$ диз'юнкціях і $m = O(n)$.

Отже, для задачі Max-3-Sat $\alpha_\Lambda = 7/8$, $\varphi(\alpha_\Lambda) = 8/9$ і, застосувавши теорему 5, отримаємо твердження.

Теорема 7. *Для задачі Ins-Max-3-Sat існує оптимальний* (8/9)*-наближений алгоритм з адитивною помилкою з константною складністю.*

Таким чином, результати цієї роботи є безумовними. Вони не залежать ні від істинності унікальної ігрової гіпотези UGC [6], ні від загальноприйнятої гіпотези теорії складності обчислень $P \neq NP$.

1. *Goldreich O., Goldwasser S., Ron D.* Property testing and its connection to learning and approximation abstract // Journal of the ACM. – 1998. – **45**, No 4. – P. 653–750.
2. *Archetti C., Bertazzi L., Speranza M. G.* Reoptimizing the travelling salesman problem // Networks. – 2003. – **42**, No 3. – P. 154–159.
3. *Михайлюк В. А., Сергиенко И. В.* Реоптимизация обобщенных проблем о выполнимости с аппроксимационно-устойчивыми предикатами // Кибернетика и систем. анализ. – 2012. – **47**, № 1. – С. 89–104.
4. *Yoshida Y.* Optimal costant-time approximation algorithms and (unconditional) inapproximability results for every bounded-degree CSP // In Proc. ACM Symp. on the Theory of Computing (STOC). – 2011. – P. 665–674.
5. *Raghavendra P.* Optimal algorithms and inapproximability results for every csp? // Proc. ACM Symposium on the Theory of Computing(STOC). – 2008. – P. 245–254.
6. *Khot S.* On the power of unique 2-prover 1-round games // STOC. – 2002. – P. 767–775.
7. *Bogdanov A., Obata K., Trevisan L.* A lower bound for testing 3-colorability in bounded-degree graphs // Proc. of IEEE Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS). – 2002. – P. 93–102.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 17.07.2012

В. А. Михайлюк

Приближение к оптимальным сублинейным алгоритмам реоптимизации ограниченных задач об обобщенной выполнимости

Для решения задачи Ins$-\Lambda-CSP$ *(реоптимизация ограниченной* $\Lambda-CSP$ *задачи при добавлении произвольного ограничения) существует оптимальный приближенный алгоритм с аддитивной ошибкой с константной сложностью. Отношение аппроксимации алгоритма зависит от целочисленного разрыва линейной релаксации исходной задачи.*

V. A. Mikhailyuk

Approximation to the optimal sublinear algorithms for the reoptimization of bounded-degree problems of a general feasibiliity

To solve the problem Ins$-\Lambda-CSP$ *(reoptimization of a bounded-degree* $\Lambda-CSP$ *problem under the insertion of an arbitrary constraint), there is an optimal constant-time approximation algorithm with additive error. The approximation ratio of the algorithm depends on the integral gap of a linear relaxation of the initial problem.*