УДК 517.547.22

К. Г. Малютин, О. А. Боженко

Свободная интерполяция целыми функциями конечного порядка

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Получены необходимые и достаточные критерии разрешимости задачи кратной интерполяции в классе целых функций конечного порядка и нормального типа, которые формулируются в терминах канонического произведения и меры, которая определяется узлами интерполяции.

Классическая задача интерполяции в классах целых функций состоит в нахождении функции F, принадлежащей данному классу, принимающей в заданных точках $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, — узлах интерполяции, заданные значения $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Если на последовательность $\{b_n\}$ накладываются минимальные ограничения, обусловленные заданным классом целых функций, то задача называется задачей свободной интерполяции.

Существенный вклад в решение таких задач внесли А. Ф. Леонтьев [1], А. В. Братищев и Ю. Ф. Коробейник [2], А. Ф. Гришин и А. Руссаковский [3], К. Г. Малютин [4]. Кроме того, в разное время этими задачами занимались Б. Я. Левин, Б. В. Винницкий, Т. И. Абанина, В. Б. Шаран, И. Б. Шепарович, Р. Э. Хейман и др.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Валирона, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho \geqslant 0$. Обозначим через $[\rho(r), \infty)$ класс целых функций типа не выше чем нормальный при $\rho(r)$, т. е. таких, что для функции f из этого класса существует константа $K_f > 0$ (зависящая от f) такая, что

$$\ln|f(z)| \leqslant K_f V(|z|), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где $V(r) = r^{\rho(r)}$, $r \in [0, \infty)$, $\lim\limits_{r\to+0} V(r) \overset{def}{=} 1$.

Мы будем рассматривать задачу кратной интерполяции в классе $[\rho(r), \infty)$.

Определение 1. Дивизор $D = \{a_n; q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (т. е. множество различных комплексных чисел a_n вместе с их кратностями q_n, $q_n \geqslant 1$ — целое число) называется интерполяционным в классе $[\rho(r), \infty)$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_{n,j}\}$, $j \in \overline{1, q_n}$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющей условию

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln^+ \max_{1<j<q_n} \frac{|b_{n,j}|}{(j-1)!} < \infty, \tag{2}$$

существует целая функция $F(z)$ класса $[\rho(r), \infty)$ со свойством

$$F^{(j-1)}(a_n) = b_{n,j}, \qquad j \in \overline{1, q_n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{I}$$

Ограничение (2) на значения интерполирующей функции $F(z)$ является следствием (1) и интегральной формулы Коши, поэтому рассматриваемая задача относится к классу задач свободной интерполяции.

Задача кратной интерполяции в классе $[\rho(r), \infty)$ была решена в работе [2] в терминах канонического произведения $E(z)$ множества D. При $\rho = 0$ эта задача решена в работе [2] при двух ограничениях на функцию роста $V(r)$:

1) $V(r)$ — медленно возрастающая функция (определение авторов работы [2]);

2) $V(r)$ — логарифмически выпуклая на $[0, \infty)$ функция.

Других работ, в которых рассматривается случай $\rho = 0$, в наше поле зрения не попало.

В настоящей работе мы снимаем ограничение 1 и приводим два критерия разрешимости задачи (2): в терминах канонического произведения и в терминах меры, определяемой узлами интерполяции.

Отметим одно естественное ограничение на функцию роста $V(r)$, связанное с тем, что класс $[\rho(r), \infty)$ отличен от множества всех полиномов:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln r}{V(r)} = 0.$$

Прежде чем сформулировать основной результат нашей работы, введем следующие обозначения и определения. Через $C(z, r)$ мы будем обозначать открытый круг с центром в точке z радиуса r. Пусть $D = \{a_n; q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — дивизор, G — множество в $\mathbb{C}$. Обозначим через

$$n_D(G) = \sum_{a_n\in G} q_n$$

меру, определяемую дивизором D, и рассмотрим семейство функций

$$\Phi_{D,z}(\alpha) = \frac{(n_d(C(r, \alpha|z|)) - q_z)^+}{V(|z|)},$$

где q_z — кратность ближайшей к точке z точки a_n (если таких точек несколько, то будем брать наибольшую кратность). Предположим, что точки дивизора занумерованы в порядке возрастания, т. е. $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$. Если $D = \{a_n; q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — дивизор, то $|D| = \bigcup\limits_n a_n$. Включение $D \subset D' = \{s_n; p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ означает, что $|D| \subset |D'|$ и если $a_n = s_n$, то $q_n \leqslant p_n$. Если $f(z)$ — целая функция, то через D_f будем обозначать дивизор ее корней, через $n_f(G)$ и $\Phi_{f,z}(\alpha)$ — величины, построенные с помощью дивизора D_f.

При нецелом ρ или $\rho = 0$ присоединенной функцией $E_D(z)$ дивизора D называется его каноническое произведение рода $[\rho]$ (через $[\cdot]$ как обычно обозначается целая часть числа). При целом $\rho > 0$ присоединенная функция $E_D(z)$ — это каноническое произведение рода ρ, построенное по точкам дивизора D' такого, что $D \subset D'$, причем точки $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дивизора D', отличные от точек D, простые, отделены от точек D и образуют слабо регулярное R-множество, т. е. удовлетворяют неравенству

$$|s_{n+1}| - |s_n| > d|s_n|^{1-\rho(|s_n|)},$$

где $d > 0$ — фиксированное число.

Результат Братищева–Коробейника может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема (Братищев–Коробейник). *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho \geqslant \geqslant 0$. Причем если $\rho = 0$, то $V(r)$ — медленно возрастающая и логарифмически выпуклая на $[0, \infty)$ функция. Для того чтобы дивизор D был интерполяционным в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы его присоединенная функция $E_D(z)$ удовлетворяла следующему условию:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{q_n!}{|E_D^{(q_n)}(a_n)|} < \infty. \tag{3}$$

В работе мы получаем новый критерий разрешимости задачи (I). Этот критерий формулируется в терминах функций $\Phi_{D,z}(\alpha)$ и является более удобным для проверки интерполяционности различных множеств. Для ясности изложения мы сформулируем наш результат в виде двух теорем для случая $\rho > 0$ и для случая $\rho = 0$.

Теорема 1. *Пусть $D = \{a_n; q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — дивизор, $\rho(r)$ — уточненный порядок такой, что $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$. Для того чтобы дивизор D был интерполяционным в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \int_0^{1/2} \frac{\Phi_{D,z}(\alpha)}{\alpha} d\alpha < \infty, \tag{4}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{q_n \ln|a_n|}{V(|a_n|)} < \infty. \tag{5}$$

Случай $\rho = 0$ является более сложным и требует дополнительных ограничений на функцию роста $V(r)$.

Теорема 2. *Пусть $D = \{a_n; q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — дивизор, $\rho(r)$ — уточненный порядок такой, что $\rho(r) = 0$. Причем выполняется одно из двух условий:*

a) функция $V(r)$ логарифмически выпуклая на полуоси $[0, \infty)$;

b) выполняется соотношение

$$\sup_{r>0} \frac{1}{\exp(V(r))} \max_{1\leqslant t\leqslant r} \left(\frac{r}{t}\right)^{V(t)} < \infty. \tag{6}$$

Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1) дивизор D является интерполяционным в классе $[\rho(r), \infty)$;

2) присоединенная функция $E_D(z)$ дивизора D удовлетворяет условию (3);

3) справедливы соотношения (4) и (5).

Доказательство теоремы 2 (как, впрочем, и теоремы 1) проводится по схеме (1) $\Longrightarrow$ $\Rightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1). Доказательство импликаций (1) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2) близко к рассуждениям в работе [3]. Заметим, что дополнительные условия a или b используются только в импликации (2) $\Longrightarrow$ (1), доказательство которой близко к рассуждениям работ [2, 5].

Приведем кратко доказательство теоремы. Рассмотрим импликацию (1) $\Longrightarrow$ (3). Докажем сначала, что (1) $\Rightarrow$ (5). Пусть $F(z)$ — функция класса $[\rho(r), \infty)$, решающая интерполяционную задачу для последовательности $b_{n,j}$, где $b_{n,j} = 0$, $j \in \overline{1, q_n - 1}$, $b_{n,q_n} = (q_n - 1)!$. Напишем формулу Иенсена для функции $F(z)$ в точке a_n:

$$q_n \ln\frac{1}{2}|a_n| + \int_0^{1/2|a_n|} \frac{n_F(C(a_n,t)) - q_n}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left|F(a_n + \frac{1}{2}|a_n|e^{i\theta})\right| d\theta + \ln\frac{(q_n - 1)!}{|F^{(q_n-1)}(a_n)|}. \tag{7}$$

Поскольку функция $F \in [\rho(r), \infty)$, то при некотором $K_1 > 0$ выполняется неравенство

$$\ln|F(z)| \leqslant K_1 V(|z|). \tag{8}$$

Тогда из (7) и (8) следует неравенство (5).

Аналогично доказывается, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_0^{1/2} \frac{\Phi_{D,a_n}(\alpha)}{\alpha} d\alpha < \infty.$$

Для завершения доказательства (4) остается заметить, что при $\alpha \leqslant 1/2$ имеет место оценка

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{\Phi_{D,z}(\alpha)}{\alpha} d\alpha \leqslant K_2 \int\limits_0^{1/2} \frac{\Phi_{D,a_n}(\alpha)}{\alpha} d\alpha,$$

где a_n — ближайшая к точке z точка дивизора D.

Импликация (1) $\Longrightarrow$ (3) доказана.

Рассмотрим импликацию (3) $\Longrightarrow$ (2). Заметим, что если выполняется условие (3), то при $\rho > 0$ присоединенная функция $E_D(z)$ дивизора D принадлежит классу $[\rho(r), \infty)$. Если $\rho = 0$, то ее принадлежность классу $[\rho(r), \infty)$ следует из результатов работы Рубела [6]. Используя лемму 4 из работы [2], найдем постоянную K_3, не зависящую от n, такую, что неравенство

$$\ln |E(z)| \geqslant -K_3 V(|z|) \tag{9}$$

выполняется в кольце $|a_n|/2 \leqslant |z| \leqslant 3|a_n|/2$ для всех z, кроме, быть может, исключительного множества кружков U_n с общей суммой радиусов меньше $|a_n|/4$. Тогда найдется такое $\delta_n \in \in (0, 1/2)$, что окружность $|z - a_n| = \delta_n |a_n|$ будет лежать вне множества U_n. В силу формулы Иенсена

$$\ln\left|\frac{E^{(q_n)}(a_n)}{q_n!}\right| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln |E(a_n + \delta_n |a_n| e^{i\theta})|\, d\theta - V(|a_n|) \int\limits_0^{\delta_n} \frac{\Phi_{D,a_n}(\alpha)}{\alpha} d\alpha - q_n \ln \delta_n |a_n| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln |E(a_n + \delta_n |a_n| e^{i\theta})| d\theta - V(|a_n|) \int\limits_0^{1/2} \frac{\Phi_{D,a_n}(\alpha)}{\alpha} d\alpha - q_n \ln |a_n|.$$

Тогда из (4), (5) и (9) следует (3).

Рассмотрим импликацию (2) $\Longrightarrow$ (1). Обозначим через

$$P_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{j-1} \frac{(z-a_k)^{q_k}}{E(z)}\bigg|_{z=a_k},$$

где $j = 1, 2, \ldots, q_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Положим далее

$$\alpha_{k,m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{j=0}^{q_k - m} \frac{1}{j!} P_{k, q_k+1-m-j} b_{k,j+1}, \qquad m = 1, \ldots, q_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$P_k(z) = \sum_{m=1}^{q_k} \alpha_{k,m} \left[\frac{1}{z - a_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{S_k} \right]^{(m-1)},$$

где $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральних чисел, которая выбирается таким образом, что ряд

$$F(z) = E(z) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z) \tag{10}$$

принадлежит классу $[\rho(r), \infty)$.

Непосредственно проверяется, что формальный ряд (10) решает интерполяционную задачу (I).

Замечание. Можно показать, что при $\rho > 0$ функция роста $V(r)$ является выпуклой относительно $\ln r$, а при $\rho > 1/e$ удовлетворяет и условию (6). Таким образом, дополнительные ограничения на $V(r)$ при $\rho = 0$ являются, в некотором смысле, естественными.

Работа выполнена в рамках научно-исследовательской темы №0111U002152.

1. *Леонтьев А. Ф.* К вопросу об интерполяции в классе целых функций конечного порядка // Мат. сб. – 1957. – **41**, № 83. – С. 81–96.
2. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* Кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 5. – С. 1102–1127.
3. *Гришин А. Ф., Руссаковский А. М.* Свободная интерполяция целыми функциями // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. – 1985. – **44**. – С. 32–42.
4. *Малютин К. Г.* Интерполяция голоморфными функциями: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1980. – 104 с.
5. *Малютин К. Г., Герасименко В. А.* Свободная интерполяция целыми функциями конечного гамма-типа // Мат. студії. – 2007. – **28**, № 1. – С. 45–50.
6. *Rubel L. A.* Entire and meromorphic functions. – New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 1996. – 187 p.

Сумский государственный университет *Поступило в редакцию 29.05.2012*

К. Г. Малютін, О. А. Боженко

Вільна інтерполяція цілими функціями скінченного порядку

Отримано необхідні і достатні критерії розв'язуваності задачі кратної інтерполяції в класі цілих функцій скінченного порядку і нормального типу, які формулюються в термінах канонічного добутку та міри, яка визначається вузлами інтерполяції.

K. G. Malyutin, O. A. Bozhenko

Free interpolation by entire functions of finite order

Necessary and sufficient criteria of resolvability of a problem of multiple interpolation in a class of entire functions of a finite order and the normal type, which are formulated in terms of a canonical product and a measure defined by interpolation knots, are obtained.