

І. Й. Попадюк, І. П. Шацький, В. М. Шопа

Фрикційний контакт циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем при немонотонному навантаженні

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Г. С. Кітом)

Процес немонотонного навантаження деформівного заповнювача в циліндричній оболонці досліджено з урахуванням тертя Кулона. Числово-аналітичний опис петлі конструкційного демпфування отримано з використанням прикладних моделей.

При механіко-математичному моделюванні поведінки оболонкових віброзахисних пристроїв (деформівних оболонкових систем з сухим тертям) в умовах навантаження (взагалі кажучи, немонотонного) виникає клас конструктивно нелінійних неконсервативних контактних задач про фрикційну взаємодію тонких оболонок з деформівним заповнювачем [1–3].

У даній роботі розвинуто методику дослідження напружено-деформованого стану, податливості та демпфувальної здатності системи циліндрична оболонка — деформівний заповнювач, яка моделює базовий пружний елемент оболонкових віброзахисних пристроїв [4].

Нехай пружний деформівний циліндр (заповнювач), радіус якого R і довжина a , поміщений в циліндричну оболонку завтовшки h_0 (рис. 1). До одного із торців заповнювача через абсолютно жорсткий гладкий поршень прикладене зовнішнє немонотонне за часом навантаження Q ; інший торець заповнювача разом із оболонкою гладко впертий в жорстку перепону. Характер контактної взаємодії оболонки і заповнювача визначається законом сухого тертя. Осесиметричний напружено-деформований стан конструкції досліджуємо у квазістатичному наближенні.

Приймемо моделі заповнювача і оболонки рівня строгості [1–3], які дають можливість аналітично вирішити сформульовану проблему.

Припустимо, що у заповнювачі нормальні напруження $\sigma_r, \sigma_\beta, \sigma_z$ і осьові переміщення u_z розподілені рівномірно, а дотичні напруження τ_{rz} і радіальні переміщення u_r — лінійно по

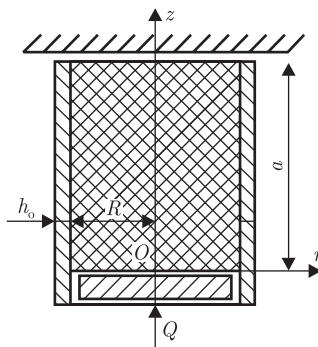


Рис. 1

поперечному перерізу. Тоді, переходячи до системи безрозмірних координат, отримуємо

$$\sigma_\rho = \sigma_\beta = \sigma, \quad \tau_{\rho\zeta} = \tau\rho, \quad u_\zeta = u, \quad u_\rho = w\rho. \quad (1)$$

Усереднені по площі поперечного перерізу рівняння рівноваги та закон Гука мають вигляд

$$\frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + 2l\tau = 0; \quad (2)$$

$$\varepsilon_\zeta = \frac{1}{a} \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{E}(\sigma_\zeta - 2\nu\sigma), \quad \varepsilon_\rho = \varepsilon_\beta = \frac{w}{R} = \frac{1}{E}((1 - \nu)\sigma - \nu\sigma_\zeta). \quad (3)$$

Тут $l = a/R$; $\zeta = z/a \in [0, 1]$, $\rho = r/R \in [0, 1]$; w — радіальне переміщення поверхні $\rho = 1$; u — осьове переміщення перерізів заповнювача; σ , τ — нормальне та дотичне напруження на бічній поверхні.

Пружну рівновагу оболонки описуємо співвідношеннями безмоментної теорії [5]:
рівняння рівноваги

$$\frac{dN_\zeta}{d\zeta} - a\tau_o = 0, \quad N_\beta = -R\sigma_o; \quad (4)$$

фізичні співвідношення

$$\varepsilon_\zeta = \frac{1}{a} \frac{du_o}{d\zeta} = \frac{1}{E_o h_o} (N_\zeta - \nu_o N_\beta), \quad \varepsilon_\beta = \frac{w_o}{R} = \frac{1}{E_o h_o} (N_\beta - \nu_o N_\zeta). \quad (5)$$

Тут N_ζ , N_β — мембранні зусилля; σ_o , τ_o — задані на внутрішній поверхні оболонки напруження; u_o , w_o — осьове і радіальне переміщення оболонки; E_o , ν_o — модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона її матеріалу.

Фрикційну взаємодію оболонки і заповнювача описуємо співвідношеннями одностороннього контакту

$$[w] = 0, \quad \sigma_o = \sigma < 0, \quad \tau_o = \tau, \quad \zeta \in [0, 1] \quad (6)$$

і законом сухого тертя для немонотонного навантаження

$$\tau = f\sigma \operatorname{sgn} \frac{d[u]}{dt} = f\sigma \operatorname{sgn} \frac{d[u]}{dQ} \operatorname{sgn} \dot{Q}, \quad \frac{d[u]}{dQ} \neq 0; \quad (7)$$

$$\frac{d[u]}{dQ} = 0, \quad |\tau| \leq -f\sigma, \quad (8)$$

де $[u] = u - u_o$, $[w] = w - w_o$ — переміщення заповнювача відносно оболонки, або стрибки переміщень, $\dot{Q} = dQ/dt$.

На торцях заповнювача і оболонки виконуються умови

$$\sigma_\zeta(0) = -\frac{Q}{\pi R^2}, \quad N_\zeta(0) = 0; \quad u(1) = 0, \quad u_o(1) = 0. \quad (9)$$

Оберемо геометричні та фізико-механічні параметри системи так, що зона зчеплення при початковому навантаженні не досягається [2]. Зазначимо, що у квазістатичній постановці

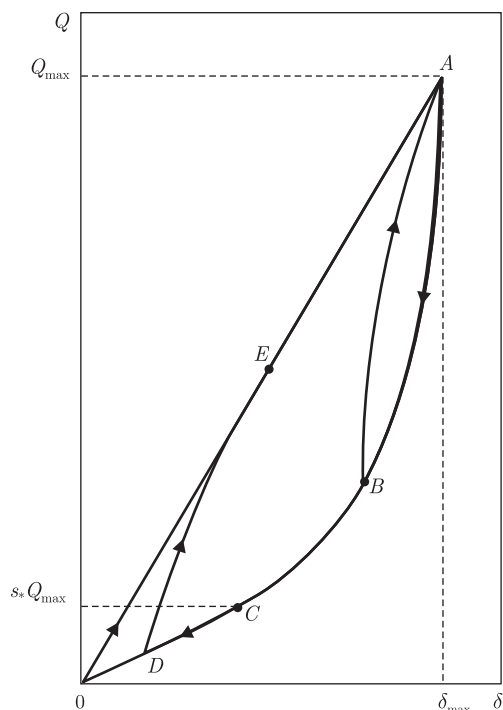


Рис. 2

процес немонотонного навантаження системи розбивається на етапи, де навантаження монотонне. Позначимо через Q_m величину діючої сили в кінці попереднього етапу навантаження. Зауважимо, що на етапі активного (початкового) навантаження $Q_m = 0$, $[u](Q_m) = 0$.

У процесі розв'язання мішаної задачі (1)–(9) встановлено, що при навантаженні системи за довільним циклом з коефіцієнтом асиметрії $s = Q_{\min}/Q_{\max} \in [0, 1]$ на поверхні контакту завжди присутні дві області: проковзування (формули (7)) і зчеплення (умови (8)), причому область проковзування на всіх етапах навантаження або розвантаження виникає у точці $\varsigma = 0$. При зміні діючої сили координата точки розділу областей зростає від нуля до значення відповідної координати точки розділу областей, зафіксованої як константа в кінці попереднього етапу навантаження. Для знаходження біжучої координати α цієї точки слід використовувати першу з умов (8), записану для точки розділу областей:

$$\left. \frac{d[u]}{dQ} \right|_{\varsigma=\alpha} = \left(\frac{\partial[u]}{\partial Q} + \frac{\partial[u]}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial Q} \right) \Big|_{\varsigma=\alpha} = 0. \quad (10)$$

Зауважимо, що при розв'язанні схожої задачі у роботах [1, 3] не враховано конвективну складову похідної від стрибка переміщення, що вплинуло на точність результатів.

Розв'язок мішаної задачі (1)–(10) отримано в аналітичному вигляді. Для довільного ($s \in [0, 1]$) циклу навантаження побудовано петлю конструкційного демпфування (рис. 2).

Наведемо вирази, які описують цикл навантаження за етапами і діаграму навантаження за ділянками.

1. Активне (початкове) навантаження:

лінійна ділянка OA ($0 \leq Q \leq Q_{\max}$, $\dot{Q} > 0$)

$$\delta = Q \left(\vartheta_1 + \vartheta_2 \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \right). \quad (11)$$

2. Розвантаження ($Q_{\max} \geq Q \geq 0, \dot{Q} < 0$):

а) нелінійна ділянка ABC ($Q_{\max} \geq Q \geq s_* Q_{\max}$)

$$Q = Q_{\max} \exp \left[\int_0^{\alpha} K_1(\alpha) d\alpha \right], \quad (12)$$

$$\delta = Q \left[\vartheta_1 + \vartheta_2 \frac{2e^{\lambda\alpha} - e^{-\lambda(1-2\alpha)} - 1}{\lambda} \right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1;$$

б) лінійна ділянка CO : ($s_* Q_{\max} \geq Q \geq 0$)

$$\delta = Q \left(\vartheta_1 + \vartheta_2 \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda} \right). \quad (13)$$

3. Повторне навантаження ($Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}, \dot{Q} > 0$):

а) комбінована ділянка DEA ($0 \leq s \leq s_*$)

крива DE ($Q_{\min} \leq Q \leq s_{**} Q_{\min}$)

$$Q = Q_{\min} \exp \left[\int_0^{\alpha} K_2(\alpha) d\alpha \right]; \quad (14)$$

$$\delta = Q \left[\vartheta_1 + \vartheta_2 \frac{1 - 2e^{-\lambda\alpha} + e^{\lambda(1-2\alpha)}}{\lambda} \right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1;$$

пряма EA (вихід на лінію активного навантаження) ($s_{**} Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}$)

$$\delta = Q \left[\vartheta_1 + \vartheta_2 \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \right]; \quad (15)$$

б) нелінійна ділянка BA ($s_* \leq s \leq 1$)

$$Q = Q_{\min} \exp \left[\int_0^{\alpha} K_3(\alpha, \alpha_m) d\alpha \right], \quad (16)$$

$$\delta = Q \left[\vartheta_1 + \vartheta_2 \frac{1 - 2e^{-\lambda\alpha} + 2e^{\lambda(\alpha_m - 2\alpha)} - e^{-\lambda[1-2(\alpha_m - \alpha)]}}{\lambda} \right], \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_m.$$

Тут

$$\lambda = fl \frac{2\nu + \nu_o \varepsilon_o}{1 - \nu + \varepsilon_o}, \quad \vartheta = \frac{1 - \nu + \varepsilon_o}{\nu} \frac{\varepsilon_o(\nu_o - \nu)}{(1 - \nu + \varepsilon_o)(2 + \varepsilon_o) - (2\nu + \nu_o \varepsilon_o)^2}, \quad \varepsilon_o = \frac{ER}{E_o h_o},$$

$$\vartheta_1 = \frac{\nu_o l}{\pi h_o E_o (2\nu + \nu_o \varepsilon_o)}, \quad \vartheta_2 = \frac{2\nu l}{\pi h_o E_o (2\nu + \nu_o \varepsilon_o)} \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu) + 1 - \nu\nu_o}{1 - \nu + \varepsilon_o};$$

$$K_1(\alpha) = \frac{2\lambda e^{2\lambda\alpha} (e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha})}{(1 - \alpha)\lambda\vartheta - (e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha})e^{2\lambda\alpha}}; \quad s_* = \exp \left[\int_0^1 K_1(\alpha) d\alpha \right];$$

$$K_2(\alpha) = \frac{2\lambda e^{-2\lambda\alpha}(e^\lambda - e^{\lambda\alpha})}{(1-\alpha)\lambda\vartheta + (e^\lambda - e^{\lambda\alpha})e^{-2\lambda\alpha}}; \quad s_{**} = \exp \left[\int_0^1 K_2(\alpha) d\alpha \right];$$

$$K_3(\alpha, \alpha_m) = \frac{2\lambda e^{-2\lambda\alpha}[e^{\lambda\alpha_m} - e^{\lambda\alpha} - e^{2\lambda\alpha_m}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha_m})]}{(1-\alpha)\lambda\vartheta + e^{-2\lambda\alpha}[e^{\lambda\alpha_m} - e^{\lambda\alpha} - e^{2\lambda\alpha_m}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha_m})]};$$

α_m — найменша з координат точок, які розмежують зони з протилежними знаками дотичних контактних напружень в області зчеплення, в даному випадку це — фіксоване значення параметра α , яке визначається із формули (12) при $Q = Q_{\min}$, що відповідає закінченню етапу розвантаження. Встановлено, що для змінної координати α існує обмеження $0 \leq \alpha \leq \alpha_m$. При досягненні змінною α значення α_m матимемо кінець етапу повторного навантаження.

Таким чином, в роботі наведено формулювання і розв'язок задачі, яка складається, по суті, із ряду мішаних контактних задач, розв'язок кожної з яких, отриманий окремо, описує конкретну ділянку діаграми деформування неконсервативної системи безмоментна циліндрична оболонка — деформівний заповнювач. Врахування конвективної складової похідної від стрибка переміщення на етапах розвантаження та повторного навантаження уможливило переосмислити вплив історії навантаження на поведінку малорухомих оболонкових систем із сухим позиційним тертям і знайти числово-аналітичний розв'язок мішаної контактної задачі, який описує явище конструкційного демпфування в циліндричній оболонці з деформівним заповнювачем при немонотонному навантаженні.

1. Шопа В. М., Шацький І. П., Попадюк І. И. Конструкційне демпфування в циліндричній оболонці з пружним заповнювачем // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1989. — № 2. — С. 44–47.
2. Шопа В. М., Шацький І. П., Попадюк І. И. Фрикційна взаємодія циліндричної оболонки з пружним заповнювачем // Там само. — 1989. — № 3. — С. 48–50.
3. Попадюк І. И., Шацький І. П., Шопа В. М. Механіка фрикційного контакту оболонок з деформівним заповнювачем. — Івано-Франківськ: Факел, 2003. — 180 с.
4. Шопа В. М., Величкович А. С., Величкович С. В. та ін. Оболонкові пружини // Івано-Франківськ: Факел, 2002. — 92 с.
5. Филли А. П. Элементы теории оболочек. — Ленинград: Стройиздат, 1975. — 256 с.

*Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів*

Надійшло до редакції 03.05.2012

И. И. Попадюк, И. П. Шацкий, В. М. Шопа

Фрикционный контакт цилиндрической оболочки с деформируемым наполнителем при немонотонном нагружении

Процесс немонотонного нагружения деформируемого наполнителя в цилиндрической оболочке исследован с учетом трения Кулона. Численно-аналитическое описание петли конструкционного демпфирования получено с использованием прикладных моделей.

I. Y. Popadyuk, I. P. Shatsky, V. M. Shopa

The frictional contact of a cylindrical shell with an elastic filler at the non-monotonous loading

The non-monotonous loading of a deformable filler in the cylindrical shell has been investigated with allowance for the Coulomb friction. The numerical and analytical description of the constructive damping loop has been obtained by using the applied models.