



УДК 550.34

© 2012

Член-кореспондент НАН України В. А. Даниленко, С. В. Микуляк

## Особливості поширення нелінійних хвиль у сипкому середовищі

*Методом дискретних елементів проведено моделювання двовимірних процесів поширення нелінійних хвиль у шарі сипкого (гранульованого) середовища, яке знаходиться в полі сили тяжіння. Встановлено, що в шарі структурованого середовища можуть утворюватися періодичні хвильові структури, параметри яких залежать від розмірів елементів структури та від висоти шару.*

Процес поширення хвиль навантаження у природному сипкому середовищі є складним зважаючи на його структурованість, неоднорідність, нерівноважність, анізотропію, нелінійний та дисипативний характер взаємодії структурних елементів, наявність ланцюжків сили, вздовж яких переносяться збурення малої амплітуди, переупаковку елементів у процесі навантаження тощо [1–5]. Така складна поведінка може привести до того, що середовище буде в незвичний спосіб реагувати на зовнішні збурення, формуючи, наприклад, періодичні сигнали певної характерної частоти, як це спостерігалось в експериментах із зануренням загостреного стрижня в сухий пісок [6], коли у згенерованій ним хвилі мав місце процес виокремлення періодичного коливання з частотою  $\approx 3$  кГц (рис. 1).

Континуальними моделями, що існують на сьогодні, неможливо адекватно описати динаміку гранульованого середовища, тому для моделювання різних динамічних процесів, у тому числі й хвильових, широкого застосування набув метод дискретних елементів, в якому моделюється динаміка кожного елемента [7]. Система рівнянь, що описує динаміку дискретних елементів, включаючи їх обертання, розв'язується чисельно. Можливості сучасних

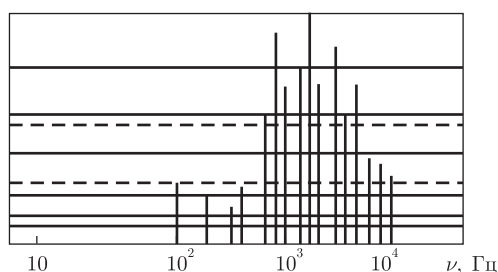


Рис. 1. Спектр сигналу при зануренні загостреного стрижня в пісок, за [6]

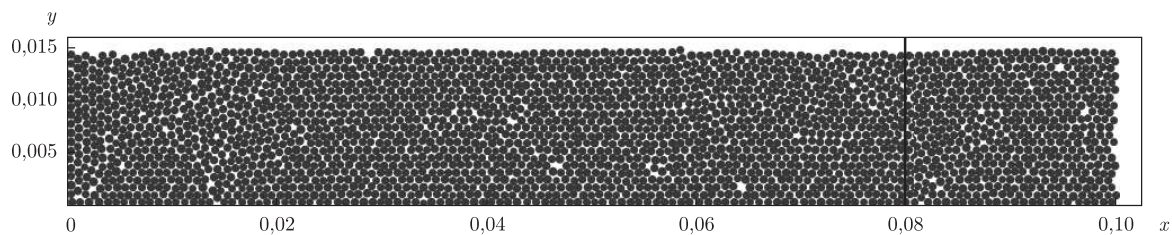


Рис. 2. Масив сферичних дискретних елементів

персональних комп'ютерів такі, що дають змогу обрахувати рух десятків або навіть сотень тисяч дискретних елементів.

У даному повідомленні за допомогою методу дискретних елементів моделюється двовимірний процес поширення нелінійної хвилі в шарі сипкого (гранульованого) середовища, яке знаходиться в полі сили тяжіння. Масив дискретних елементів, що утворює сипке середовище, складається з 14000 елементів сферичної форми з гауссівським розподілом за розміром з невеликою дисперсією. Середній розмір елементів  $r_0 = 0,4$  мм. На рис. 1 наведено фрагмент шару гранульованого середовища, що знаходиться поблизу поршня, яким генерується хвиля, внаслідок прикладеної сили в напрямі  $x$ :

$$F = F_0 \sin^2\left(\frac{\pi t}{t_0}\right) \quad \text{при} \quad t \leq t_0, \quad (1)$$

$$F = 0 \quad \text{при} \quad t > t_0.$$

Систему звичайних диференціальних рівнянь, яка описує поступальний та обертальний рух елементів, розв'язували за допомогою алгоритму Верлета (*velocity Verlet algorithm*) [8]. Взаємодію між дискретними елементами описували моделлю Герца для пружних тіл з урахуванням кулонівського тертя. Детально систему разом з алгоритмом числового розрахунку наведено в статтях [9, 10]. Усереднені швидкості обчислювали в шести областях завтовшки  $5r_0$ . Одну з цих областей у вигляді вертикальної лінії демонструє рис. 2. При розрахунках брали такі значення констант:  $F_0 = 40$  Н,  $t_0 = 100$  мкс.

Результати розрахунків залежності усередненої швидкості від часу для шести відстаней від початку координат показують, що хвиля, згенерована імпульсним навантаженням (1), у процесі її поширення дуже швидко згасає і згодом трансформується в періодичну хвилю. Залежність для третьої області від початку координат, де чітко видно близькі до періодичних коливання, ілюструє рис. 3, а. Спектральний аналіз залежності усереднених швидкостей від часу підтверджує наявність характерної частоти у їх спектрах:  $\nu_s \approx 6400$  Гц (див. б на рис. 3). Аналіз поля швидкостей свідчить про те, що в шарі гранульованого середовища формуються періодичні структури (рис. 4). За умовами розрахунків, значення коефіцієнта тертя між структурними елементами вибирали при  $C_f = 0,2$ ; розрахунки значень коефіцієнта тертя при  $C_f = 0,1$  й  $C_f = 0,5$  також підтверджують існування цих хвильових структур. У випадку відсутності сили тертя, тобто при  $C_f = 0$ , такі хвилі зникають. Щодо залежності домінантної частоти від коефіцієнта тертя, то вона практично відсутня, тільки зі збільшенням коефіцієнта в'язкості періодична хвиля стає більш чіткою. Отже, хвильові структури утворюються лише за наявності в середовищі сили тертя, що спричинює обертальний рух елементів та дисипацію енергії.

Для того щоб дослідити вплив розміру гранул на властивості хвильових структур, було проведено розрахунки поширення хвиль у шарі, утвореному масивом з вдвічі меншими за

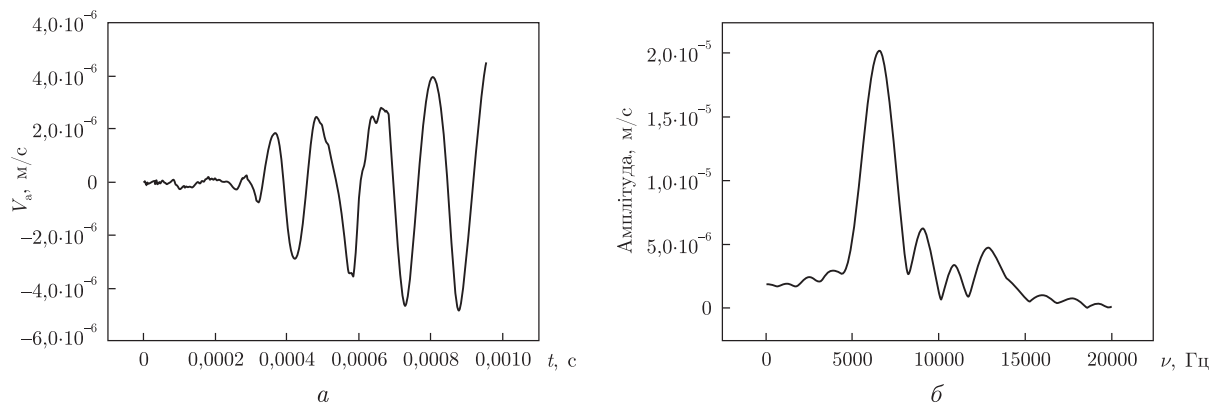


Рис. 3. Залежність усередненої швидкості від часу на відстані  $x = 24$  см (а) та її спектр (б)

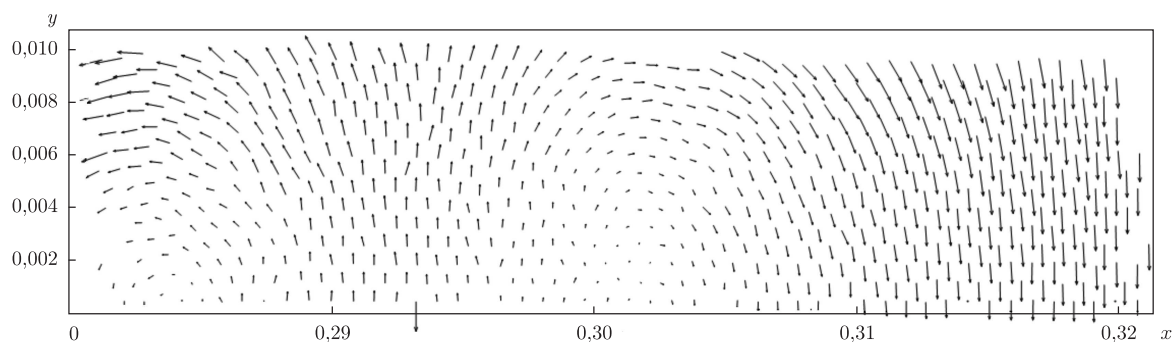


Рис. 4. Поле швидкостей в області  $28 \text{ см} \leq x \leq 32 \text{ см}$  у момент часу  $t = 1,0$  мс

розмірами гранулами (середній розмір елементів  $r_0 = 0,2$  мм). При цьому кількість елементів зростає до 64000 за умов, що висота шару залишилась тією ж самою. Як показують розрахунки, в такому масиві також утворюються періодичні структури і також лише за наявності сили тертя між його елементами. Виділена у цьому випадку  $\nu_s$  становить  $\sim 8600$  Гц. Ця частота вища, ніж у випадку масиву з більшими елементами.

Ще один параметр, який був предметом дослідження стосовно його впливу на хвильові структури, — висота шару. Було проведено розрахунки хвильового процесу в гранульованому шарі з вдвічі більшою висотою. Такий масив утворений з 28 000 елементів із середнім розміром  $r_0 = 0,4$  мм. Як показали розрахунки, характерна частота періодичних коливань у цьому випадку майже у 1,5 раза нижча ( $\nu_s \approx 4100$  Гц). Отже, збільшення висоти вдвічі призводить до збільшення розмірів структур лише у півтора раза. За даними розрахунків хвильового процесу в шарі гранульованого середовища за відсутності сили тяжіння доведено, що такі хвильові структури не утворюються.

Таким чином, в результаті комп'ютерного моделювання встановлено, що в процесі поширення нелінійної хвилі у шарі структурованого середовища можуть утворюватися хвильові структури, параметри яких залежать від розміру елементів структури та від висоти шару.

1. Liu C.-H., Nagel S. R. Sound in sand // Phys. Rev. Lett. – 1992. – **68**. – P. 2301–2304.
2. Liu C.-H., Nagel S. R. Sound in granular material: Disorder and nonlinearity // Phys. Rev. B. – 1993. – **48**. – P. 15646–15650.
3. Jia X., Carolly C., Velichky B. Ultrasonic propagation in externally stressed granular media // Phys. Rev. E. – 1999. – **60**. – P. 1863–1866.

4. *Somjai E., Roux J.-N., Snoeijer J. H. et al.* Elastic wave propagation in confined granular systems // *Ibid.* – 2005. – **72**. – 021301, 15 p.
5. *Owens E. T., Daniels K. E.* Sound propagation and force chains in granular materials // *Europhys. Lett.* – 2011. – **94**. – 54005, 6 p.
6. *Вильчинская Н. А., Николаевский В. Н.* Акустическая эмиссия и спектр сейсмических сигналов // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* – 1984. – № 5. – С. 91–100.
7. *Pöschel T., Schwager T.* *Computational Granular Mechanics.* – Berlin: Springer, 2005. – 322 p.
8. *Swope W. C., Andersen H. C., Berens P. H., Wilson K. R.* A computer simulation method for the calculation of equilibrium constants for the formation of physical clusters of molecules: Application to small water clusters // *J. Chem. Phys.* – 1982. – **76**, No 1. – P. 637–649.
9. *Микуляк С. В.* Моделирование процессов динамического деформирования дискретной среды под воздействием импульсной нагрузки // *Физ. мезомех.* – 2007. – **10**, № 6. – С. 69–74.
10. *Даниленко В. А., Микуляк С. В.* Комп'ютерне моделювання процесів динамічного деформування структурованого геофізичного середовища // *Доп. НАН України.* – 2008. – № 2. – С. 123–129.

*Відділення геодинаміки вибуху  
Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна  
НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 27.06.2012*

Член-корреспондент НАН України **В. А. Даниленко, С. В. Микуляк**

### **Особенности распространения нелинейных волн в сыпучей среде**

*Методом дискретных элементов проведено моделирование двумерных процессов распространения нелинейных волн в слое сыпучей (гранулированной) среды, находящейся в поле силы тяжести. Установлено, что в слое структурированной среды могут образовываться периодические волновые структуры, параметры которых зависят от размеров элементов структуры и от высоты слоя.*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. A. Danylenko, S. V. Mykulyak**

### **Characteristic features of the nonlinear wave propagation in a granular medium**

*The computer simulation of the two-dimensional processes of nonlinear wave propagation in the layer of a granular medium under the gravitation field is carried out, by using the discrete element method. We have found that periodic wave structures can be formed in the layer of a structured medium. Their parameters depend on the size of elements and on the height of the layer.*