УДК 517.983

Ю. С. Лінчук

Опис узагальнених власних значень і узагальнених власних елементів деяких класичних операторів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

В класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій, одержано опис узагальнених власних значень та узагальнених власних елементів оператора диференціювання, оператора інтегрування, оператора зсуву та оператора Помм'є.

Нехай G — довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [1], а символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють в $\mathcal{H}(G)$. Нехай A — деякий оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Комплексне число λ називається узагальненим власним значенням оператора A, якщо існує ненульовий оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, для якого виконується рівність

$$AT = \lambda TA.$$

При цьому оператор T називається узагальненим власним елементом оператора A, що відповідає власному значенню λ. Відзначимо, що в роботах [2–4] викладені основи узагальненої спектральної теорії операторів. В [5–7] одержано опис узагальнених власних значень операторів інтегрування в деяких банахових просторах.

У цьому повідомленні описано узагальнені власні значення і відповідні узагальнені власні елементи деяких класичних операторів у просторі $\mathcal{H}(G)$ для довільної області G комплексної площини.

1. Опис узагальнених власних значень оператора диференціювання. Число $\lambda = 0$ є узагальненим власним значенням оператора диференціювання $\mathcal{D}$ у просторі $\mathcal{H}(G)$ і множина відповідних узагальнених власних елементів оператора диференціювання збігається з множиною всіх лінійних неперервних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Опишемо всі інші узагальнені власні значення оператора диференціювання.

Теорема 1. *Нехай G — довільна опукла область в $\mathbb{C}$. Для того щоб ненульове комплексне число λ було узагальненим власним значенням оператора диференціювання в просторі $\mathcal{H}(G)$, необхідно і достатньо, щоб множина $M = \left\{t \in \mathbb{C}\colon t + G \subset \dfrac{1}{\lambda}G\right\}$ була відмінною від порожньої. Якщо $M \neq \varnothing$, то множина відповідних узагальнених власних елементів оператора диференціювання описується формулою*

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \psi(t-z) f(\lambda t)\, dt, \tag{1}$$

де $f \in \mathcal{H}(G)$, $z \in G_n$, а функція ψ є аналітичною в деякій області $\mathcal{K}$, яка містить нескінченно віддалену точку і така, що $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}$ є підмножиною множини M.

Множина G_n та контур γ_n в (1) вибираються за означенням локально аналітичної при $t \in \dfrac{1}{\lambda}(\complement G)$ та $z \in G$ функції $\psi(t-z)$ [8].

Наведемо деякі застосування цієї теореми.

1. Нехай $G = \mathbb{C}$. Тоді множина узагальнених власних значень оператора диференціювання в просторі цілих функцій $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ збігається з множиною усіх комплексних чисел. При цьому множина всіх узагальнених власних елементів оператора диференціювання, що відповідають ненульовому узагальненому власному значенню λ, описується формулою

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n f^{(n)}(\lambda z), \tag{2}$$

де $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умову $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!|a_n|} < \infty$.

2. Нехай $G_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$, $0 < R < \infty$. Тоді множина узагальнених власних значень оператора диференціювання в просторі $\mathcal{H}(G_R)$ збігається з множиною $\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leqslant 1$. При цьому множина всіх узагальнених власних елементів оператора диференціювання, що відповідають ненульовому узагальненому власному значенню λ, описується формулою (2), де $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умову $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!|a_n|} \leqslant \dfrac{1-|\lambda|}{|\lambda|} R$.

3. Нехай $G = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$. Тоді множина узагальнених власних значень оператора диференціювання у відповідному просторі $\mathcal{H}(G)$ збігається з множиною усіх дійсних невід'ємних чисел. При цьому множина всіх узагальнених власних елементів оператора диференціювання, що відповідають узагальненому власному значенню $\lambda \in (0, +\infty)$, описується формулою (1), в якій $M = \{t \in \mathbb{C}\colon I \operatorname{Im} t \geqslant 0\}$.

4. Нехай $G = \{z \in \mathbb{C}\colon -h < \operatorname{Im} z < h\}$, $h > 0$. Тоді множина узагальнених власних значень оператора диференціювання у відповідному просторі $\mathcal{H}(G)$ збігається з множиною усіх дійсних чисел відрізка $[-1, 1]$. При цьому $M = \mathbb{R}$.

2. Опис узагальнених власних значень оператора зсуву. Через E_h, $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, позначимо оператор зсуву, який лінійно та неперервно діє в просторі цілих функцій $H(\mathbb{C})$ за правилом $(E_h f)(z) = f(z+h)$.

Теорема 2. *Для того щоб комплексне число λ було узагальненим власним значенням оператора E_h у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, необхідно і достатньо, щоб $\lambda \neq 0$. Якщо $\lambda \neq 0$, то відповідні узагальнені власні елементи оператора E_h у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ описуються формулою*

$$(Tf)(z) = \exp\left(\frac{\ln \lambda}{h} z\right) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) f^{(n)}(z),$$

де $(\psi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ — послідовність цілих функцій, які періодичні з періодом h і задовольняють умову

$$\forall\, r < \infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n! \max_{|z|\leqslant r} |\psi_n(z)|} < \infty.$$

3. Опис узагальнених власних значень оператора Помм'є. Нехай область G комплексної площини містить початок координат. Оператор Помм'є Δ лінійно і неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом $(\Delta f)(z) = (f(z) - f(0))/z$ при $z \neq 0$ і $(\Delta f)(0) = f'(0)$.

Теорема 3. *Нехай G — ознозв'язна область в $\mathbb{C}$, $0 \in G$. Для того щоб комплексне число λ було узагальненим власним значенням оператора Помм'є Δ, необхідно і достатньо, щоб $\lambda G \subset G$. При виконанні цієї умови узагальнені власні елементи оператора Δ, що відповідають узагальненому власному значенню λ, описуються формулою*

$$(Tf)(z) = \underset{\zeta}{L}\left(\frac{\lambda z f(\lambda z) - \zeta f(\zeta)}{\lambda z - \zeta}\right),$$

де L — довільний лінійний неперервний функціонал на просторі $\mathcal{H}(G)$.

4. Опис узагальнених власних значень узагальнених зсувів, породжених оператором Помм'є. Для числа $h \in G \setminus \{0\}$ через T_h позначатимемо оператор узагальненого зсуву, який породжений оператором Помм'є і лінійно та неперервно діє в $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ за правилом

$$(T_h f)(z) = \frac{zf(z) - hf(h)}{z - h}$$

при $z \neq h$ і $(T_h f)(h) = f(h) + hf'(h)$ [9].

Теорема 4. *Нехай G — довільна однозв'язна область комплексної площини і $h \in G$, причому $h \neq 0$. Для того щоб ненульове комплексне число λ було узагальненим власним значенням оператора T_h у просторі $\mathcal{H}(G)$, необхідно і достатньо, щоб $\lambda h/(\lambda - 1) \notin G$ і $\psi(G) \subset G$, де $\psi(z) = hz/(\lambda h + z - \lambda z)$. При виконанні цих умов множина узагальнених власних елементів T оператора T_h описується формулою*

$$(Tf)(z) = \varphi(z)\underset{\zeta}{L}\left[\frac{(\psi(z) - h)f(\psi(z)) - (\zeta - h)f(\zeta)}{\psi(z) - \zeta}\right],$$

де $\varphi(z) = h/(\lambda h + z - \lambda z)$, а L — довільний лінійний неперервний функціонал на просторі $\mathcal{H}(G)$.

Зауважимо, що число $\lambda = 0$ є узагальненим власним значенням оператора T_h у просторі $\mathcal{H}(G)$ тоді і тільки тоді, коли $0 \notin G$. У випадку $0 \notin G$ множина узагальнених власних елементів оператора T_h у просторі $\mathcal{H}(G)$, які відповідають $\lambda = 0$, описується формулою $T = (h/z)\,L$, де L — довільний лінійний неперервний функціонал на просторі $\mathcal{H}(G)$.

5. Опис узагальнених власних значень оператора інтегрування. Нехай G — зіркова відносно початку координат область в $\mathbb{C}$. Через $\mathcal{J}$ позначимо вольтерівський оператор інтегрування, який діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом

$$(\mathcal{J}f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt,$$

причому інтегрування здійснюється по відрізку, що з'єднує точки 0 та z.

Теорема 5. *Нехай G — довільна зіркова відносно початку координат область в $\mathbb{C}$. Для того щоб комплексне число λ було узагальненим власним значенням оператора інтегрування $\mathcal{J}$ в $\mathcal{H}(G)$, необхідно і достатньо, щоб $G \subset \lambda G$. При виконанні цієї умови множина всіх узагальнених власних елементів оператора $\mathcal{J}$, що відповідають узагальненому власному значенню λ, визначається формулою*

$$(Tf)(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^z \varphi(z - t) f\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt\right), \tag{3}$$

де φ — довільна функція з простору $\mathcal{H}(G)$.

Подібним чином описуються узагальнені власні значення оператора інтегрування в інших просторах аналітичних функцій.

Нехай $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ і n — деяке натуральне число. Через $C^{(n)}(\overline{D})$ позначимо банахів простір усіх аналітичних на множині D і n-кратно неперервно диференційовних на $\overline{D}$ функцій з нормою

$$\|f\|_n = \max\{\max_{z\in\overline{D}}|f(z)|, \max_{z\in\overline{D}}|f'(z)|, \ldots, \max_{z\in\overline{D}}|f^{(n)}(z)|\}.$$

Цей простір та його узагальнення описані в [10].

Теорема 6. *Для того щоб комплексне число λ було узагальненим власним значенням оператора інтегрування в просторі $C^{(n)}(\overline{D})$, необхідно і достатньо, щоб $|\lambda| \geqslant 1$. При виконанні цієї умови множина узагальнених власних елементів оператора інтегрування в просторі $C^{(n)}(\overline{D})$, що відповідають узагальненому власному значенню λ, описується формулою* (3), *в якій φ — довільна функція з простору $C^{(n)}(\overline{D})$.*

Зазначимо, що в теоремі 2 [5] стверджується, що множина узагальнених власних значень оператора інтегрування в просторі $C^{(n)}(\overline{D})$ збігається з множиною $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Як випливає з теореми 6, це твердження є неправильним. При помилковому доведенні в [5] того, що кожне комплексне число λ, яке задовольняє умову $0 < |\lambda| < 1$, є узагальненим власним значенням оператора інтегрування в просторі $C^{(n)}(\overline{D})$, задача про знаходження ненульових розв'язків операторного рівняння $\mathcal{J}T = \lambda T\mathcal{J}$ зведена до опису розв'язків деякого допоміжного операторного рівняння. В [5] стверджується без обгрунтування, що це рівняння має ненульові розв'язки. Як випливає з теореми 6, це не так.

Подібним чином, як це зроблено в теоремах 1–5, описуються також узагальнені власні значення і відповідні узагальнені власні елементи в просторах $\mathcal{H}(G)$ оператора множення на незалежну змінну, оператора узагальненого інтегрування Гельфонда–Леонтьєва $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ [11] та оператора узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва $\mathcal{D}_{\rho,\mu}$ [12].

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**. – S. 30–49.
2. *Cowen C. C.* Commutants and the operator equations $AX = \lambda XA$ // Pacif. J. Math. – 1979. – **80**, No 2. – P. 337–340.
3. *Biswas A., Lambert A., Petrovic S.* Extended eigenvalues and the Volterra operator // Glasgow Math. J. – 2002. – **44**, No 3. – P. 521–534.
4. *Biswas A., Petrovic S.* On extended eigenvalues of operators // Integral Equations and Operator Theory. – 2006. – **55**, No 2. – P. 233–248.
5. *Караев М. Т.* О некоторых применениях обыкновенного и обобщенного произведений Дюамеля // Сиб. мат. журн. – 2005. – **46**, № 3. – С. 553–566.
6. *Karaev M. T.* On extended eigenvalues and extended eigenvectors of some operator classes // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – **134**. – P. 2383–2392.
7. *Gurdal M.* On the extended eigenvalues and extended eigenvectors of shift operator on the Wiener algebra // Appl. Math. Lett. – 2009. – **22**, No 11. – P. 1727–1729.
8. *Коробейник Ю. Ф.* Об одном классе линейных операторов // Годишн. Висш. техн. учебни завед. Математика. – 1973. – **9**, № 3. – С. 23–33.
9. *Лінчук Ю. С.* Деякі властивості операторів, що пов'язані з узагальненим зсувом, породженим оператором Помм'є // Мат. вісн. НТШ. – 2005. – **2**. – С. 114–122.
10. *Bland W. J., Feinstein J. F.* Completions of normed algebras of differentiable functions // Stud. Math. 2005. – **170**. – P. 89–111.
11. *Dimovski I. H.* Convolutional calculus. – Dordrecht: Kluwer, 1990. – 208 p.

12. *Линчук Н. Е.* Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда–Леонтьева // Изв. Высш. учеб. заведений. Математика. – 1985. – № 5. – С. 72–74.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 21.06.2012

Ю. С. Линчук

Описание обобщенных собственных значений и обобщенных собственных элементов некоторых классических операторов

В классе линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций, получено описание обобщенных собственных значений и обобщенных собственных элементов оператора дифференцирования, оператора интегрирования, оператора сдвига и оператора Поммье.

Yu. S. Linchuk

Description of the extended eigenvalues and eigenvectors of some classical operators

Description of the extended eigenvalues and eigenvectors of a linear differentiation operator, integration operator, shift operator, and the Pommier operator acting in the spaces of analytic functions is obtained.