УДК 550.8

Член-корреспондент НАН Украины **Е. Г. Булах**

Прямая и обратная задачи магнитометрии для совокупности горизонтально расположенных круговых цилиндрических тел

Наведено розв'язок прямої й оберненої задач магнітометрії у класі горизонтально розташованих колових циліндрів. Акцентовано увагу на можливості застосування цього розв'язку для побудови аналітичної моделі початкового зовнішнього поля, для оцінки місцеположення намагнічених рудних тіл, для конструювання складної геологічної моделі, маси якої можуть зумовлювати спостережне поле.

Рассматривается решение прямой и обратной задач магнитометрии для случая, когда геологическая модель представлена совокупностью однородно намагниченных, горизонтально расположенных круговых цилиндрических тел. При этом вектор интенсивности намагничения каждого тела задан своими составляющими по осям декартовой системы координат. Интерес к такой постановке вызван следующими обстоятельствами.

Первое. В практической работе уже имеется опыт, когда сложная геологическая среда аппроксимируется набором материальных точек. С помощью такого вспомогательного массива конструируется сложная геологическая модель, массы которой могут обусловить наблюденное поле [1].

Второе. В практику интерпретационных работ вошел метод набухания, предложенный Д. Зидаровым, Ж. Желевым [2–4]. Алгоритмическое решение дает возможность построить геологическую модель, если известны координаты центральных точек аномалиеобразующих тел.

Третье. Часто обратные задачи решаются в заранее выбранном модельном классе. Требуется построить гипотетическую модель, которая могла бы обусловить исходное поле. Некоторые классы тел требуют постулирования положения внутренней точки аномального источника. В определенном модельном классе эта точка позволяет фиксировать центр звездности геологического объекта. В другом классе такая точка позволяет закрепить положение средней плоскости [5].

Четвертое. Нельзя не обратить внимание на вопросы аналитической аппроксимации исходного аномального поля. Для решения этой задачи широко используется метод подсобных тел, по А. К. Маловичко [6]. Класс круговых цилиндрических тел хорошо подходит для решения данной задачи. Можно привести и другие примеры.

1. Прямая задача магнитометрии для совокупности двухмерных, горизонтально расположенных круговых цилиндрических тел. Пусть геологическая модель состоит из фиксированного числа намагниченных тел. Каждое тело есть горизонтальный круговой цилиндр. Горизонтальные оси цилиндров между собой параллельны. Выберем систему координат. Начало этой системы поместим в точку на дневной поверхности. Ось аппликат направлена вертикально вниз, тогда координатная плоскость XOY совпадает с дневной поверхностью, если последняя — горизонтальная плоскость. Направление горизонтальных осей выберем так, чтобы ось ординат совпадала с простиранием цилиндрических тел.

Обратимся к геологической модели, которую будем описывать в координатной плоскости XOZ ($\xi O\zeta$). Положение каждого цилиндра определено координатами его центральной точки и радиусом той окружности, которая определяет внешнюю поверхность тела. Массы цилиндрических тел намагничены однородно. Вектор интенсивности намагничения каждого цилиндра разный и задан своими составляющими. Таким образом, геологическую модель можно описать такими параметрами:

$$P = \{m\colon [r; (a; b)]_t; [Ix; Iz]_t;\ t = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{1}$$

Поясним эту запись. Модель состоит из m горизонтальных круговых цилиндров. Каждый t-й цилиндр характеризуется своим радиусом и координатами геометрического центра. Массы цилиндра намагничены. Вектор интенсивности намагничения определен своими составляющими.

В точках вне намагниченных масс нужно вычислить аномальное поле.

Известно, что напряженность магнитного поля во внешних точках пространства характеризуется своим потенциалом:

$$U(x,z) = \iint\limits_S (I, \operatorname{grad} V) ds = \iint\limits_S (I_x V_x + I_z V_z) ds;$$

$$V = 2 \ln \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}} = -\ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2].$$

Напряженность аномального поля может быть выражена через составляющие.

Области интегрирования имеют такую форму, что удобно перейти к криволинейным интегралам. Имеем

$$\begin{aligned} Z = T_z(x,z) &= -2I_x \oint\limits_L \frac{(\zeta - z) d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} + 2I_z \oint\limits_L \frac{(\xi - x) d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}; \\ H = T_x(x,z) &= -2I_x \oint\limits_L \frac{(\xi - x) d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} - 2I_z \oint\limits_L \frac{(\zeta - z) d\zeta}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Геологическая модель состоит из t круговых цилиндров. Будем полагать, что взаимным влиянием намагниченных тел можно пренебречь. В этом случае внешнее магнитное поле подчиняется закону аддитивности.

Здесь для каждого t-го тела выбрана своя локальная система координат. Ее начало совпадает с центром окружности. Запишем

$$x_t = x - a_t; \qquad z_t = z - b_t.$$

Теоретическое поле, обусловленное всей моделью, опишем так:

$$\begin{aligned} Zt(x,z) = \sum_{t=1}^{m} \Bigg[&-2I_{x_j} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(b_t + r_t \sin\varphi - z) r_t \cos\varphi d\varphi}{(a_t + r_t \cos\varphi - x)^2 + (b_t + r_t \sin\varphi - z)^2} + \\ &+ 2I_{z_j} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(a_t + r_t \cos\varphi - x) r_t \cos\varphi d\varphi}{(a_t + r_t \cos\varphi - x)^2 + (b_t + r_t \sin\varphi - z)^2} \Bigg]; \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$Ht(x,z) = \sum_{t=1}^{m} \left[-2I_{x_j} \int_0^{2\pi} \frac{(a_t + r_t \cos\varphi - x) r_t \cos\varphi d\varphi}{(a_t + r_t\cos\varphi - x)^2 + (b_t + r_t \sin\varphi - z)^2} - \right.$$

$$\left. - 2I_{z_j} \int_0^{2\pi} \frac{(b_t + r_t \sin\varphi - z) r_t \cos\varphi d\varphi}{(a_t + r_t\cos\varphi - x)^2 + (b_t + r_t \sin\varphi - z)^2} \right]. \tag{3.2}$$

Интегрирование по контуру заменим интегральной суммой.

Так решается прямая задача. Нужно только определить совокупность тех точек вне намагниченных масс, в которых следует выполнить решение прямой задачи.

2. Обратная задача. Пусть в n фиксированных точках дневной поверхности заданы две функции. Это вертикальная и горизонтальная составляющие вектора напряженности внешнего магнитного поля. Эти величины чаще всего определяются относительно условного уровня. Обычно выбирают контрольный или нулевой пункт, а измеренное поле в любой i-й точке есть приращение составляющей напряженности поля относительно поля в нулевом пункте. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \Delta Zn(x_i, z_i) &= \Delta Zn(i) = Zn(i) - Zn(0), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \Delta Hn(x_i, z_i) &= \Delta Hn(i) = Hn(i) - Hn(0), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Полагают, что нулевой пункт выбран в нормальном магнитном поле и аномальные поля, определенные записанными выше функциями, вызваны только неоднородностями геологического строения. Вместе с тем нет оснований полагать, что магнитное поле в нулевом пункте свободно от влияния совершенно посторонних намагниченных объектов. В практике полевых работ интерпретатор часто сам корректирует уровень отсчета аномального поля.

Отмеченные выше обстоятельства позволяют при решении обратной задачи сделать два подхода относительно использования исходного магнитного поля.

Первый подход. Будем полагать, что функции (4) отражают неоднородности геологического строения. Требуется построить такую геологическую модель, которая порождает теоретическое магнитное поле, весьма близкое к исходному. Модель — это совокупность намагниченных круговых цилиндрических тел.

Нужно создать начальную геологическую модель. Обратимся к записи (1) и каждому параметру модели присвоим численное значение. Таким способом начальная модель описана параметрами $P^{(0)}$. Наблюденное или исходное магнитное поле, приведенное в формулах (4), было определено в n точках. Есть возможность в каждой фиксированной точке получить теоретическое поле:

$$\Delta Zt(x_i, z_i, P) = \Delta Zt(i, P), \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{5.1}$$

$$\Delta Ht(x_i, z_i, P) = \Delta Ht(i, P), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Здесь подчеркнуто, что теоретическое поле определено численными значениями параметров геологической модели.

Сопоставление полей сделаем в метрике L_2, тогда нетрудно записать такие функционалы:

$$F_Z(P) = \sum_{i=1}^{n} [\Delta Zn(i) - \Delta Zt(i, P)]^2; \tag{6.1}$$

$$F_H(P) = \sum_{i=1}^{n} [\Delta Hn(i) - \Delta Ht(i,P)]^2. \tag{6.2}$$

Часто исходное поле сглаживается, тогда влияния случайных погрешностей весьма незначительны. Если число n в записи функционалов (6) — достаточно большое, а исходная функция не была сглажена, то и в этом случае влияние случайных величин крайне мало.

Совсем другое дело, когда исходная функция содержит региональную составляющую или фоновый эффект. Его нужно прогнозировать и учесть при сопоставлении полей. Положим, что региональное поле может быть аппроксимировано полиномом не выше второго порядка:

$$f(x; A) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2; \qquad A = (A_0; A_1; A_2). \tag{7}$$

В этом случае функционалы (6) должны быть переписаны так:

$$F_Z(P, A) = \sum_{i=1}^{n} [\Delta Zn(i) - \Delta Zt(i,P) - f1(i,A)]^2; \tag{8.1}$$

$$F_H(P, A) = \sum_{i=1}^{n} [\Delta Hn(i) - \Delta Ht(i,P) - f2(i,A)]^2. \tag{8.2}$$

Таким образом, обратная задача магнитометрии сведена к минимизации параметрических функционалов (6) или (8). Нужно от численных значений составляющих кортежа параметров $P^{(0)}$ перейти к кортежу $P^{(*)}$, который минимизирует функционалы.

Если минимизируются функционалы (8), то используется метод группового покоординатного спуска. Первая группа итерации подбирает параметры вектора P, а вторая — параметры вектора A. Такой цикл повторяется многократно.

Второй подход. Вновь обратимся к исходным данным формулы (4). Наблюденное магнитное поле определенно в n фиксированных точках. Это первый массив исходных данных для решения обратной задачи.

Для интерпретационных расчетов введем новую функцию — вариацию магнитного поля относительно поля в фиксированной точке. Обратимся к записанному выше массиву. Из совокупности i-х точек выберем одну $i = l$, координаты которой (x_0, z_0). Получим массив исходных данных как вариацию элементов магнитного поля относительно поля в четко фиксированной точке:

$$\begin{aligned} \delta Zn = (i,l) = \Delta Zn(i) - \Delta Zn(l) = (Zn(i) - Zn(0)) - (Zn(l) - Zn(0)) = \\ = Zn(i) - Zn(l), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Аналогично, для горизонтальной составляющей имеем

$$\begin{aligned} \delta Hn = (i) = \Delta Hn(i) - \Delta Hn(l) = (Hn(i) - Hn(0)) - (Hn(l) - Hn(0)) = \\ = Hn(i) - Hn(l), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Функции (9) свободны от постоянной составляющей поля. Они определяют начальный массив исходных данных для решения обратной задачи.

Далее, как и в первом подходе, необходимо прогнозировать положение той модели, которая могла обусловить наблюденное поле. Пусть установлено, что модель содержит m круговых цилиндрических тел. Обратимся к записи (1) и каждому параметру присвоим численные значения. Так образован кортеж параметров $P^{(0)}$. Это уже вторая группа исходных данных для решения обратной задачи. Определена модель и в фиксированных ранее точках может быть получено теоретическое поле. В массиве этих точек была фиксирована одна точка $i = l$, координаты которой $(x_0,\, z_0)$. Как и для исходных данных, построим массив теоретических функций — вариацию элементов магнитного поля относительно поля в фиксированной точке. Имеем

$$\delta Zt(i,l,P) = Zt(i) - Zt(l); \tag{10.1}$$

$$\delta Ht(i,l,P) = Ht(i) - Ht(l). \tag{10.2}$$

Сопоставим теперь исходное поле и теоретическое. Как и ранее, сопоставление полей сделаем в метрике L_2 и получим такие функционалы:

$$F_Z(P)_= \sum_{i=1}^{n} [\delta Zn(i) - \delta Zt(i,P)]^2; \tag{11.1}$$

$$F_H(P)_= \sum_{i=1}^{n} [\delta Hn(i) - \delta Ht(i,P)]^2. \tag{11.2}$$

Задача сведена к минимизации параметрических функционалов. Сопоставляемые функции свободны от своих постоянных составляющих [7]. Для минимизации функционалов воспользуемся методом градиентного спуска. Его идея принадлежит еще Коши (Couchy, Огюст Луи, 1789–1857). Далее метод совершенствовался. Он получил развитие в работах Л. В. Канторовича [8]. Для решения задачи необходимо выбрать начальное приближение. Каждая компонента вектора (1) получает численное значение:

$$P^{(0)} = \{p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_k^{(0)}\}.$$

Теперь от вектора $P^{(0)}$итерационно переходим к вектору P^*, который минимизирует невязки сопоставляемых функций [9, 10]. Итерационная последовательность всегда сходится. Решение задачи существенно зависит от выбора начального приближения. Такая особенность метода требует очень внимательного подхода к построению начальной модели. Что касается устойчивости решения, то можно уверенно сказать, что градиентный метод устойчив. Здесь, как мы полагаем, достаточно сослаться на работу В. И. Старостенко и С. М. Оганесяна [11]. Особенности решения задачи были описаны в обзорной работе Е. Г. Булаха (2006).

Алгоритмическое и программное решение описанной выше задачи проверено на большом числе примеров. Можно надеяться, что эта задача будет применена в практике геологической интерпретации магнитометрических данных.

1. *Петрищевский А. М.* Опыт аппроксимации сложных геологических сред массивом материальных точек // Геология и геофизика. – 1981. – № 5. – С. 105–115.
2. *Зидаров Д. П.* О решении обратных задач потенциальных полей и его применении к вопросам геофизики. – София: Изд-во Болгар. АН, 1968. – 154 с.
3. *Zidarov D., Zhelev Zh.* On obtaining a Family of Bodies with Identical Exterior Fields Method of Bubbling // Geophys. Prospect. – 1970. – **18**, No 1. – P. 14–33.

4. *Zidarov D.* Inverse gravimetric problem in Geoprospecting and Geodesy. Elsevir, 1990. – 284 p.
5. *Сретенский Л. Н.* О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. – 1954. – **99**, № 1. – С. 21–22.
6. *Маловичко А. К.* Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их применения к задачам гравиразведки. – Москва: Гостоптехиздат, 1956. – 160 с.
7. *Страхов В. Н.* К теории метода подбора // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1964. – № 4. – С. 494–509.
8. *Канторович Л. В.* О методах наискорейшего спуска // Докл. АН СССР. – 1947. – **56**, № 3. – С. 233–236.
9. *Булах Е. Г.* Об автоматизированном подборе контура возмущенного тела на цифровой электронной вычислительной машине // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1965. – № 8. – С. 85–88.
10. *Булах Е. Г.* Автоматизированная система интерпретации гравитационных аномалий (метод минимизации). – Киев: Наук. думка, 1973. – 111 с.
11. *Старостенко В. И., Оганесян С. М.* Некорректно поставленные задачи по Адамару и их приближенное решение методом регуляризации по А. Н. Тихонову // Геофиз. журн. – 2001. – **23**, № 6. – С. 3–20.

Институт геофизики им. С. И. Субботина
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 22.09.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **E. G. Bulakh**

Direct and inverse problems of magnetometry for a set of horizontally located circular cylindrical bodies

The solution of the direct and inverse problems of magnetometry in a class of horizontally located circular cylinders is given. The attention is paid to opportunities to use this solution for the construction of an analytical model of the initial external field, for the estimation of a site of magnetized ore bodies, and for designing a complex geological model, whose weights can cause the observed field.