УДК 517.956.222

Т. Н. Зинченко

Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы дифференциальных уравнений на замкнутом многообразии исследованы в расширенной соболевской шкале. Она состоит из всех гильбертовых пространств, интерполяционных относительно гильбертовой соболевской шкалы. Установлены теоремы о разрешимости эллиптических систем в расширенной соболевской шкале. Получена априорная оценка решений и исследована их локальная регулярность.

Пространства Соболева играют фундаментальную роль в теории эллиптических дифференциальных уравнений. Линейные эллиптические операторы обладают рядом характерных свойств в шкалах изотропных соболевских пространств: нетеровость, априорные оценки решений, локальное повышение гладкости решений. Эти свойства имеют важные приложения, причем наиболее содержательные результаты получаются в случае гильбертовой шкалы (см., например, [1, 2]).

В этой связи несомненный интерес представляют гильбертовы функциональные пространства, интерполяционные относительно гильбертовой соболевской шкалы. Поскольку при интерполяции наследуется ограниченность линейных операторов, а также их нетеровость, то шкалы этих пространств служат эффективным инструментом для исследования эллиптических операторов. Класс всех таких интерполяционных пространств — расширенная соболевская шкала — конструктивно описан и изучен в [3, 4 (п. 2.4)]. Он образован пространствами Хермандера [5, с. 54], в которых показателем гладкости служит произвольная радиальная функция, RO-меняющаяся на $+\infty$.

В настоящей работе исследованы эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы линейных дифференциальных уравнений в расширенной соболевской шкале на замкнутом гладком многообразии. Установлены теоремы о разрешимости эллиптических систем и о свойствах их решений в этой шкале.

Равномерно эллиптические системы в расширенной соболевской шкале на $\mathbb{R}^n$ изучены ранее в [6, 7]. Для более узкого класса пространств Хермандера (уточненная соболевская шкала) теория эллиптических операторов изложена в [4, 8]. Отметим, что в последнее время пространства Хермандера и их различные аналоги, именуемые пространствами обобщенной гладкости, вызывают значительный интерес с точки зрения приложений [9–12].

1. Постановка задачи. Пусть Γ — бесконечно гладкое замкнутое (т. е. компактное и без края) многообразие размерности $n \geqslant 1$. Предполагается, что на Γ задана некоторая C^∞-плотность dx. Комплексные линейные топологические пространства $C^\infty(\Gamma)$ основных функций и $\mathcal{D}'(\Gamma)$ обобщенных функций (распределений) на Γ рассматриваются как взаимно антидвойственные относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma, dx)$. Это расширение обозначаем через $(h, \omega)_\Gamma$, где $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ и $\omega \in C^\infty(\Gamma)$. Отметим, что в работе функции и распределения предполагаются комплекснозначными, причем последние трактуются как антилинейные функционалы.

На многообразии Γ рассматривается система p линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{p} A_{j,k}u_k = f_j, \qquad j = 1, \ldots, p. \tag{1}$$

Здесь $A_{j,k}$, где $j, k = 1, \ldots, p$, — скалярные линейные дифференциальные операторы на Γ с коэффициентами класса $C^{\infty}(\Gamma)$. Соотношения (1) понимаются как равенства распределений на Γ.

Запишем систему (1) в матричной форме: $Au = f$, где $A := (A_{j,k})_{j,k=1}^{p}$ — матричный дифференциальный оператор, а $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_p)$ и $f := \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_p)$ — функциональные столбцы, принадлежащие $(\mathcal{D}'(\Gamma))^p$.

Предполагается, что система (1) эллиптическая на Γ по Дуглису–Ниренбергу [1, с. 51], т. е. существуют целые числа $l_1, \ldots, l_p$ и $m_1, \ldots, m_p$ такие, что:

i) $\mathrm{ord}\, A_{j,k} \leqslant l_j + m_k$ для всех j, $k = 1, \ldots, p$ (если $l_j + m_k < 0$, то $A_{j,k} \equiv 0$);

ii) $\det(a_{j,k}^{(0)}(x, \xi))_{j,k=1}^{p} \neq 0$ для произвольных точки $x \in \Gamma$ и ковектора $\xi \in T_x^*\Gamma \setminus \{0\}$.

Здесь $a_{j,k}^{(0)}(x, \xi)$ — главный символ дифференциального оператора $A_{j,k}$ в случае $\mathrm{ord}\, A_{j,k} = l_j + m_k$, либо $a_{j,k}^{(0)}(x, \xi) \equiv 0$ в противном случае. (Как обычно, $T_x^*\Gamma$ обозначает кокасательное пространство к многообразию Γ в точке x).

Отметим, что числа l_j и m_k, где j, $k = 1, \ldots, p$, можно выбрать так, чтобы все $l_j \leqslant 0$ (даже $\max\{l_1, \ldots, l_p\} = 0$) и все $m_k \geqslant 0$. Если все $l_j = 0$, то система (1) называется эллиптической по Петровскому.

Введем функциональные пространства, в которых исследуется система (1). Они параметризованы функциональным параметром $\varphi \in \mathrm{RO}$, где RO — множество всех измеримых по Борелю функций $\varphi\colon [1, \infty) \to (0, \infty)$, для которых существуют числа $\alpha > 1$ и $c \geqslant 1$ такие, что $c^{-1} \leqslant \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leqslant c$ для любых $t \geqslant 1$ и $\lambda \in [1, \alpha]$ (постоянные α и c зависят от $\varphi \in \mathrm{RO}$). Такие функции называют RO(или OR)-меняющимися на бесконечности. Класс RO-меняющихся функций введен В. Г. Авакумовичем в 1936 г. и достаточно полно изучен (см. [13 (прил. 1), 14 (п. 2.0–2.2)]).

Определим необходимые нам функциональные пространства сначала на $\mathbb{R}^n$, а потом на многообразии Γ; при этом мы следуем [4, п. 2.4.2].

Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Линейное пространство $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех медленно растущих распределений w в $\mathbb{R}^n$ таких, что их преобразование Фурье $\widehat{w}$ локально суммируемо по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Здесь $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. В пространстве $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ определено скалярное произведение распределений w_1 и w_2 по формуле

$$(w_1, w_2)_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle) \widehat{w_1}(\xi) \overline{\widehat{w_2}(\xi)}\, d\xi.$$

Оно задает на $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ структуру гильбертова пространства и определяет норму $\|w\|_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)} := (w, w)_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)}^{1/2}$.

Пространство $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — гильбертов изотропный случай пространств $\mathcal{B}_{p,k}$, введенных и систематически исследованных Л. Хермандером [5, п. 2.2]. Именно, $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}$, если $p = 2$ и $k(\xi) = \varphi(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Определим теперь пространства на многообразии Γ. Произвольно выберем конечный атлас из C^∞-структуры на Γ, образованный локальными картами $\alpha_j\colon \mathbb{R}^n \leftrightarrow U_j$, где $j = 1,\dots,r$. Здесь открытые множества U_j составляют покрытие многообразия Γ. Пусть функции $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, где $j = 1,\dots,r$, образуют разбиение единицы на Γ, удовлетворяющее условию $\operatorname{supp}\chi_j \subset U_j$.

Линейное пространство $H^{\varphi}(\Gamma)$ состоит из всех распределений $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, что $(\chi_j h)\circ\alpha_j \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ для каждого $j = 1,\dots,r$. Здесь $(\chi_j h)\circ\alpha_j$ — представление распределения $\chi_j h$ в локальной карте α_j. В пространстве $H^{\varphi}(\Gamma)$ определено скалярное произведение распределений h_1 и h_2 по формуле

$$(h_1,h_2)_\varphi := \sum_{j=1}^{r}((\chi_j h_1)\circ\alpha_j, (\chi_j h_2)\circ\alpha_j)_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Оно задает на $H^{\varphi}(\Gamma)$ структуру гильбертова пространства и определяет норму $\|h\|_\varphi := (h,h)_\varphi^{1/2}$. Пространство $H^{\varphi}(\Gamma)$ с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора атласа и разбиения единицы [4, с. 139, теорема 2.21]. Это пространство сепарабельно; для него выполняются непрерывные и плотные вложения $C^\infty(\Gamma) \hookrightarrow H^{\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Gamma)$.

Если $\varphi(t) = t^s$ для всех $t \geqslant 1$ при некотором $s \in \mathbb{R}$, то $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) =: H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{\varphi}(\Gamma) =: H^{(s)}(\Gamma)$ есть (гильбертовы) пространства Соболева порядка s, заданные на $\mathbb{R}^n$ и Γ соответственно.

Класс пространств $\{H^{\varphi}(\Gamma) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ называем расширенной соболевской шкалой на Γ.

Матричный дифференциальный оператор A является ограниченным оператором

$$A\colon \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma) \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma) \qquad \text{для каждого} \qquad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{2}$$

Здесь и далее $\rho(t) := t$ при $t \geqslant 1$. Поскольку $\varphi\rho^{m_k}, \varphi\rho^{-l_j} \in \mathrm{RO}$, то определены пространства, фигурирующие в (2). Изучим свойства оператора (2).

2. Результаты. Обозначим через A^+ матричный дифференциальный оператор, формально сопряженный к A относительно формы $(\cdot,\cdot)_\Gamma$; он определяется условием $(Au,v)_\Gamma = (u,A^+v)_\Gamma$ для любых u, $v \in (C^\infty(\Gamma))^p$. Здесь и далее $(f,v)_\Gamma = (f_1,v_1)_\Gamma + \dots + (f_p,v_p)_\Gamma$ для вектор-функций $f := (f_1,\dots,f_p)$ и $v := (v_1,\dots,v_p)$. Эллиптичность (по Дуглису–Ниренбергу) системы $Au = f$ эквивалентна эллиптичности формально сопряженной системы $A^+v = g$. Положим

$$N := \{u \in (C^\infty(\Gamma))^p\colon Au = 0 \text{ на } \Gamma\},$$
$$N^+ := \{v \in (C^\infty(\Gamma))^p\colon A^+v = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Напомним, что линейный ограниченный оператор $T\colon E_1 \to E_2$, где E_1 и E_2 — банаховы пространства, называется нетеровым, если его ядро $\ker T$ и коядро $\operatorname{coker} T := E_2/T(X)$ конечномерны. У нетерового оператора T область значений $T(X)$ замкнута в E_2, а индекс $\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim\operatorname{coker} T$ конечен.

Теорема 1. *Ограниченный оператор* (2) *нетеров для произвольного функционального параметра* $\varphi \in \mathrm{RO}$. *Ядро этого оператора равно* N, *а область значений состоит из всех вектор–функций* $f \in \bigoplus\limits_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)$ *таких, что* $(f, v)_\Gamma = 0$ *для любого* $v \in N^+$. *Индекс оператора* (2) *равен* $\dim N - \dim N^+$ *и не зависит от* φ.

В случае, когда $N = \{0\}$ и $N^+ = \{0\}$, оператор (2) является изоморфизмом. В общей ситуации изоморфизм удобно задавать с помощью следующих проекторов.

Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Разложим пространства, в которых действует нетеров оператор (2), в прямые суммы (замкнутых) подпространств:

$$\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma) = N \dotplus \left\{u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)\colon (u, w)_\Gamma = 0 \text{ для всех } w \in N\right\},$$

$$\bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma) = N^+ \dotplus \left\{f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)\colon (f, v)_\Gamma = 0 \text{ для всех } v \in N^+\right\}.$$

Обозначим через P и P^+ соответственно проекторы пространств $\bigoplus\limits_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)$ и $\bigoplus\limits_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)$ на вторые слагаемые в указанных суммах параллельно первым слагаемым. Эти проекторы (как отображения) не зависят от φ.

Теорема 2. *Сужение оператора* (2) *на* $P\Big(\bigoplus\limits_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)\Big)$ *является изоморфизмом*

$$A\colon P\left(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)\right) \leftrightarrow P^+\left(\bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)\right) \qquad \text{для каждого} \qquad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{3}$$

Для решения эллиптического уравнения $Au = f$ выполняется следующая априорная оценка в расширенной соболевской шкале.

Теорема 3. *Пусть произвольно заданы параметры: функциональный* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *и числовой* $\sigma > 0$. *Тогда существует число* $c = c(\varphi, \sigma) > 0$ *такое, что для любых вектор-функций*

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma), \qquad f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma), \tag{4}$$

удовлетворяющих уравнению $Au = f$ *на* Γ, *справедлива априорная оценка*

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k}}\right)^{1/2} \leqslant c\left(\sum_{j=1}^{p} \|f_j\|^2_{\varphi\rho^{-l_j}}\right)^{1/2} + c\left(\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Если $N = \{0\}$, то второе слагаемое в правой части неравенства (5) можно опустить.

Исследуем локальную регулярность решения эллиптической системы $Au = f$. Пусть V — произвольное открытое непустое подмножество многообразия Γ. Обозначим

$$H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(V) := \{h \in \mathcal{D}'(\Gamma)\colon \chi h \in H^{\varphi}(\Gamma) \text{ для всех } \chi \in C^\infty(\Gamma),\ \operatorname{supp}\chi \subset V\}.$$

Топология в линейном пространстве $H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(V)$ задается с помощью полунорм $h \mapsto \|\chi h\|_{\varphi}$, где χ — такое, как в определении этого пространства. Если $V = \Gamma$, то $H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(V) = H^{\varphi}(\Gamma)$.

Теорема 4. *Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Предположим, что вектор-функция $u \in (\mathcal{D}'(\Gamma))^p$ является решением уравнения $Au = f$ на V, где $f_j \in H^{\varphi\varrho^{-l_j}}_{\mathrm{loc}}(V)$ для всех $j = 1, \ldots, p$. Тогда $u_k \in$ $\in H^{\varphi\varrho^{m_k}}_{\mathrm{loc}}(V)$ для всех $k = 1, \ldots, p$.*

В качестве приложения этой теоремы приведем следующее достаточное условие непрерывности компонент решения u и их обобщенных производных.

Теорема 5. *Пусть произвольно заданы целые числа $k \in \{1, \ldots, p\}$, $r \geqslant 0$ и функциональный параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$, удовлетворяющий условию*

$$\int\limits_1^{\infty} t^{2r+n-1-2m_k} \varphi^{-2}(t)\, dt < \infty. \tag{6}$$

Предположим, что вектор-функция $u \in (\mathcal{D}'(\Gamma))^p$ является решением уравнения $Au =$ $= f$ на открытом множестве $V \subseteq \Gamma$, где $f_j \in H^{\varphi\varrho^{-l_j}}_{\mathrm{loc}}(V)$ для всех $j = 1, \ldots, p$. Тогда компонента u_k решения имеет на множестве V непрерывные производные до порядка r включительно: $u_k \in C^r(V)$.

Отметим, что условие (6) не только достаточное в теореме 5, но и необходимое на классе всех рассматриваемых решений u.

3. Доказательства. Приведем вкратце обоснование теорем 1–5.

Теорема 1 известна в соболевском случае, когда $\varphi = \varrho^s$ и $s \in \mathbb{R}$ (см., например, [1, с. 52, теорема 3.2.1]). Для произвольного $\varphi \in \mathrm{RO}$ она доказывается с помощью интерполяции с функциональным параметром соответствующих пространств Соболева. Определение и свойства этой интерполяции приведены в [4, пп. 1.1, 2.4.2]. Выберем произвольно числа $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 > \sigma_1(\varphi)$, где $\sigma_0(\varphi)$ и $\sigma_1(\varphi)$ — нижний и верхний индексы Матушевской функции φ [14, с. 68], и рассмотрим ограниченные нетеровы операторы

$$A\colon \bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_r+m_k)}(\Gamma) \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_r-l_j)}(\Gamma) \qquad \text{для} \qquad r \in \{0, 1\}, \tag{7}$$

действующие в соболевских пространствах. Определим интерполяционный функциональный параметр ψ по формулам $\psi(t) := t^{-s_0/(s_1-s_0)}\varphi(t^{1/(s_1-s_0)})$ при $t \geqslant 1$ и $\psi(t) := \varphi(1)$ при $0 < t < 1$. Применив интерполяцию с параметром ψ к (7), получим ограниченный оператор (2)

$$A\colon \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\varrho^{m_k}}(\Gamma) = \left[\bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_0+m_k)}(\Gamma), \bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_1+m_k)}(\Gamma)\right]_{\psi} \to$$

$$\to \left[\bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_0-l_j)}(\Gamma), \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_1-l_j)}(\Gamma)\right]_{\psi} = \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\varrho^{-l_j}}(\Gamma).$$

Здесь воспользовались интерполяционными теоремами 1.5 и 2.22 из монографии [4, сс. 32, 140]. Согласно еще одной интерполяционной теореме 1.7 из [4, с. 35], нетеровость этого оператора и другие его свойства, указанные в теореме 1, являются следствием нетеровости операторов (7), имеющих общее ядро и одинаковый индекс.

Теорема 2 вытекает из теоремы 1. В самом деле, N — ядро, а $P^{+}\Big(\bigoplus\limits_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma)\Big)$ — область значений оператора (2) для любого $\varphi \in \mathrm{RO}$, как утверждает теорема 1. Следовательно, ограниченный оператор (3) — биекция. Поэтому он является взаимно непрерывным оператором (т. е. изоморфизмом) в силу теоремы Банаха об обратном операторе, что и требовалось доказать.

Докажем теорему 3. Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$ и $\sigma > 0$. Обозначим для краткости

$$\mathcal{X} := \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma), \qquad \mathcal{Y} := \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma) \qquad \text{и} \qquad \mathcal{Z} := \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}(\Gamma).$$

Пусть вектор-функции (4) такие, что $Au = f$ на Γ. Для них априорная оценка (5) следует из неравенств

$$\|Pu\|_{\mathcal{X}} \leqslant c_1\|f\|_{\mathcal{Y}} \qquad \text{и} \qquad \|(1-P)u\|_{\mathcal{X}} \leqslant c_2\|u\|_{\mathcal{Z}}.$$

Здесь c_1 — норма оператора, обратного к (3) (заметим, что $APu = f$), а c_2 — норма оператора $1 - P\colon \mathcal{X} \to N$, где N — конечномерное подпространство в $\mathcal{Z}$.

Докажем теорему 4. Пусть вектор-функции u и f такие, как в условии этой теоремы. В специальном случае, когда $V = \Gamma$, она вытекает из теоремы 1. Действительно, на основании последней можем записать $f = Av$ для некоторого $v \in \bigoplus\limits_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)$. Отсюда $w := u - v \in N$ и $u = v + w \in \bigoplus\limits_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma)$.

В общей ситуации теорема 4 выводится из рассмотренного выше случая $V = \Gamma$ следующим образом. Выберем произвольно функции $\chi, \eta \in C^{\infty}(\Gamma)$ такие, что их носители лежат в V и $\eta \equiv 1$ в окрестности носителя функции χ. Переставив матричный дифференциальный оператор A и оператор умножения на функцию χ, можем записать

$$A(\chi u) = A(\chi\eta u) = \chi A(\eta u) + A'(\eta u) = \chi f + A'(\eta u) \qquad \text{на} \qquad \Gamma.$$

Здесь $A' = (A'_{j,k})_{j,k=1}^{p}$ — некоторый матричный дифференциальный оператор с коэффициентами класса $C^{\infty}(\Gamma)$, удовлетворяющий условию $\operatorname{ord} A'_{j,k} \leqslant \operatorname{ord} A_{j,k} - 1$. Следовательно, для каждого целого $r \geqslant 1$ верна цепочка импликаций

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-r}}_{\mathrm{loc}}(V) \Rightarrow \chi f + A'(\eta u) \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j-r+1}}(\Gamma) \Rightarrow \chi u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-r+1}}(\Gamma).$$

Последняя из них выполняется в силу теоремы 1, доказанной в случае $V = \Gamma$. Отсюда ввиду произвольности указанного выбора функции χ делаем вывод, что

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-r}}_{\mathrm{loc}}(V) \Rightarrow u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-r+1}}_{\mathrm{loc}}(V). \tag{8}$$

Выбрав теперь целое $\sigma \gg 1$ такое, что $u \in \bigoplus\limits_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}(\Gamma)$ (для каждого $u \in (\mathcal{D}'(\Gamma))^p$ это всегда можно сделать), и применив импликацию (8) последовательно для $r = \sigma$, $r = \sigma - 1$, …, $r = 1$, выводим требуемое включение $u \in \bigoplus\limits_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}_{\mathrm{loc}}(V)$.

Теорема 5 следует из теоремы 4 и того факта, что условие (6) эквивалентно вложению $H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma) \hookrightarrow C^r(\Gamma)$. Он вытекает из теоремы вложения Л. Хермандера [5, с. 59] (ср. с [4, с. 103]).

Автор выражает благодарность А. А. Мурачу за руководство работой.

1. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фунд. напр. Т. 63. – Москва: ВИНИТИ, 1990. – С. 5–129.
2. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1–144.
3. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Об эллиптических операторах на замкнутом компактном многообразии // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 29–35.
4. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Институт математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно на arXiv:1106.3214.).
5. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.
6. *Мурач А. А.* Об эллиптических системах в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 391–399.
7. *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 11. – С. 1477–1491.
8. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No 2. – P. 211–281.
9. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem. – Berlin: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
10. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
11. *Jacob N.* Pseudodifferential operators and Markov processes. Vols. 1–3. – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. – xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.
12. *Nicola F., Rodino L.* Global pseudodifferential calculus on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – x+306 p.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.
14. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.

Институт математики НАН Украины, Киев *Поступило в редакцию 04.09.2012*

Т. М. Зінченко

Еліптичні системи в розширеній соболєвській шкалі

Еліптичні за Дуглісом–Ніренбергом системи диференціальних рівнянь на замкненому гладкому многовиді досліджені в розширеній соболевській шкалі. Вона складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних відносно гільбертової соболєвської шкали. Встановлено теорему про розв'язність еліптичних систем в розширеній соболєвській шкалі. Отримано апріорну оцінку розв'язків та досліджено їх локальну регулярність.

T. N. Zinchenko

Elliptic systems in the extended Sobolev scale

The Douglis–Nirenberg elliptic systems of differential equations given on a closed smooth manifold are investigated in the extended Sobolev scale. This scale consists of all Hilbert spaces that are interpolation spaces with respect to the Hilbert Sobolev scale. Theorems on solvability of the elliptic systems in the extended Sobolev scale are given. An a priori estimate for solutions is obtained, and their regularity is studied.