



УДК 534.3+611.539

© 2012

А. О. Борисюк

Функція Гріна рівняння Гельмгольца для нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією

(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)

Побудовано функцію Гріна тривимірного рівняння Гельмгольца для нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ця функція записується у вигляді ряду за акустичними модами зазначеної труби і є періодичною за азимутальною координатою та симетричною відносно осевого перерізу, в якому розташоване точкове джерело. Крім того, в ній у явному вигляді відображені ефекти осередненої течії. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції Гріна відносно поперечного перерізу, в якому знаходиться точкове джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу осередненої течії на зазначену функцію зменшується, спричиняючи, окрім іншого, зменшення вказаної їй асиметрії. У випадку ж відсутності осередненої течії побудована функція Гріна є симетричною відносно вказаного поперечного перерізу і збігається з відповідною функцією Гріна для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі.

Дослідження акустичних полів у трубах є актуальною проблемою у літако- та автомобілебудуванні, комунальному господарстві, архітектурі, медицині, нафтогазовій промисловості тощо [1–3]. Ця проблема, незалежно від типу труб й акустичних джерел у них, в принципі може бути розв'язана за допомогою методу функцій Гріна. Проте його застосування є доцільним лише за умови існування принципової можливості побудови відповідної функції Гріна.

Ця можливість, окрім кваліфікації дослідника, залежить від геометрії досліджуваної труби та форми її поперечного перерізу, фізичних властивостей її стінок та умов її закріплення, акустичних умов на кінцях труби та наявності або відсутності течії в ній тощо. Як показує аналіз наукової літератури, з-поміж випадків, які визначаються різними комбінаціями цих факторів, найбільш дослідженими є випадки нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового та прямокутного поперечного перерізу [1, 3–10]. Для цих випадків побудовано відповідні функції Гріна хвильового рівняння і рівняння Гельмгольца, а також, з їх

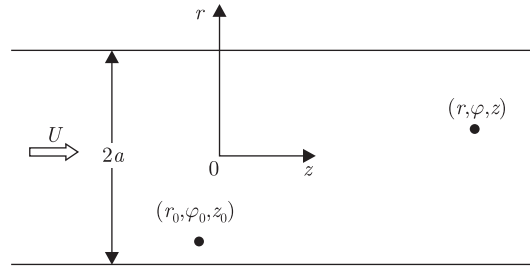


Рис. 1. Геометрія задачі

допомогою, одержано вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами у зазначених трубах. Проте всі ці результати, як правило, обмежуються випадком відсутності течії в трубі. Якщо ж наявність течії і береться до уваги, то її ефекти у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах проявляються лише у неявному вигляді [1, 4, 7–10].

Цей недолік частково виправляється у даній роботі. Тут будується функція Гріна рівняння Гельмгольца для нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ця функція має явну залежність від параметрів течії, а в разі її відсутності — збігається з відповідною функцією Гріна для зазначеної труби, яка наведена в науковій літературі [1, 6–10].

Постановка задачі. Розглядається нескінченна пряма жорсткостінна труба кругового поперечного перерізу радіусом a (див. рис. 1), в якій з осередненою осьовою швидкістю U тече рідина. У трубі задані довільним чином розташовані акустичні джерела різної природи, які генерують в ній звукове поле. Це поле описується *конвективним* хвильовим рівнянням¹, яке в циліндричній системі координат (r, φ, z) має такий вигляд [7–10]:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \gamma, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |z| < \infty, \quad |t| < \infty,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2c_0 M \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + c_0^2 M^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Образ Фур'є рівняння (1) у частотній області

$$\nabla^2 \tilde{p}_a + k_0^2 \tilde{p}_a + i2k_0 M \frac{\partial \tilde{p}_a}{\partial z} - M^2 \frac{\partial^2 \tilde{p}_a}{\partial z^2} = \tilde{\gamma}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |z| < \infty \quad (2)$$

описує довільну частотну компоненту зазначеного поля [7–10] і називається *конвективним* рівнянням Гельмгольца (тут p_a та \tilde{p}_a — відповідно акустичний тиск та його частотний образ Фур'є, c_0 — швидкість звуку в незбуреній рідині, γ — функція, що описує сумарний розподіл вищевказаних джерел, $\tilde{\gamma}$ — її частотний образ Фур'є, $M = U/c_0$ — число Маха

¹Наявність терміну “конвективне” у назві цього рівняння зумовлена тим, що воно, внаслідок наявності конвективної похідної $U\partial/\partial z$ у повній похідній за часом d/dt , містить доданки, які залежать від числа Маха течії. У разі відсутності течії ($M = 0$) зазначені доданки зникають, і це рівняння збігається зі своїм класичним аналогом.

течії, $k_0 = \omega/c_0$ — акустичне хвильове число, а ω — колова частота). Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (2) для досліджуваної труби.

Функція Гріна. Функція Гріна \tilde{G} рівняння (2) задовольняє рівняння

$$\nabla^2 \tilde{G} + k_0^2 \tilde{G} + i2k_0 M \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z} - M^2 \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial z^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0), \quad (3)$$

$$0 \leq r, r_0 \leq a, \quad 0 \leq \varphi, \varphi_0 \leq 2\pi, \quad |z| < \infty, \quad |z_0| < \infty$$

(де $\delta(\dots)$ — дельта-функція Дірака) і описує акустичний тиск у точці (r, φ, z) , який генерується в трубі на частоті ω точковим джерелом, розташованим у точці (r_0, φ_0, z_0) . Крім цього, \tilde{G} повинна мати нульову радіальну похідну на нерухомій жорсткій стінці труби

$$\left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad (4)$$

задовольняти умову випромінювання у нескінченності², а також бути періодичною за координатою φ і симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$ розташування зазначеного джерела.

Розв'язок граничної задачі (3), (4) шукаємо у вигляді ряду за акустичними модами труби $\{\Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)}\}$:

$$\tilde{G}(r, \varphi, z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{G}_{nm}^{(j)}(z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi), \quad (5)$$

$$\Psi_{nm}^{(1)}(r, \varphi) = J_n(\alpha_{nm} r) \cos(n\varphi), \quad \Psi_{nm}^{(2)}(r, \varphi) = J_n(\alpha_{nm} r) \sin(n\varphi),$$

де J_n — циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n ; $\alpha_{nm} = \zeta_{nm}/a$ — радіальні хвильові числа; ζ_{nm} — корені рівняння $J'_n(\zeta_{nm}) = 0$ ($m = 1, 2, \dots$); а $\Psi_{0m}^{(2)} \equiv 0$. Вибране представлення (5) функції \tilde{G} задовольняє умову (4), а його невідомі коефіцієнти $\tilde{G}_{nm}^{(j)}$ — одновимірне конвективне рівняння Гельмгольца²

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \tilde{G}_{nm}^{(j)}}{\partial z^2} + k_{nm}^2 \tilde{G}_{nm}^{(j)} + i2k_0 M \frac{\partial \tilde{G}_{nm}^{(j)}}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \delta(z - z_0),$$

$$k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{nm}^2}; \quad |z| < \infty, \quad |z_0| < \infty; \quad j = 1, 2; \quad n \geq 0; \quad m \geq 1; \quad (6)$$

$$\|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2 = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m} a), & n = 0, \\ \frac{\pi a^2}{2} J_n^2(\alpha_{nm} a) \left[1 - \frac{n^2}{\alpha_{nm}^2 a^2} \right], & n \geq 1, \end{cases} \quad \|\Psi_{nm}^{(2)}\|^2 = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2, & n \geq 1, \end{cases}$$

яке одержується з рівняння (3) після підстановки в нього ряду (5) та подальшого множення одержаного при цьому співвідношення скалярно на моди $\Psi_{nm}^{(j)}$ і врахування ортогональності останніх.

Розв'язок рівняння (6) можна одержати з розв'язку класичного одновимірного рівняння Гельмгольца, до якого можна звести рівняння (6) шляхом виконання певних математичних операцій. Для цього запишемо функції $\tilde{G}_{nm}^{(j)}$ у вигляді

$$\tilde{G}_{nm}^{(j)}(z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) = \frac{\lambda a}{c_0} e^{-i\lambda^2 M k_0 (z - z_0)} \tilde{G}_{nm}^{(j)}(Z, r_0, \varphi_0, Z_0; \Omega), \quad (7)$$

²Перша умова означає рівність нулю радіальної компоненти акустичної швидкості на стінці труби, тоді як друга — відсутність відбиття звуку на її кінцях (на нескінченності).

де $\widehat{G}_{nm}^{(j)}$ є новими невідомими функціями,

$$Z = \frac{\lambda z}{a}, \quad Z_0 = \frac{\lambda z_0}{a} \quad - \quad (8)$$

безрозмірними осьовими координатами,

$$\Omega = \lambda \frac{\omega a}{c_0} = \lambda k_0 a \quad - \quad (9)$$

безрозмірною частотою, а

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \quad - \quad (10)$$

безрозмірним параметром. Тоді підстановка представлення (7) у рівняння (6) і врахування там співвідношень (8)–(10) приводить до рівняння для функцій $\widetilde{G}_{nm}^{(j)}$:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{G}_{nm}^{(j)}}{\partial Z^2} + K_{nm}^2 \widetilde{G}_{nm}^{(j)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{c_0 a}{\lambda} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \delta\left(\frac{a}{\lambda}(Z - Z_0)\right),$$

$$K_{nm} = \sqrt{\Omega^2 - \alpha_{nm}^2 a^2} = \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha_{nm}^2} a, \quad (11)$$

$$|Z| < \infty, \quad |Z_0| < \infty, \quad j = 1, 2; \quad n \geq 0, \quad m \geq 1,$$

яке є класичним одновимірним рівнянням Гельмгольца. Його розв'язок для нескінченної області має такий вигляд [1, 7–10]:

$$\widetilde{G}_{nm}^{(j)} = \frac{ic_0}{4\pi K_{nm}} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} e^{iK_{nm}|Z - Z_0|}, \quad (12)$$

$$|Z| < \infty; \quad |Z_0| < \infty; \quad j = 1, 2; \quad n \geq 0; \quad m \geq 1.$$

Наявність виразу (12) для функцій $\widehat{G}_{nm}^{(j)}$, а також виразів (8), (9) і (11) для параметрів $\{Z, Z_0\}$, Ω і K_{nm} відповідно дозволяє, на основі (7), одержати розв'язок рівняння (6):

$$\widetilde{G}_{nm}^{(j)} = \frac{i\lambda}{4\pi \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha_{nm}^2}} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} e^{i(\lambda \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha_{nm}^2} |z - z_0| - \lambda^2 M k_0 (z - z_0))}. \quad (13)$$

Тоді врахування коефіцієнтів (13) у ряді (5) приводить до виразу для шуканої функції Гріна конвективного рівняння Гельмгольца (2) для досліджуваної труби:

$$\widetilde{G} = \frac{i\lambda}{4\pi} e^{-i\lambda^2 M k_0 (z - z_0)} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \phi) \frac{e^{i\lambda \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha_{nm}^2} |z - z_0|}}{\sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha_{nm}^2}}. \quad (14)$$

Аналіз співвідношення (14) показує, що функція \widetilde{G} розкладається в ряд за акустичними модами труби $\Psi_{nm}^{(j)}$ і, як і має бути, є періодичною за координатою φ та симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$. Крім того, в (14) через числа M і λ у явному вигляді відображено вплив осередненої течії на функцію G . Цей вплив збільшується зі збільшенням числа M ,

викликаючи, крім іншого, появу і подальше збільшення асиметрії функції \tilde{G} відносно перерізу $z = z_0$ розташування точкового джерела, що стоїть у правій частині рівняння (3). Натомість зменшення числа Маха приводить до зменшення впливу течії на функцію \tilde{G} , зумовлюючи, зокрема, зменшення зазначеної асиметрії. У випадку ж відсутності осередненої течії ($M = 0$, $\lambda = 1$) функція (14) є симетричною відносно перерізу $z = z_0$ і збігається з функцією Гріна класичного рівняння Гельмгольца для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі.

Таким чином, зробимо такі висновки.

1. У даній роботі побудовано функцію Гріна рівняння Гельмгольца (вираз (14)) для нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ця функція записується у вигляді ряду за акустичними модами зазначеної труби і є періодичною за азимутальною координатою φ та симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$ розташування точкового джерела.

2. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти осередненої течії. Ці ефекти стають вагомими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції відносно поперечного перерізу $z = z_0$, в якому розташоване вказане джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу осередненої течії на функцію Гріна зменшується, спричиняючи, окрім іншого, зменшення зазначеної її асиметрії.

3. У випадку відсутності осередненої течії побудована функція Гріна є симетричною відносно перерізу $z = z_0$ і збігається з відповідною функцією Гріна для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі.

4. У процесі побудови функції Гріна запропоновано перетворення (7)–(10), що дозволяє зводити одновимірне конвективне рівняння Гельмгольца (6) до його класичного одновимірного аналогу (11), і на основі відомого розв'язку останнього одержувати розв'язок першого рівняння.

1. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Ч. 1. Загальна теорія // Акуст. вісник. – 2003. – **6**, № 3. – С. 3–9.
2. Berger S. A., Jou L.-D. Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech. – 2000. – **32**. – P. 347–382.
3. Вовк І. В., Грінченко В. Т., Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гідромеханіка. – 2009. – **11**, № 4. – С. 17–30.
4. Davies H. G., Ffowcs Williams J. E. Aerodynamic sound generation in a pipe // J. Fluid Mech. – 1968. – **32**, No 4. – P. 765–778.
5. Doak P. E. Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (1): the effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern // J. Sound Vib. – 1973. – **31**, No 1. – P. 1–72.
6. Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics: Vol. 1. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 997 p.
7. Howe M. S. Acoustics of fluid-structure interactions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.
8. Crighton D. G., Dowling A. P., Ffowcs Williams J. E. et al. Modern methods in analytical acoustics. – London: Springer, 1992. – 738 p.
9. Грінченко В. Т., Вовк І. В., Мацукура В. Т. Основи акустики. – Київ: Наук. думка, 2007. – 640 с.
10. Голдстейн М. Е. Аэроакустика. – Москва: Машиностроение, 1981. – 294 с.

А. А. Борисюк

Функция Грина уравнения Гельмгольца для бесконечной прямой жесткостенной трубы кругового поперечного сечения с осредненным течением

Построена функция Грина трехмерного уравнения Гельмгольца для бесконечной прямой жесткостенной трубы кругового поперечного сечения с осредненным течением. Эта функция записывается в виде ряда по акустическим модам указанной трубы и является периодической по азимутальной координате и симметричной относительно осевого сечения, в котором расположен точечный источник. Кроме этого, в ней в явном виде отражены эффекты осредненного течения. Эти эффекты становятся более существенными с увеличением числа Маха течения, вызывая, в частности, появление и дальнейшее увеличение асимметрии функции Грина относительно поперечного сечения, в котором находится точечный источник. И наоборот, с уменьшением числа Маха весомость влияния осредненного течения на указанную функцию уменьшается, приводя, кроме прочего, к уменьшению указанной асимметрии. В случае же отсутствия осредненного течения построенная функция Грина является симметричной относительно указанного поперечного сечения и совпадает с соответствующей функцией Грина для исследуемой трубы, приведенной в научной литературе.

А. О. Borisyuk

Green's function of the Helmholtz equation for an infinite straight rigid-walled pipe of circular cross-section with mean flow

Green's function of the three-dimensional Helmholtz equation for an infinite straight rigid-walled pipe of circular cross-section with mean flow is found. This function is written in terms of a series of the pipe acoustic modes and is periodic in the azimuthal coordinate and symmetric with respect to the axial section, where a point source is located. Apart from this, the mean flow effects are directly reflected in the function. The effects become more significant as the Mach number increases, causing, in particular, the appearance and a further growth of the Green's function asymmetry with respect to the cross-section of the point source location. Vice versa, the decrease of the Mach number results in a decrease of the effects and, in particular, a decrease of the indicated asymmetry of the function. Without the mean flow, the obtained Green's function is symmetric with respect to the indicated cross-section and coincides with the corresponding Green's function for the investigated pipe, which is available in the scientific literature.