УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, М. М. Семко

Групи, у яких нормальні замкнення циклічних підгруп мають обмежені скінченні ранги Хірша–Зайцева

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Вивчаються узагальнено розв'язні групи з обмеженнями на нормальні замкнення циклічних підгруп. Вважаємо, що група G має скінченний ранг Хірша–Зайцева, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого або нескінченні циклічні, або періодичні, та кількість нескінченних циклічних факторів є скінченною. Неважко побачити, що кількість нескінченних циклічних факторів у кожному з таких рядів є інваріантом групи. Цей інваріант називатимемо рангом Хірша–Зайцева групи G та позначаємо через $r_{\mathrm{hz}}(G)$. Досліджуються групи, у яких нормальне замкнення кожної циклічної підгрупи має ранг Хірша–Зайцева, що не перевищує b (b — деяке натуральне число). При деяких природних обмеженнях знайдена така функція $\kappa_1(b)$, що $r_{\mathrm{hz}}([G/\operatorname{Tor}(G), G/\operatorname{Tor}(G)]) \leqslant \kappa_1(b)$.

Якщо G — група та x — її елемент, то *клас спряженості елемента* x в G позначатимемо через x^G, тобто $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$. Групи з різноманітними обмеженнями на класи спряжених елементів вивчаються вже досить давно. Перше обмеження, яке тут виникає, — це обмеження на порядок класу спряжених елементів. Наприклад, якщо $|x^G| = 1$ для кожного елемента $x \in G$, то група G буде абелевою. Це показує, що групи, у яких порядки класів спряжених елементів скінченні та обмежені (тобто існує таке натуральне число b, що $|x^G| \leqslant b$ для кожного $x \in G$), мусять бути досить близькими до абелевих. Групи з такою властивістю називаються *BFC-групами*. Б. Нейман довів [1], що комутатор кожної *BFC*-групи є скінченним. Більш того, існує така функція ν, що $|[G, G]| \leqslant \nu(b)$. Природно, що знайти значення такої функції значно важче, ніж довести її існування. Знаходженню найкращого наближення для функції $\nu(b)$ присвячено велику серію статей. Останньою в цій серії була стаття Р. Гуральника і А. Мароті [2], які довели, що $\nu(b) = (7 + \log_2 b)/2$.

Наведений вище результат Б. Неймана став вихідним пунктом для багатьох цікавих узагальнень. Якщо x^G є скінченним, то або $\langle x\rangle^G$ є скінченним, або $\langle x\rangle^G$ містить у собі таку скінченну нормальну підгрупу T_x, що фактор $\langle x\rangle^G/T_x$ — скінченно породжена вільна абелева група. Зокрема, $\langle x\rangle^G$ є майже поліциклічною. Тому природно виникає питання про структуру груп, у яких нормальне замкнення $\langle x\rangle^G$ буде майже поліциклічною підгрупою. Якщо припустити, що $\langle x\rangle^G$ є нескінченною циклічною для кожного элемента $x \in G$, то неважко показати, що група G є абелевою. Якщо припустити, що $\langle x\rangle^G$ нециклічна, але вільна абелева, то комутант групи вже може і не бути вільною абелевою підгрупою. Покажемо це на такому прикладі. Нехай $D_n = (\langle a_n\rangle \times \langle b_n\rangle) \leftthreetimes \langle c_n\rangle$, де a_n, b_n, c_n мають нескінченні порядки та $c_n^{-1} b_n c_n = a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $K = Dr_{n\in\mathbb{N}} D_n$, $H = \langle a_n a_{n+1}^{-2} \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ та нехай $G = K/H$. Неважко упевнитись у тому, що $\langle x\rangle^G$ — це вільна абелева підгрупа, яка має 0-ранг, що не перевищує 2, але $[G, G] \cong Q_2$, зокрема, комутант не може бути вільною абелевою підгрупою.

Нагадаємо деякі поняття. Будь-яка майже поліциклічна група G має скінченний субнормальний ряд

$$\langle 1 \rangle = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G,$$

фактори G_j/G_{j-1}, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, якого є нескінченними циклічними, а останній фактор G_n/G_{n-1} є скінченним. Число нескінченних циклічних факторів цього ряду є інваріантом групи G, який називається *числом Хірша* групи G.

А. І. Мальцев [3] ввів до розгляду нижчеподаний клас груп. Але спочатку введемо деякі позначення. Якщо G — група, то через $\mathrm{Tor}(G)$ позначатимемо максимальну нормальну періодичну підгрупу G. Зазначимо, що якщо група G є локально нільпотентною, то $\mathrm{Tor}(G)$ є її характеристичною підгрупою, більш того, фактор-група $G/\mathrm{Tor}(G)$ уже не має скруту.

Нехай G — абелева група, що не має скруту. Число елементів у максимальній незалежній підмножині G називається 0-*рангом* G та позначатиметься $r_0(G)$. Якщо ж G — довільна абелева група, то покладемо $r_0(G) = r_0(G/\mathrm{Tor}(G))$.

Будемо говорити, що G — *розв'язна* A_1-група, якщо G має скінченний субнормальний ряд, фактори якого є абелевими групами скінченного 0-рангу. Неважко побачити, що якщо G — розв'язна A_1-група, то G має скінченний субнормальний ряд, фактори якого є або нескінченними циклічними, або періодичними групами, причому кількість нескінченних циклічних факторів є інваріантом G. У випадку полірацiональної групи цей інваріант був названий раціональним рангом [4]. Це поняття було розширено на клас локально майже поліциклічних груп [5], а в работі [6] цей інваріант вже розглядався для довільних груп. Він був названий *рангом без скруту*, або 0-рангом. Але термін ранг без скруту не можна вважати досить точним. Наприклад, не кожна група без скруту має ранг без скруту (скінченний або нескінченний). Для неабелевих груп існує поняття секційного 0-рангу, який також позначається через $r_0(G)$. Тому краще буде використовувати інший термін. Більш того, розглянемо таке узагальнення.

Будемо говорити, що група G має *скінченний ранг Хірша–Зайцева*, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого або є нескінченними циклічними, або періодичними групами, та кількість нескінченних циклічних факторів є скінченною. Неважко побачити, що кількість нескінченних циклічних факторів у кожному такому ряді є інваріантом групи G. Цей інваріант називається *рангом Хірша–Зайцева* групи G і позначатиметься через $r_{\mathrm{hz}}(G)$.

Нагадаємо, наслідуючи А. І. Мальцева [7], що група G має *скінченний спеціальний ранг* r, якщо кожна скінченно породжена підгрупа G може бути породжена r елементами, та r — це найменше натуральне число, що має таку властивість.

Проілюструємо зв'язки, що існують між групами скінченного рангу Хірша–Зайцева та групами скінченного спеціального рангу.

Група G називається *узагальнено радикальною*, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого є локально нільпотентними або локально скінченними. Узагальнено радикальна група G має зростаючу локально нільпотентну або зростаючу локально скінченну підгрупу. У першому випадку її локально нільпотентний радикал $\mathrm{Lnr}(G)$ є неодинчним. У другому випадку неважко побачити, що G містить у собі неодиничну нормальну локально скінченну підгрупу. Неважко показати, що у кожній групі G підгрупа $\mathrm{Lfr}(G)$, породжена усіма її нормальними локально скінченними підгрупами, буде найбільшою її нормальною локально скінченною підгрупою, її називають *локально скінченним радикалом* G. Таким чином, кожна узагальнено радикальна група має зростаючий ряд нормальних підгруп з локально нільпотентними або локально скінченними факторами.

Зазначимо також, що періодична узагальнено радикальна група є локально скінченною, а тому і періодична локально узагальнено радикальна група також є локально скінченною.

Якщо G — група скінченного рангу Хірша–Зайцева, то $r_{\mathrm{hz}}(\mathrm{Tor}(G)) = 0$ і $r_{\mathrm{hz}}(G) = r_{\mathrm{hz}}(G/\mathrm{Tor}(G))$. Інакше кажучи, ми можемо говорити тільки про структуру фактор-групи $G/\mathrm{Tor}(G)$. Локально узагальнено радикальні групи скінченного рангу Хірша–Зайцева мають таку структуру [8].

Нехай G — локально узагальнено радикальна група скінченного рангу Хірша–Зайцева та припустимо, що $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1\rangle$. Тоді G є майже розв'язною та містить такі нормальні підгрупи $L \leqslant K \leqslant S \leqslant G$, що:

(i) L є нільпотентною підгрупою без скруту;

(ii) K/L — скінченно породжена абелева група без скруту;

(iii) G/K є скінченною, а S/K — розв'язний радикал G/K.

Більш того, якщо $r_{\mathrm{hz}}(G) = r$, то існують такі функції f_1, f_2, що $|G/K| \leqslant f_1(r)$ та $\mathrm{scl}(S/T) \leqslant f_2(r)$.

Якщо G — розв'язна група, то через $\mathrm{scl}(G)$ будемо позначати її клас розв'язності.

Якщо n — натуральне число, то нехай

$$a(n) = \max\{|\mathrm{Aut}(G)| \mid G \text{ — скінченна група, що має порядок, який не перевищує } n\}.$$

Очевидно $a(n) \leqslant n!$.

Нехай A — підгрупа прямого добутку $A_1\times\cdots\times A_n$, де $A_j \cong Q$, $1 \leqslant j \leqslant n$, і T — періодична група автоморфізмів A. Тоді T буде скінченною (див., наприклад, [9, теорема 9.33]). Більш того, існує така функция τ, що $|T| \leqslant \tau(n)$.

Відзначимо, що $f_1(r) = ((a(r)r^{2r+2})^r \cdot a(\tau(r))^r)!$.

За класичною теоремою Цассенхауза (див., наприклад, [9, теорема 3.7]) існує така функція ζ, що $\mathrm{scl}(G) \leqslant \zeta(r)$ для кожної розв'язної підгрупи G із загальної лінійної групи $GL_r(F)$.

Будемо мати $f_2(r) = r + \zeta(r)$.

Можемо бачити, що структура G істотно визначається заданням числа r.

Наведений вище результат показує, що якщо G — локально узагальнено радикальна група скінченного рангу Хірша–Зайцева та $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1\rangle$, то G має скінченний спеціальний ранг. Зазначимо також, що у випадку, коли G є локально узагальнено радикальною групою скінченного спеціального рангу, то $G/\mathrm{Tor}(G)$ має скінченний ранг Хірша–Зайцева.

У статтях [10, 11] були розглянуті групи, у яких нормальне замкнення кожної циклічної підгрупи має скінченний спеціальний ранг, який не перевищує деякого натурального числа b. Було доведено, що комутант таких груп має скінченний спеціальний ранг. Нехай тепер G — локально узагальнено радикальна група та припустимо, що існує таке натуральне число b, що $r_{\mathrm{hz}}(\langle x\rangle^G) \leqslant b$ для кожного елемента $x \in G$. Якщо використати наведений вище результат Х. Сміта та взаємні зв'язки, що існують між спеціальним рангом та рангом Хірша–Зайцева, то можна отримати, що комутант фактор-групи $G/\mathrm{Tor}(G)$ має скінченний ранг Хірша–Зайцева. Але Х. Сміт не отримав функцію, що обмежує спеціальний ранг комутанта. Тому метою даної роботи і є отримання функції від b, яка обмежує ранг Хірша–Зайцева комутанта $[G/\mathrm{Tor}(G), G/\mathrm{Tor}(G)]$. Основний результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай G — локально узагальнено радикальна група, у якій нормальне замкнення кожної циклічної підгрупи має скінченний ранг Хірша–Зайцева, який не перевищує натурального числа b. Якщо $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1\rangle$, то G містить у собі таку нормальну підгру-*

пу K скінченного рангу Хірша–Зайцева, що G/K є вільною від скруту абелевою групою. Більш того, існує така функція κ_1, що $r_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant \kappa_1(b)$.

Для функції κ_1 отримано такий вираз:

$$\kappa_1(b) = 3b^2 + \frac{2b(b+1)(b+2)(b^{b-1}-1)}{3(b-1)} + b\tau(b^2) + b^3 + b\tau(b\nu(b\tau(b)) + b^2\nu(b\tau(b)) + \\ + b^2\tau\frac{b(b+1)(b+2)(b^{b-1}-1)}{3(b-1)} + b^2\frac{b^2+b(b+1)(b+2)(b^{b-1}-1)}{3(b-1)} + b\nu(b\tau(b)),$$

яка обмежує ранг Хірша–Зайцева комутанта $[G/\operatorname{Tor}(G),\ G/\operatorname{Tor}(G)]$.

1. *Neumann B. H.* Groups covered by permutable subsets // J. London Math. Soc. – 1954. – **29**. – P. 236–248.
2. *Guralnick R. M., Maroti A.* Average dimension of fixed point spaces with applications // Adv. Math. – 2001. – **226**. – P. 298–308.
3. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 3. – С. 567–588.
4. *Зайцев Д. И.* О разрешимых группах конечного ранга // Группы с ограничениями на подгруппы. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 115–130.
5. *Зайцев Д. И.* Группы с дополняемыми нормальными подгруппами // Некоторые проблемы теории групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 30–74.
6. *Зайцев Д. И.* Произведения абелевых групп // Алгебра и логика. – 1980. – **19**, № 2. – С. 94–106.
7. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. – 1948. – **22**, № 2. – С. 351–352.
8. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Polyakov N. V.* On some ranks of infinite groups // Ric. Mat. – 2007. – **56**, No 1. – P. 43–59.
9. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – Berlin: Springer, 1973. – 229 p.
10. *Smith H.* A finiteness condition on normal closures of cyclic subgroups // Math. Proc. Royal Irish Academy. – 1999. – **99A**. – P. 179–183.
11. *Longobardi P., Maj M., Smith H.* Groups in which normal closures of elements have boundedly finite rank // Glasgow Math. J. – 2009. – **51**. – P. 341–345.

Дніпропетровський національний університет
Національний університет державної податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 21.11.2011

Л. А. Курдаченко, Н. Н. Семко

Группы, в которых нормальные замыкания циклических подгрупп имеют ограниченные конечные ранги Хирша–Зайцева

Изучаются обобщенно разрешимые группы с ограничениями на нормальные замыкания циклических подгрупп. Полагаем, что группа G имеет конечный ранг Хирша–Зайцева, если G имеет восходящий ряд, факторы которого либо бесконечные циклические, либо периодические, и число бесконечных циклических факторов конечно. Нетрудно усмотреть, что число бесконечных циклических факторов в каждом из таких рядов является инвариантом группы. Этот инвариант называем рангом Хирша–Зайцева группы G и обозначаем через $r_{\mathrm{hz}}(G)$. Рассматриваются группы, в которых нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша–Зайцева, не превосходящий b (b — некоторое натуральное число). При наличии некоторых естественных ограничений найдена такая функция $\kappa_1(b)$, что $r_{\mathrm{hz}}([G/\operatorname{Tor}(G),\ G/\operatorname{Tor}(G)]) \leqslant \kappa_1(b)$.

L. A. Kurdachenko, M. M. Semko

Groups in which the normal closures of cyclic subgroups have bounded finite Hirsch–Zaitsev rank

We study the generalized soluble groups with restriction on normal closures of cyclic subgroups. A group G is said to have finite Hirsch–Zaitsev rank if G has an ascending series, whose factors are either infinite cyclic or periodic, and if the number of infinite cyclic factors is finite. It is not hard to see that the number of infinite cyclic factors in every of such series is an invariant of the group G. This invariant is called the Hirsch–Zaitsev rank of G and is denoted by $r_{\mathrm{hz}}(G)$. We study the groups, in which the normal closure of every cyclic subgroup has the Hirsch–Zaitsev rank of at most b (b is some positive integer). For some natural restriction, we find the function $\kappa_1(b)$ such that $r_{\mathrm{hz}}([G/\operatorname{Tor}(G),\ G/\operatorname{Tor}(G)]) \leqslant \kappa_1(b)$.