УДК 532.135:[532.584+591.111.4]

Є. Ю. Таран, В. А. Каліон, О. О. Мельник

Ейнштейнівська в'язкість розведеної суспензії мікрочастинок у крові

(Представлено академіком НАН України Л. А. Булавіним)

Отримано аналітичний вираз та числові значення для ефективної зсувної в'язкості розведеної суспензії сферичних мікрочастинок у крові в рамках структурного реологічного методу Ейнштейна. Як реологічна модель крові у роботі використовується мікроконтинуальна полярна рідина Ковіна. Врахування полярних властивостей крові як несучої рідини суспензії веде до збільшення ефективної в'язкості суспензії порівняно із такою ж суспензією з ньютонівською несучою рідиною.

У роботі розглядається розведена суспензія у крові недеформівних сферичних частинок однакового радіуса, які мають нульову плавучість.

Суспензії у крові виникають [1] при рентгенівській візуалізації кровоносних судин, при діагностуванні та лікуванні ракових захворювань, в апаратах для діалізу крові тощо.

Вирішуючи медичні проблеми, створюючи суспензії у крові, слід пам'ятати про можливі наслідки біомеханічного втручання в живий організм. Для цього необхідно знати, як діє на кров додання до неї зважених частинок. У даній роботі розглядається найпростіша — сферична — форма таких частинок, отримано аналітичний вираз та числові значення ефективної в'язкості розведеної суспензії, яка при цьому утворюється у крові.

Реологічна модель крові як несучої рідини суспензії. У роботі припускається, що радіус зважених частинок суспензії набагато більший порівняно з характерними розмірами формених елементів крові — еритроцитів, лейкоцитів і тромбоцитів. Це дозволяє розглядати взаємодію крові зі зваженими частинками як гідродинамічну взаємодію рідкого суцільного середовища з тілами, які ним обтікаються. Обтікання зважених частинок несучою рідиною суспензії — кров'ю, як завжди в реології суспензій, розглядається у наближенні Стокса.

При виборі континуальної реологічної моделі крові слід керуватися знаннями про реологічні особливості її поведінки у градієнтних течіях, про структурні особливості крові, а також знанням того, як структура крові впливає на її поведінку як рідкого середовища.

Згідно з [2], кров поводить себе по-різному, залежно від характерних розмірів області течії. Зокрема, у великих судинах вона поводить себе як ньютонівська рідина, а в малих — її поведінка є неньютонівською.

Сумарний об'єм еритроцитів крові приблизно в 50 разів перевищує об'єм інших формених елементів крові — лейкоцитів і тромбоцитів [2], тому реологічну поведінку крові визначає концентрація та механічні властивості тільки еритроцитів [2].

Висока концентрація еритроцитів — приблизно 46% — у крові людини приводить до того, що, як і в будь-якій концентрованій суспензії, власна кутова швидкість еритроцитів у градієнтних течіях крові відрізняється від регіональної кутової швидкості елементарного об'єму крові, в якому вони знаходяться. Цим пояснюється вибір у даній роботі, як і в роботах [3, 4], полярної рідини Ковіна [5] для реологічного моделювання крові.

Феноменологічна модель полярної рідини Ковіна [5] є однією з моделей структурного континууму [6]. Для врахування впливу елементів мікроструктури рідини на напружений стан у ній в моделі Ковіна [5] припускається, що частинки рідини, які містяться в елементарному об'ємі, що рухається зі швидкістю v_i і обертається з регіональною кутовою швидкістю $\omega_k = (1/2)\varepsilon_{klr} v_{r,l}$, можуть обертатися, крім того, навколо центра цього елементарного об'єму з кутовою швидкістю Ω_k, тобто частинки середовища можуть мати власні кутові характеристики, відмінні від швидкості повороту елемента середовища як цілого. Припускається також, що між частинками рідини діють пари сил. При цьому дія однієї частини рідини на іншу, прилеглу до неї, характеризується не тільки поверхневими силами (в'язкими напруженнями), але й поверхневими моментами (моментними напруженнями). Реологічні рівняння стану полярної рідини Ковіна [5] мають вигляд

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\gamma_{ij} - 2kH_{ij}, \tag{1}$$

$$\Lambda_{ij} = \alpha\delta_{ij} + (\beta + \gamma)\Psi_{ij} + (\beta - \gamma)\Psi_{ji}. \tag{2}$$

Тут τ_{ij} — тензор в'язких напружень; Λ_{ij} — тензор моментних напружень; γ_{ij} — тензор швидкостей деформації, $\gamma_{ij} = (1/2)(v_{i,j} - v_{j,i})$; $H_{ij} = \varepsilon_{mij} h_m$, де $h_m = \Omega_m - \omega_m$; $\Psi_{mk} = \Omega_{m,k}$; ε_{ijr}, δ_{ij} — символи Леві–Чівіта і Кронекера; p — тиск; μ, k, α, β, γ — реологічні сталі; кома в індексах означає похідну у напрямі осі, яка позначена індексом, що йде за комою.

При розгляді найпростіших течій у роботах [5, 7] отримано, що ефективна в'язкість полярної рідини Ковіна (1), (2) не залежить від кінематичних характеристик течії, а визначається лише геометрією течії та реологічними сталими моделі (1), (2). Так, у течії Куетта ефективна в'язкість полярної рідини (1), (2) визначається співвідношенням [5]

$$\mu_a^{(0)} = \frac{\mu}{1 - \dfrac{N_0 l_0}{h} \operatorname{th} \dfrac{N_0 h}{l_0}}, \tag{3}$$

де h — половина ширини каналу в течії Куетта; th — гіперболічний тангенс; N_0 і l_0 визначаються співвідношеннями

$$N_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu + k}}, \qquad l_0 = \sqrt{\frac{\beta + \gamma}{\mu}}.$$

Згідно з [5], параметри N_0 і l_0 змінюються в межах $0 \leqslant N_0 \leqslant 1$, $l_0 \geqslant 0$. При $N_0 = 0$ реологічна модель полярної рідини перетворюється на реологічну модель ньютонівської рідини з в'язкістю μ [5]. Із (3) при цьому дійсно випливає, що $\mu_a^{(0)} = \mu$.

Параметр l_0, який має розмірність довжини, пов'язаний, згідно з [5], з характерним розміром елементів мікроструктури реальних мікроструктурних рідин, які моделюються полярною рідиною (1), (2). Аналіз співвідношення (3) дозволяє зробити висновок, що вплив обертальної в'язкості k полярної рідини при $0 < N_0 \leqslant 1$ на ефективну в'язкість $\mu_a^{(0)}$ виявляється при скінченних значеннях $2h/l_0$, тобто у порівняно вузьких каналах течії Куетта полярної рідини. У протилежному випадку, тобто при $h/l_0 \to \infty$, вплив обертальної в'язкості k полярної рідини (1), (2) на її ефективну в'язкість $\mu_a^{(0)}$ відсутній; при цьому з (3) випливає, що $\mu_a^{(0)} = \mu$, тобто полярна рідина (1), (2) поводить себе як ньютонівська з в'язкістю μ. Проведений аналіз показує схожість реологічної поведінки полярної рідини при $0 < N_0 \leqslant 1$ у вузьких і широких каналах і крові у малих і великих судинах, відповідно.

Рівняння (1), (2) полярної рідини були використані у роботах [3, 4] для реологічного моделювання крові. Порівняння в роботі [4] профілей швидкості полярної рідини і крові у течіях Пуазейля на основі експериментальних даних, одержаних у роботі [8], дозволило отримати значення параметрів N_0 і l_0 полярної рідини (1), (2) для реологічного моделювання крові при різних значеннях гематокриту C_b (табл. 1).

Ефективна в'язкість розведеної суспензії сферичних частинок у крові. Вивчення в роботі [9] розведеної суспензії сферичних частинок однакового радіуса, які мають нульову плавучість, у полярній рідині (1), (2) дозволило одержати вираз для ефективної в'язкості μ_a такої суспензії

$$\mu_a = \mu\left(1 + 2{,}5cF\left(N_0, \frac{2a}{l_0}\right)\right), \tag{4}$$

де c — об'ємна концентрація зважених частинок; a — радіус сферичних зважених частинок;

$$F(N_0, 2a/l_0) = \frac{3N_0 K_{3/2}\left(\dfrac{2a}{l_0} N_0\right)}{\dfrac{2a}{l_0} K_{5/2}\left(\dfrac{2a}{l_0} N_0\right)};$$

$K_{3/2}$, $K_{5/2}$ — функції Макдональда напівцілого порядку.

Вираз (4) для μ_a було отримано за припущень структурного методу Ейнштейна [10], за якими несуча рідина, що моделюється рівняннями (1), (2), і зважені сферичні частинки мають такі властивості:

1) зважені частинки суспензії не деформуються у процесі течії, однорідні, мають однакові розміри і форму;

2) діаметр d зважених частинок значно менший, ніж характерний лінійний розмір $\bar{l}$ макротечії суспензії, але є значно більшим, ніж характерний розмір l елементів мікроструктури несучої рідини: $l \ll d \ll \bar{l}$;

3) на поверхні зважених частинок немає пристінного ковзання несучої рідини, тобто виконується умова прилипання;

4) рух несучої рідини відносно зважених частинок повільний;

5) об'ємна концентрація зважених частинок суспензії є малою;

6) зважені частинки мають нульову плавучість.

Використання у даній роботі рівнянь (1), (2) для реологічного моделювання крові як несучої рідини суспензії вимагає виконання припущень *1–6* і для суспензії сферичних частинок у крові. Припущення *1*, *2*, *4–6* не є специфічними, вони можуть виконуватись для суспензії у крові, як і для суспензії з низькомолекулярною рідиною. Виконання ж умови *3* для суспензії у крові не є очевидним, оскільки кров як несуча рідина суспензії сама є суспензією своїх формених елементів. Але незважаючи на це, для крові, згідно з [4], як і для

Таблиця 1. Числові значення характеристичної в'язкості $[\mu_a]$ розведеної суспензії сферичних частинок у крові

C_b, %	N_0	$l_0 \cdot 10^6$, м	$[\mu_a]$			
			1	2	3	4
5	0,5021	8,475	2,8385	2,8071	2,7808	2,7586
10	0,5316	12,968	2,9952	2,9543	2,9193	2,8891
20	0,5501	16,597	3,1111	3,0649	3,0246	2,9893
30	0,5547	20,526	3,1963	3,1492	3,1072	3,0699
40	0,5569	23,462	3,2486	3,2019	3,1599	3,1219

ньютонівської несучої рідини в теорії Ейнштейна [10], також виконується умова прилипання. Порівняння у роботі [4] різних межових умов на поверхні, яка обтікається кров'ю при її моделюванні полярною рідиною (1), (2), показало, що результати теоретичних обчислень і експериментів найкраще збігаються саме при виконанні умови прилипання.

Функції Макдональда напівцілого порядку $K_{3/2}$, $K_{5/2}$ виражаються через елементарні функції [11]. Це дозволяє нам отримати μ_a у вигляді, зручному для аналізу та обчислень

$$\mu_a = \mu\left(1 + \frac{5}{2}c\frac{N_0^2(2a/l_0)^2 + 3N_0(2a/l_0) + 3}{N_0^2((2a/l_0)^2 - 3) + 3N_0(2a/l_0)(1 - N_0^2) + 3}\right). \quad (5)$$

Визначення у роботі [4] параметрів N_0 і l_0 полярної рідини (1), (2) при моделюванні течій крові дає змогу дослідити вплив полярних властивостей крові на ефективну в'язкість розведеної суспензії сферичних частинок у ній за допомогою формули (5).

Перед усім, згідно з (5), у граничному випадку $c = 0$, тобто за відсутності в суспензії зважених частинок, несуча рідини суспензії — кров, яка моделюється полярною рідиною (1), (2), поводить себе як ньютонівська рідина з в'язкістю μ. Такий результат відповідає реальній поведінці крові у великих судинах [2]. Це означає, що формула (5) визначає ефективну в'язкість розведеної суспензії сферичних частинок у крові саме у великих судинах.

Аналіз співвідношення (5) дозволяє також зробити висновок, що вплив обертальної в'язкості крові k при $0 < N_0 \leqslant 1$ на ефективну в'язкість суспензії виявляється при скінченних значеннях $2a/l_0$, тобто при порівняно малих розмірах зважених частинок суспензії. Зі збільшенням a/l_0 вплив обертальної в'язкості крові k на ефективну в'язкість суспензії зникає, формула (5) набуває вигляду $\mu_a = \mu(1{+}2{,}5c)$, тобто ефективна в'язкість розведеної суспензії сферичних частинок у крові при цьому визначається формулою Ейнштейна [10].

Формула (5) використовується нами також для знаходження числових значень характеристичної в'язкості $[\mu_a] = (\mu_a - \mu)/\mu c$. Результати обчислень $[\mu_a]$ при різних значеннях радіуса a зважених частинок суспензії та гематокриту C_b її несучої рідини — крові — подано у табл. 1.

У цій таблиці наведено залежність $[\mu_a]$ від C_b і a; стовпчики 1–4 для $[\mu_a]$ відповідають $a = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ м, $4 \cdot 10^{-5}$ м, $4{,}5 \cdot 10^{-5}$ м, $5 \cdot 10^{-5}$ м. Використані тут значення a значно більші за ефективний радіус еритроцитів у крові, який з урахуванням їх об'єму 70–100 мкм^3 [2] дорівнює $(2{,}56{-}2{,}88) \cdot 10^{-6}$ м. Цим забезпечується коректність моделювання крові полярною рідиною (1), (2) при вибраних розмірах зважених сферичних частинок.

Таким чином, аналіз аналітичного виразу (5) для ефективної в'язкості μ_a розведеної суспензії сферичних частинок у крові і отримані числові значення $[\mu_a]$ показують, що кров при наявності в ній зважених сферичних частинок виявляє свої неньютонівські — полярні — властивості навіть у тих течіях, в яких вона поводить себе як ньютонівська рідина за відсутності в ній зважених частинок. Серед таких течій — течія крові у великих та середніх судинах або у каналах різних пристроїв поза організмом людини.

Врахування при цьому полярних властивостей крові як несучої рідини суспензії приводить до збільшення характеристичної в'язкості $[\mu_a]$ суспензії порівняно з відповідною розведеною суспензією з ньютонівською моделлю крові. Зокрема, $[\mu_a]$ збільшується від добре відомого значення 2,5, одержаного Ейнштейном [10] для розведеної суспензії сферичних частинок з ньютонівською несучою рідиною, до значень, наведених у табл. 1, які були одержані у даній роботі при моделюванні крові як несучої рідини суспензії полярною рідиною (1), (2), для різних значень гематокриту C_b крові і різних значень радіуса a зважених сферичних частинок. Дослідження, проведені у даній роботі, розширюють діапазон застосування полярної рідини (1), (2) як реологічної моделі крові. Полярну рідину слід застосовувати для моделювання крові як дисперсійного середовища суспензії сферичних частинок навіть у великих судинах або каналах різних пристроїв поза організмом людини у випадках, коли кров виявляє властивості полярної рідини при взаємодії зі зваженими у ній частинками.

1. *Scientific* and clinical applications of magnetic carriers / Ed. by U. Höfeli et al. – New York: Plenum Press, 1997. – 682 p.
2. *Левтов В. А., Регирер С. А., Шадрина Н. Х.* Реология крови. – Москва: Медицина, 1982. – 272 с.
3. *Ariman T., Turk M. A., Sylvester N. D.* The steady and pulsatile flow of blood // J. Appl. Mech., Trans. ASME. – 1974. – **41**, No 1. – P. 1–7.
4. *Chaturani P., Biswas D.* A comparative study of Poiseuille flow of a polar fluid under various boundary conditions with applications to blood flow // Rheol. Acta. – 1984. – **23**, No 4. – P. 435–445.
5. *Cowin S. C.* The theory of polar fluids // Adv. Appl. Mech. – 1974. – **14.** – P. 279–347.
6. *Ariman T., Turk M. A., Sylvester N. D.* Microcontinuum fluid mechanics – a review // Int. J. Engn. Sci. – 1973. – **11**, No 8. – P. 905–930.
7. *Sawada T., Tanahachi T.* Fundamental steady flow of polar fluids // Bull. JSME. – 1981. – **24**, No 196. – P. 1778–1786.
8. *Bugliarello G., Sevilla J.* Velocity distribution and other characteristics of steady and pulsatile blood flow in fine glass tubes // Biorheol. – 1970. – **7**. – P. 85–107.
9. *Erdogan M. E., Kadioglu N.* The viscosity of a polar fluid with suspensions // Rheol. Acta. – 1971. – **10**, No 3. – P. 378–381.
10. *Einstein A.* Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen // Ann. Physik. – 1906. – **19.** – S. 289–306.
11. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. – Москва: Наука, 1984. – 344 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 28.05.2012

Е. Ю. Таран, В. А. Калион, О. А. Мельник

Эйнштейновская вязкость разбавленной суспензии микрочастиц в крови

Получены аналитическое выражение и числовые значения для эффективной сдвиговой вязкости разбавленной суспензии сферических микрочастиц в крови в рамках структурного реологического метода Эйнштейна. В качестве реологической модели крови используется микроконтинуальная полярная жидкость Ковина. Учет полярных свойств крови как несущей жидкости суспензии приводит к увеличению эффективной вязкости суспензии по сравнению с такой же суспензией с ньютоновской несущей жидкостью.

E. Yu. Taran, V. A. Kalion, O. O. Melnyk

Einsteinian viscosity of a dilute suspension of microparticles in blood

The analytical expression and numerical values for the effective shear viscosity of a dilute suspension of spherical microparticles in blood are obtained within the frame of the Einsteinian structural rheological method. The microcontinual Cowin polar fluid is used as a rheological model of blood. The accounting of polar properties of blood as a carrier fluid of the suspension leads to the increase of suspension's characteristic viscosity in comparison with that of a suspension with the Newtonian carrier fluid.