УДК 539.3

С. О. Папков, В. Н. Чехов

Исследование регулярности бесконечной системы алгебраических уравнений и определение критических нагрузок в задаче об устойчивости сжатой прямоугольной пластины

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

Исследуется квазирегулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений для прогиба тонкой прямоугольной пластины, сжимаемой двумя равномерными нормальными к границам усилиями в плоскости пластины. Численное сканирование достаточных условий существования ограниченного решения бесконечной системы позволяет локализовать область критических значений сжимающих усилий. Построена уточненная зависимость между критическими значениями сжимающих усилий в частном случае квадратной пластины.

Проблемы устойчивости тонкостенных элементов конструкций остаются актуальными. Постановка задач, различные обобщения и обзоры представлены в работах [1–3].

Ниже предлагается новый подход к исследованию устойчивости на примере классической задачи об устойчивости защемленной тонкой пластины $(x,y) \in \{[-a;a] \times [-b;b]\}$, равномерно сжатой усилиями N_x и N_y в своей плоскости. Прогиб $w(x,y)$ должен [3] удовлетворять линеаризованному уравнению устойчивости (D — изгибная жесткость пластины):

$$D\Delta\Delta w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

На границе пластины Γ заданы условия жесткого защемления:

$$w|_\Gamma = 0; \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Точное решение дифференциального уравнения (1) получаем методом разделения переменных и с учетом симметрии представляем в виде ряда с неопределенными коэффициентами $A_n,\ B_n$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch} p_{1,n} b \left(\frac{chp_{1,n}y}{\operatorname{ch} p_{1,n}b} - \frac{\operatorname{ch} p_{2,n}y}{\operatorname{ch} p_{2,n}b} \right) \cos\alpha_n x +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch} q_{1,n} a \left(\frac{\operatorname{ch} q_{1,n}x}{\operatorname{ch} q_{1,n}a} - \frac{\operatorname{ch} q_{2,n}x}{\operatorname{ch} q_{2,n}a} \right) \cos\beta_n y. \tag{3}$$

Здесь $\alpha_n = (n-1/2)\pi/a$, $\beta_n = (n-1/2)\pi/b$; величины $p_{1,n}$, $p_{2,n}$, $q_{1,n}$, $q_{2,n}$ являются корнями характеристических уравнений ($Q = N_x/D$; $P = N_y/D$):

$$p_{1,n} = \sqrt{\alpha_n^2 - \frac{P}{2} + \sqrt{(Q-P)\alpha_n^2 + \frac{P^2}{4}}}, \qquad q_{1,n} = \sqrt{\beta_n^2 - \frac{Q}{2} + \sqrt{(P-Q)\beta_n^2 + \frac{Q^2}{4}}},$$

$$p_{2,n} = \sqrt{\alpha_n^2 - \frac{P}{2} - \sqrt{(Q-P)\alpha_n^2 + \frac{P^2}{4}}}, \qquad q_{2,n} = \sqrt{\beta_n^2 - \frac{Q}{2} - \sqrt{(P-Q)\beta_n^2 + \frac{Q^2}{4}}}.$$

Подстановка решения (3) в краевые условия (2) приводит к бесконечной системе однородных линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n, B_n:

$$\begin{aligned} X_m\Delta_m^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha_n Y_n}{(\alpha_n^2 + q_{1,m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2,m}^2)}, \\ Y_m\Delta_m^y &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta_n X_n}{(\beta_n^2 + p_{1,m}^2)(\beta_n^2 + p_{2,m}^2)} \qquad (m = 1, 2, \ldots), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\quad X_n = B_n \dfrac{(-1)^n}{a}(q_{1,n}^2 - q_{2,n}^2)\operatorname{ch} q_{1,n}a, \qquad Y_n = A_n \dfrac{(-1)^{n+1}}{b}(p_{1,n}^2 - p_{2,n}^2)\operatorname{ch} p_{1,n}b;$

$$\frac{\Delta_m^x}{a} = \frac{q_{1,m}\operatorname{th} q_{1,m}a - q_{2,m}\operatorname{th} q_{2,m}a}{\beta_m(q_{1,m}^2 - q_{2,m}^2)}; \qquad \frac{\Delta_m^y}{b} = \frac{p_{1,m}\operatorname{th} p_{1,m}b - p_{2,m}\operatorname{th} p_{2,m}b}{\alpha_m(p_{1,m}^2 - p_{2,m}^2)}.$$

Систему (4) можно записать в канонической форме

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn}(P,Q) z_n \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

обозначив $z_{2m-1} = X_m$, $z_{2m} = Y_m$.

Если в некоторой области параметров (P, Q) система (5) является вполне регулярной, т. е. найдется такая константа $\theta \in (0,1)$, что все ряды из абсолютных значений коэффициентов (5) удовлетворяют неравенствам

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}(P,Q)| \leqslant \theta < 1, \tag{6}$$

то существует [4] единственное ограниченное решение системы (5), которое в силу однородности системы является тривиальным $z_m \equiv 0$. Очевидно, что в такой области параметров не могут находиться значения критических сил.

Ряды в условиях регулярности (6) вычисляются при помощи дигамма-функции $\psi(z)$:

$$\begin{aligned} S_{2m-1} &= \frac{a\left(\psi\left(\frac{1}{2} + i\frac{aq_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + i\frac{aq_{2m}}{\pi}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{aq_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{aq_{2m}}{\pi}\right)\right)}{|\Delta_m^x|\pi(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)}, \\ S_{2m} &= \frac{b\left(\psi\left(\frac{1}{2} + i\frac{bp_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + i\frac{bp_{2m}}{\pi}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{bp_{1m}}{\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{bp_{2m}}{\pi}\right)\right)}{|\Delta_m^y|\pi(p_{1m}^2 - p_{2m}^2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Переходя здесь к пределу, получаем для любых значений P и Q:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \frac{2}{\pi}.$$

Таким образом, система (5) удовлетворяет условиям (6), начиная с некоторого номера $m > N_R$, т. е. является квазирегулярной.

В работе [2] были предложены следующие условия существования ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы.

Теорема 1. *Бесконечная система* $z_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{kn} z_n + b_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *имеет ограниченное решение, если ее коэффициенты и свободные члены при заданном значении* N *удовлетворяют условиям:*

а) $\det[\delta_{kn} - a_{kn}]_{k,n=1}^{N} \neq 0$,

б) $$\max_{j=1..N} \sum_{i=1}^{N} |c_{ji}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{in}| < 1 + \inf_{k>N} \frac{\rho_k}{\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{kn}|},$$

в) $$|b_k| \leqslant B_N \sum_{n=1}^{N} |a_{kn}| \qquad (k = N+1, N+2, \ldots),$$

где $\{c_{ji}\}_{j,i=1}^{N}$ *— матрица, обратная к матрице* $\{\delta_{kn} - a_{kn}\}_{k,n=1}^{N}$*;* δ_{kn} *— символы Кронекера;* $\rho_k = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{kn}|$.

Применение теоремы 1 к системе (5) сводится к проверке условия

$$\max_{j=1,\ldots,N} \sum_{i=1}^{N} |c_{ji}| \left(1 - \rho_i - \sum_{n=1}^{N} |M_{in}|\right) < 1 + \inf_{m>N} \frac{\rho_m}{\sum\limits_{n=1}^{N} |M_{mn}|}, \tag{8}$$

достаточного для регулярности бесконечной системы

$$z_m = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(M_{mn} + \sum_{i,j=1}^{N} M_{mi} c_{ij} M_{jn}\right) z_n \qquad (m = N+1, N+2, \ldots), \tag{9}$$

получающейся после исключения из системы (5) первых N неизвестных.

В силу оценки

$$S_m^N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| M_{mn} + \sum_{i,j=1}^{N} M_{mi} c_{ij} M_{jn} \right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |M_{mn}| + \sum_{i=1}^{N} |M_{mi}| \mu_i$$

$$\left(\mu_i = \sum_{j=1}^{N} |c_{ij}| \left(1 - \rho_j - \sum_{n=1}^{N} |M_{jn}|\right)\right)$$

и асимптотического поведения элементов бесконечной матрицы $\lim\limits_{m\to\infty} M_{mi} = 0$, следует, что при $m \to \infty$ ряды в условиях регулярности для систем (5) и (9) эквиваленты, т. е.

$$\lim_{m\to\infty} S_m^N = \frac{2}{\pi}.$$

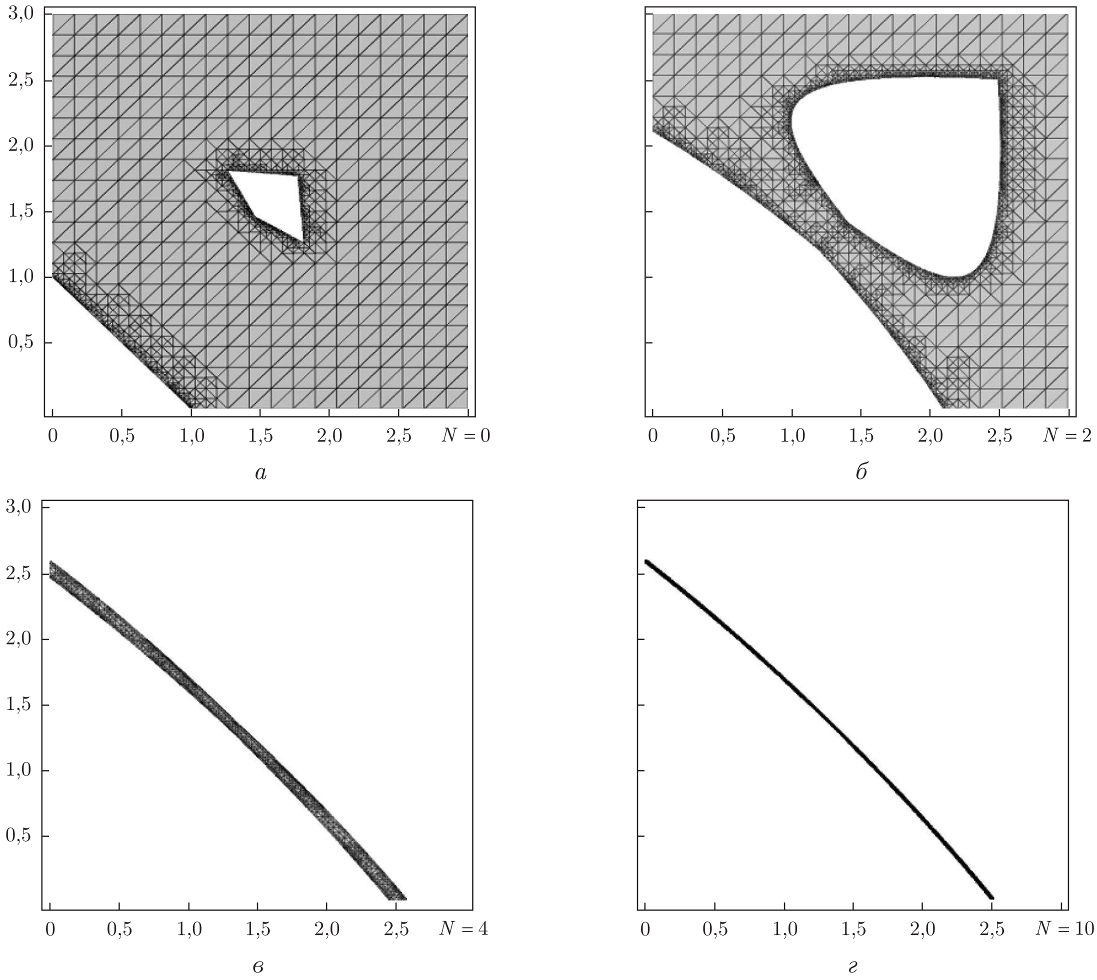

Рис. 1. Локализация области критических нагрузок

Следовательно, бесконечная система (9) является [4] вполне регулярной. Таким образом, выполнение критерия (8) в некоторой области параметров (P, Q) гарантирует отсутствие критических нагрузок в этой области.

Реализация условия (8) сводится к аналитическому суммированию рядов с помощью формул (7) и обращению конечной матрицы порядка N.

На рис. 1 представлена область $(Pa^2/\pi^2, Qb^2/\pi^2) \in \{[0;3] \times [0;3]\}$ в случае квадратной пластины ($a = b$). Белым цветом окрашены подобласти параметров, удовлетворяющие условию существования нулевого решения системы (9). На рис. 1, *а* условие (8) совпадает с проверкой регулярности системы (5) на основе (7). Увеличением порядка N удается сузить область критических нагрузок настолько, что в значениях критических сил начинают совпадать несколько первых значащих цифр. В табл. 1 это показано для случая одноосного сжатия ($P = 0$).

Из таблицы следует критическое значение $Q_C = 2{,}518(\pi/a)^2$. По приближенной формуле для критических нагрузок

$$Q + P = \frac{8}{3}(\pi/a)^2, \tag{10}$$

Таблица 1

N	4	10	20	30	50
Интервал для $\left(\frac{b}{\pi}\right)^2 Q$	2,456–2,586	2,507–2,530	2,515–2,522	2,517–2,520	2,518–2,518

приведенной в [5], ему соответствует $Q_0 = 2{,}667(\pi/a)^2$. В [6] дается уточненное значение $Q_1 = 2{,}517(\pi/a)^2$, которое отлично согласуется с найденным значением.

Аппроксимация кривой на рис. 1, *г* позволяет заменить приближенную зависимость (10) на следующую уточненную зависимость между критическими значениями параметров нагрузки при двухосном сжатии квадратной пластины:

$$Q + P + 0{,}0211\frac{a^2}{\pi^2}(Q-P)^2 = 2{,}652\frac{\pi^2}{a^2}. \tag{11}$$

Для определения формы потери устойчивости остается с учетом найденных значений критических нагрузок P_C и Q_C выполнить численные оценки нетривиального ограниченного решения квазирегулярной бесконечной системы (4) и воспользоваться аналитическим представлением прогиба в форме бесконечного ряда (3).

1. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1971. – 276 с.
2. *Папков С. О., Чехов В. Н.* О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 57–62.
3. *Timoshenko S. P., Gere J. M.* Theory of elastic stability. – New York: McGraw-Hill, 1961. – 541 p.
4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – 5-е изд. – Москва; Ленинград: Физматгиз, 1962. – 695 с.
5. *Прочность,* устойчивость, колебания: Справочник / Под общ. ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 508 с.
6. *Levy S.* Buckling of rectangular plates with built-in edges // J. Appl. Mech. ASME. – 1942. – **9**. – P. A171–A174.

Севастопольский национальный технический университет
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

Поступило в редакцию 04.04.2012

С. О. Папков, В. М. Чехов

Дослідження регулярності нескінченної системи алгебраїчних рівнянь та знаходження критичних зусиль в задачі про стійкість прямокутної пластини, що стискається

Досліджується квазірегулярна нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь щодо прогину тонкої прямокутної пластини, яка стискається двома рівномірними перпендикулярними до границь зусиллями в площині пластини. Числове сканування достатніх умов існування обмеженого розв'язку нескінченної системи дозволяє локалізувати область критичних значень зусиль, що стискають пластину. Побудовано уточнену залежність між критичними зусиллями в частинному випадку квадратної пластини.

S. O. Papkov, V. N. Chekhov

Research of a regularity for the infinite system of algebraic equations and the buckling problem for a compressed rectangular plate

The quasiregular infinite system of linear algebraic equations for the bending of a thin rectangular plate compressed by two uniform forces in a plane of the plate is investigated. Numerical scanning of sufficient conditions for the existence of a bounded solution of the infinite system allows us to localize the area of critical forces. The refined dependence between the critical values of forces in the partial case of a square plate is constructed.