УДК 519.6

Академік НАН України **І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин**

Метод інтерлінації вектор-функцій $\vec{w}(x, y, z, t)$ на системі вертикальних прямих і його застосування в міжсвердловинній сейсмічній томографії

Запропоновано метод побудови операторів інтерлінації вектор-функцій $\vec{w}(x, y, z, t)$ на системі довільно розміщених вертикальних прямих. Операторами обчислюється вектор $\vec{w}$ в кожній точці (x, y, z) між прямими для довільного моменту часу $t \geqslant 0$. Пропонується їх використовувати для побудови міжсвердловинної акселерометричної математичної моделі вмісту кори Землі на основі даних про вектор прискорення $\vec{w}(x, y, z, t)$ у кожній прямій свердловині Γ_k даної системи свердловин, отриманих акселерометрами при сейсмічному зондуванні кори Землі.

Дана робота присвячена формулюванню і дослідженню методу відновлення вектора $\vec{w}(x, y, z, t) = a_1(x, y, z, t)\vec{i} + a_2(x, y, z, t)\vec{j} + a_3(x, y, z, t)\vec{k}$ у кожній точці (x, y, z, t) між даною системою довільно розміщених вертикальних прямих $\Gamma_k = \{(x, y, z)\colon x = X_k, y = Y_k, -H \leqslant \leqslant z \leqslant 0\}$, $k = \overline{1, M}$, на основі даних $\vec{w}_k(z, t) = a_{1k}(z, t)\vec{i} + a_{2k}(z, t)\vec{j} + a_{3k}(z, t)\vec{k}$ про вектор $\vec{w}(x, y, z, t)$,

$$a_{1k}(z, t) = a_1(x_k, y_k, z, t); \qquad a_{2k}(z, t) = a_2(x_k, y_k, z, t); \qquad a_{3k}(z, t) = a_3(x_k, y_k, z, t).$$

Як одне з можливих застосувань методу пропонується його використання при побудові міжсвердловинної акселерометричної моделі кори Землі на основі даних сейсмічного зондування, коли функції $a_{ij}(z, t)$, $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, M}$, — компоненти вектора прискорення, виміряні акселерометрами у кожній точці z відповідних свердловин залежно від часу $t \geqslant 0$. Ці компоненти вектора прискорення пов'язані з сейсмічними коливаннями кори Землі, що виникають внаслідок землетрусу або штучно створених людиною вибухів.

Аналіз літературних джерел. Задача дослідження неоднорідних середовищ, яка є однією з найважливіших задач сучасності [3], на практиці широко використовує сейсмічну томографію — методологію оцінки властивостей Землі [4–11]. У загальній сейсмології вона є лише частиною сейсмічного зображення і, зазвичай, застосовується для більш спеціальних цілей — оцінки швидкостей поширення хвиль стиснення (P-хвиль, compressional waves) і хвиль зсуву фрагменту зображення (S-хвиль). Вона також може використовуватися для відновлення коефіцієнта Q послаблення коливань. Іншою областю сейсмічного зображення вмісту кори Землі є сейсмічна міграція, в якій оцінки властивостей включають коефіцієнт рефлективності (коефіцієнт, що характеризує здібність хвиль до відбиття) або рефлективність (reflection — відбиття).

Найпростіший випадок сейсмічної томографії полягає в оцінці швидкості P-хвиль. Для розв'язання цієї задачі розвинуто декілька методів: томографія часів прибуття — рефракційна (refraction traveltime tomography; refraction — заломлення); скінченно-частотна томографія часів прибуття (finite-frequency traveltime tomography); рефлексивна томографія часів прибуття (reflection traveltime tomography); томографія форм сейсмічних хвиль (waveform tomography). Сейсмічна томографія формулюється як обернена задача. У рефракційній томографії часів прибуття спостережуваними даними є перші часи t прибуття хвиль у точки вимірювання і параметрами моделі є повільність (slowness) $s = v^{-1}$, де v — швидкість поширення хвилі. В цьому випадку задачу можна сформулювати так: $t = Ls$, де L — відповідний оператор, який є матрицею шляхів променів (raypath matrix).

Рефракційна томографія часів прибуття є ефективною з обчислювальної точки зору, але має низьку роздільну здатність відновлення образу під поверхнею. Для отримання вищої роздільної здатності при відновленні образу потрібно відмовитись від нескінченно-частотної апроксимації променевої теорії (ray theory), що застосовна до часу хвильового "початку" і натомість вимірювати часи прибуття сейсмічних хвиль (або амплітуд) у часовому вікні деякої довжини з використанням кореляції (cross-correlation). Скінченно-частотна томографія враховує ефект дифракції (розсіювання) хвиль, що дозволяє одержувати зображення менших образів або аномалій. Матриці променевих шляхів замінюються об'ємнісними ядрами чутливості (volumetric sensitivity kernels), які часто в глобальній томографії називаються "бананово-горіховими" ядрами, оскільки їх форма нагадує банан, а його перетин — горіх. У скінченно-частотній томографії часи прибуття хвиль і амплітуди залежать від частоти хвиль, що приводить до покращення роздільної здатності.

Для найповнішого використання інформації в сейсмограмах використовується томографія форм хвиль, у якій сейсмограми є спостережуваними даними. В сейсмічних дослідженнях найвживанішою моделлю є акустичне хвильове рівняння, яке є апроксимацією еластичного поширення хвиль (elastic wave propagation — поширення пружних хвиль). Для розв'язання рівняння поширення акустичних хвиль розроблені схеми методу скінченних різниць, методу скінченних елементів. Томографія еластичних форм хвиль є значно складнішою, ніж томографія акустичних форм хвиль.

Згідно з наведеним вище коротким оглядом задач сейсмічної томографії, можна зробити висновок про те, що класичні методи обчислювальної математики, основані на використанні експериментальних даних про величину прискорення сейсмічних коливань у кожній точці прямих-свердловин залежно від глибини z, часу t і біжучих координат (x, y), а також координат (X_k, Y_k), $k = \overline{1, M}$, що характеризують геометричне розміщення всіх свердловин на поверхні, поки що не використовуються при розв'язанні задач сейсмічної томографії. Тобто на практиці виникає задача відновлення методами інтерлінації вектор-функцій $\vec{w}(x, y, z, t)$ за допомогою інформації про них у точках заданої системи ліній. Побудова операторів інтерлінації скалярних функцій n $(n \geqslant 2)$ змінних на нерегулярно розміщених лініях досліджувалася в роботі [12]. Тому актуальною є задача побудови математичної моделі розподілу вектора прискорення сейсмічних коливань між свердловинами за відомими розподілами прискорення у кожній точці всіх свердловин Γ_k, $k = \overline{1, M}$.

Зауваження. Припущення про існування вектор-функцій

$$\vec{w}_k(z, t) = a_{1k}(z, t)\vec{i} + a_{2k}(z, t)\vec{j} + a_{3k}(z, t)\vec{k}, \qquad k = \overline{1, M},$$

$$a_{1k}(z, t) = a_1(X_k, Y_k, z, t); \qquad a_{2k}(z, t) = a_2(X_k, Y_k, z, t); \qquad a_{3k}(z, t) = a_3(X_k, Y_k, z, t)$$

важко реалізувати на практиці, оскільки сучасні акселерометри дозволяють отримати значення вектора прискорення коливань лише в окремих точках $z = z_p$, $p = \overline{1, N}$. Але за допомогою цих даних — сейсмограм $\vec{w}_k(z_p, t)$, $p = \overline{1, N}$, можна побудувати деякі наближення $\vec{u}_k(z, t)$, $k = \overline{1, N}$ (у вигляді поліномів, сплайнів двох змінних тощо) до реальних розподілів $\vec{u}_k(z, t) \approx \vec{w}_k(z, t)$, $k = \overline{1, N}$, і ними користуватися у подальшому.

Основні твердження роботи. Введемо нумерацію у системі прямих Γ_k, $k=\overline{1,M}$, довільним чином, оскільки аналітична форма запропонованих у даній роботі операторів відновлення не залежить від способу нумерації.

Введемо систему базисних функцій $h_k(x,y)$, $k=\overline{1,M}$, з властивостями

$$h_k(X_p,Y_p)=\delta_{k,p}, \qquad k,p=\overline{1,M}, \tag{1}$$

$\delta_{k,p}$ — символ Кронекера.

Теорема 1. *Для кожної неперервної вектор-функції*

$$\vec{w}(x,y,z,t)=a_1(x,y,z,t)\vec{i}+a_2(x,y,z,t)\vec{j}+a_3(x,y,z,t)\vec{k}\in C(D)$$

$$C(D)=\{\vec{w}(x,y,z,t)=\vec{i}a_1(x,y,z,t)+\vec{j}a_2(x,y,z,t)+\vec{k}a_3(x,y,z,t)\colon$$

$$a_q(x,y,z,t)\in C(R^4),\ q=\overline{1,3}\},$$

$$\vec{w}(X_p,Y_p,z,t)=\vec{w}_p(z,t), \qquad p=\overline{1,M},$$

оператор

$$\overrightarrow{W}(x,y,z,t)=\sum_{k-1}^{M}\vec{w}_k(z,t)\cdot h_k(x,y) \tag{2}$$

є оператором інтерлінації [1] з властивостями

$$\overrightarrow{W}(x,y,z,t)\in C(D), \tag{3}$$

$$\overrightarrow{W}(X_p,Y_p,z,t)=\vec{w}_p(z,t), \qquad p=\overline{1,M}. \tag{4}$$

Наведемо явні формули (див. також [2]) побудови $h_k(x,y)$, $k=\overline{1,M}$, у вигляді алгебраїчних поліномів двох змінних степеня $M-1$.

Теорема 2. *Оператор $\overrightarrow{W}(x,y,z,t)$, у якому*

$$h_k(x,y)=h_{M,k}(x,y)=\frac{\displaystyle\prod_{i=1,i\neq k}^{M}((x-X_i)(X_k-X_i)+(y-Y_i)(Y_k-Y_i))}{\displaystyle\prod_{i=1,i\neq k}^{M}((X_k-X_i)^2+(Y_k-Y_i)^2)}, \quad k=\overline{1,M}, \tag{5}$$

для довільної сітки вузлів $(X_p,Y_p)\neq(X_q,Y_q)$, $p\neq q$, p, $q=\overline{1,M}$, є оператором інтерлінації функції $\vec{w}$ з властивостями (3), (4), *допоміжні функції якого є поліномами степеня $M-1$, $M\geqslant 2$.*

Формула (2) для обчислення $\overrightarrow{W}(x,y,z,t)$ при такому поліноміальному виборі допоміжних функцій h_k, $k=\overline{1,M}$, є глобальною формулою інтерлінації, оскільки для обчислення вектора $\overrightarrow{W}(x,y,z,t)$ у кожній точці (x,y,z,t) потрібно враховувати його сліди у всіх M прямих. Тобто такі формули для $\overrightarrow{W}(x,y,z,t)$ можуть використовуватись у деяких випадках для прогнозу розподілу $\vec{w}(x,y,z,t)$ між прямими Γ_k, $k=\overline{1,M}$, і навіть в околі області D, що є випуклою оболонкою прямих Γ_k, $k=\overline{1,M}$. Але слід пам'ятати, що навіть для поліномів від однієї змінної доведені теореми про те, що існують неперервні функції (наприклад $|x|$), для яких послідовність $P_M(x)$ інтерполяційних поліномів з рівномірно розміщеними вузлами інтерполяції на $[-1, 1]$ не збігається до цих функцій при $M \to \infty$. Тому використання в операторах інтерлінації допоміжних функцій $h_k(x, y)$, $k = \overline{1, M}$, у вигляді алгебраїчних поліномів від двох змінних відповідного степеня при довільному розміщенні вузлів (X_p, Y_p), $p = \overline{1, M}$, вимагає додаткових досліджень. Можна використати замість h_k, $k = \overline{1, M}$, такі допоміжні функції:

$$H_{k,\lambda}(x, y) = |h_k(x, y)|^\lambda \left(\sum_{p=1}^{M} |h_p(x, y)|^\lambda\right)^{-1}, \qquad k = \overline{1, M},$$

де λ — деяке додатне число.

Як функції $h_k(x, y)$, $k = \overline{1, M}$, можна використовувати також локальні сплайни. Наприклад, провівши тріангуляцію системи точок (X_p, Y_p), $p = \overline{1, M}$, у кожному трикутнику T_μ, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ з вершинами $P_k(X_k, Y_k)$, $k = \mu_1, \mu_2, \mu_3$; $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \{1, 2, \ldots, M\}$, побудуємо допоміжні функції

$$h_{\mu_1}(x, y) = \frac{\varphi_{\mu_2,\mu_3}(x, y)}{\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}}, \qquad h_{\mu_2}(x, y) = \frac{\varphi_{\mu_1,\mu_3}(x, y)}{\Delta_{\mu_2,\mu_1,\mu_3}}, \qquad h_{\mu_3}(x, y) = \frac{\varphi_{\mu_1,\mu_2}(x, y)}{\Delta_{\mu_3,\mu_1,\mu_2}},$$

$$\varphi_{p,q}(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ X_pl & Y_p & 1 \\ X_q & Y_q & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} = \begin{vmatrix} X_{\mu_1} & Y_{\mu_1} & 1 \\ X_{\mu_2} & Y_{\mu_2} & 1 \\ X_{\mu_3} & Y_{\mu_3} & 1 \end{vmatrix} = \varphi_{\mu_2,\mu_3}(X_{\mu_1}, Y_{\mu_1}).$$

Будуємо для кожного трикутника T_μ оператори інтерлінації $\overrightarrow{O}_\mu w$, $\overrightarrow{O} w$

$$\overrightarrow{O}_\mu w(x, y, z, t) = \vec{w}_{\mu_1}(z, t) h_{\mu_1}(x, y) + \vec{w}_{\mu_2}(z, t) h_{\mu_2}(x, y) + \vec{w}_{\mu_3}(z, t) h_{\mu_3}(x, y),$$

$$\overrightarrow{O}_\mu w(P_{\mu_1}, z, t) = \vec{w}_{\mu_1}(z, t); \quad \overrightarrow{O}_\mu w(P_{\mu_2}, z, t) = \vec{w}_{\mu_2}(z, t); \quad \overrightarrow{O}_\mu w(P_{\mu_3}, z, t) = \vec{w}_{\mu_3}(z, t),$$

$$\overrightarrow{O} w(x, y, z, t) = \overrightarrow{O}_\mu w(x, y, z, t), \qquad (x, y, z) \in T_\mu \times [-H, 0], \qquad T_\mu \subset D, \qquad t \geqslant 0.$$

Теорема 3. *Оператор* $\overrightarrow{O} w(x, y, z, t)$ *має такі властивості:*

а) він є оператором інтерлінації вектор-функцій чотирьох змінних $\vec{w}(x, y, z, t)$ *на системі прямих* Γ_k, $k = \overline{1, M}$*:*

$$\overrightarrow{O} w(X_k, Y_k, z, t) = \vec{w}_k(z, t), \qquad -H \leqslant z \leqslant 0, \qquad t \geqslant 0, \qquad k = \overline{1, M};$$

б) кожній неперервній вектор-функції $\vec{w}(x, y, z, t) \in C(\Omega)$,

$$\Omega = \left\{(x, y, z, t)\colon (x, y, z) \in \bigcup_{T_\mu \subset D} T_\mu \times [-H, 0],\ t \geqslant 0\right\}$$

цей оператор ставить у відповідність теж неперервну функцію $\overrightarrow{O} w(x, y, z, t)$*:*

$$\vec{w}(x, y, z, t) \in C(\Omega) \Rightarrow \overrightarrow{O}_M w(x, y, z, t) \in C(\Omega).$$

Для обчислення $\overrightarrow{O}_\mu w(x, y, z, t)$ *використовуються сліди вектора* $\vec{w}$ *лише у трьох прямих, що є вершинами трикутника* $(x, y) \in T_\mu$ $\forall z \in [-H, 0]$, $t \geqslant 0$.

Зауважимо, що: а) точність наближення істотно залежить від довжин сторін трикутників T_μ та величин їх кутів; б) використання локальних наближень не дозволяє проводити з їх допомогою прогноз за межами області Ω. Тому в подальшому планується проведення досліджень з метою розробки та використання інших глобальних формул інтерлінації функцій $\vec{w}$. Зокрема, планується використання сплайнів 3-го степеня від 2-х змінних на довільній сітці вузлів тріангуляції [14].

Зупинимося на можливому застосуванні запропонованого методу інтерлінації вектор-функцій. Якщо вектор-функція $\vec{w}(x, y, z, t)$ є вектором прискорення, то запропонований метод інтерлінації може служити міжсвердловинною акселерометричною математичною моделлю кори Землі, оскільки дозволяє обчислювати прискорення у кожній точці між свердловинами за допомогою слідів вектора прискорення — даних сейсмічної томографії — у всіх свердловинах залежно від глибини z і часу t.

Враховуючи, що свердловини Γ_k, $k = \overline{1, M}$, розміщені на поверхні нерегулярним чином (без аналітичної залежності між координатами свердловин, взагалі кажучи), побудова базисних допоміжних функцій $h_k(x, y)$, $k = \overline{1, M}$, повинна враховувати цю нерегулярність і забезпечувати при цьому збереження ізогеометричних властивостей, які мають експериментальні дані Γ_k, $k = \overline{1, M}$, $\vec{w}_k(z, t)$, $-H \leqslant z \leqslant 0$, $t \geqslant 0$, $k = \overline{1, M}$.

1. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 505 с.
2. *Guust Nolet.* A breviary of seismic tomography. – Cambridge Univ. Press, 2008. – 344 p.
3. *Berryman J. G.* Lectures notes on nonlinear inversion and tomography. I. Borehole seismic tomography. – Univ. of California, 1991. – 159 p.
4. *Иванссон С.* Межскважинная томография на проходящих волнах // Сейсмическая томография. С приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике / Под ред. Guust Nolet. Пер. с англ. А. Л. Левшина и Б. Г. Букчина. Гл. 7. – Москва: Мир, 1990. – 416 с.
5. *Азаров Н. Я., Яковлев Д. В.* Сейсмоакустический метод прогноза горногеологи-ческих условий эксплуатации угольных месторождений. – Москва: Недра, 1988. – 199 с.
6. *Анциферов А. В.* Теория и практика шахтной сейсморазведки. – Донецк: ООО “Алан”, 2003. – 312 с.
7. *Towfighi S., Kundu T., Ehsani M.* Elastic wave propagation in circumferential direction in anisotropic cylindrical curved plates // J. of Appl. Mech., 2002. – **69**. – P. 283–291.
8. *Красножон М. Д., Козаченко В. Д.* Комплексна інтерпретація матеріалів ГДС з використанням комп’ютерної технології “ГЕОПОШУК”. – Київ: УкрДГРІ. 2007. – 254 с.
9. *Капутин Ю. Е.* Горные компьютерные технологии и геостатистика. – Санкт-Петербург: Недра, 2002. – 424 с.
10. *Shearer P. M.* Introduction to seismology. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 412 p.
11. *Stein S., Wysession M.* An introduction to seismology, earthquakes and Earth structure. – Oxford: Blackwell, 2003. – 512 p.
12. *Литвин О. М., Литвин О. О., Денисова О. І.* Побудова 2d кубічних інтерполяційних сплайнів класу C на тріангульованій сітці вузлів та їх застосування в розвідці корисних копалин // Вісн. Запорізьк. нац. ун-ту, 2011. – № 1. – С. 66–74.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ
Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 30.05.2012

Академик НАН Украины **И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин**

Метод интерлинации вектор-функций $\vec{w}(x, y, z, t)$ на системе вертикальных прямых и его применение в межскважинной сейсмической томографии

Предложен метод построения операторов интерлинации вектор-функций $\vec{w}(x, y, z, t)$ *на системе произвольно размещенных вертикальных прямых. Метод позволяет вычислять вектор* $\vec{w}$ *в каждой точке* (x, y, z) *между прямыми для произвольного момента времени* $t \geqslant 0$. *Предлагается его применение для построения межскважинной акселерометрической модели коры Земли на основе данных о векторе ускорения* $\vec{w}(x, y, z, t)$, *полученных акселерометрами в каждой скважине данной системы прямых-скважин при сейсмическом зондировании.*

Academician of the NAS of Ukraine **I. V. Sergienko, O. N. Lytvyn, O. O. Lytvyn**

The method of the interlineation of vector-functions $\vec{w}(x, y, z, t)$ on a system of vertical straight lines and its application to the interhole seismic tomography

A method of construction of the operators of interlineation of vector-functions $\vec{w}(x, y, z, t)$ *on a system of arbitrarily placed vertical straight lines is offered. The method allows one to calculate the vector* $\vec{w}$ *at each point* (x, y, z) *between the specified straight lines for any moment of time* $t \geqslant 0$. *It is proposed to use the operators for the construction of a model of Earth's crust on the basis of data of seismic sounding on a vector of acceleration* $\vec{w}(x, y, z, t)$ *measured by accelerometers in each hole of the given system of holes at the seismic sounding.*