

М. С. Якименко, В. В. Мелешко, член-кореспондент НАН України  
А. Ф. Улітко, академік НАН України В. Т. Грінченко

## Високочастотні коливання циліндрів скінченної довжини

*Досліджуються коливання ізотропних пружних циліндрів в околі частоти запирання другої нормальної моди циліндричного хвилеводу. Застосовується метод суперпозиції, який використовує можливість побудови частинних розв'язків рівнянь руху в циліндричних координатах для задоволення граничних умов на боковій поверхні та на торцях циліндра. Аналізується вплив коефіцієнта Пуассона на кривизну віток поблизу частоти запирання та зв'язок із появою “терасоподібних” структур на частотних спектрах. Наводяться приклади форм переміщень на границі.*

Дослідження особливостей спектра власних частот та форм коливань циліндрів скінченної довжини становлять актуальну наукову та прикладну задачу. Якщо в області низьких частот моди коливань скінченного циліндра та тонкого диска давно і детально вивчені, то високочастотний спектр коливань і сьогодні викликає значний інтерес. В роботі [1] досконально досліджені частотні спектри пружних дисків в районі частот першого товщинного резонансу (або в діапазоні між частотами запирання другої та третьої нормальних мод нескінченного шару, що поширюються). Досить цікавим є розгляд особливостей частотних спектрів зв'язаних задач для довгих циліндрів в області частоти першого радіального або зсувного резонансу нескінченного циліндра, що задаються рівнянням Похгаммера–Крі. В цьому напрямі можна виділити лише статті [1, 2], в яких, зокрема, були детально вивчені властивості крайової моди циліндра та пояснена природа “дублетів” та “триплетів”, які експериментально спостерігались в частотних спектрах.

В даній роботі досліджується явище ущільнення високочастотного спектра власних частот ізотропного пружного циліндра (із модулем зсуву  $G$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ ) висотою  $2H$  та діаметром  $2a$  на графіках залежності безрозмірних власних частот  $\Omega = \omega a/c_2$  ( $c_2$  — швидкість зсувних хвиль в пружному середовищі) від відношення розмірів  $h = H/a$  при декількох типових значеннях коефіцієнта Пуассона  $\nu$ . Це явище проявляється у виникненні “терасоподібних” спектрів поблизу частоти запирання другої моди, що поширюється. Нижче це явище розглянуто лише для поздовжніх типів (симетричних відносно серединної площини  $z = 0$ ) власних коливань циліндра. Однак аналогічний терасоподібний спектр з тими самими граничними значеннями частот спостерігається і для згинних (антисиметричних відносно серединної площини) коливань.

Аналітичний розв'язок граничної задачі будується методом суперпозиції [2–5]. Точний розв'язок рівнянь руху Ламе для компонент вектора переміщень вибирається у вигляді суми двох рядів по повних системах тригонометричних функцій та функцій Бесселя по поздовжній та радіальній координатах відповідно. Довільні коефіцієнти в цих рядах визначаються при виконанні всіх граничних умов, що через неортогональність функцій призводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Нескінченна система розв'язується методом покращеної редукції, використовуючи асимптотичний закон поведінки невідомих.

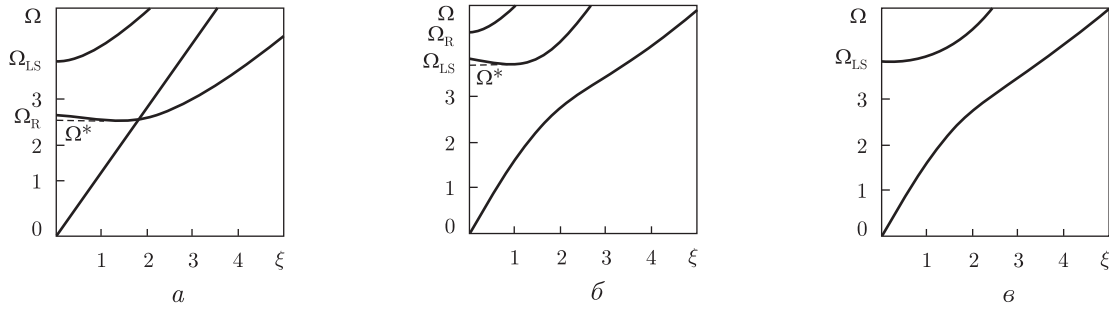


Рис. 1. Дисперсійний спектр осесиметричних нормальних хвиль в циліндрі. Перші три дійсні вітки:  $a - \nu = 0,00$ ;  $b - \nu = 0,34$ ;  $c - \nu = 0,45$

Рівність нулю редукованого визначника системи дає рівняння для визначення безрозмірних частот  $\Omega$  для фіксованого значення  $h$ . Такий підхід є досить простим при чисельній реалізації і потребує малих затрат часу на обчислення.

Високочастотною областю спектра власних частот скінченного циліндра ми будемо називати область частот, яка знаходиться між критичною частотою і частотою запирання другої і третьої осесиметричних нормальних мод, що поширюються, у відповідному нескінченному циліндрі із вільною поверхнею. Таке розповсюдження на заданій частоті  $\Omega$  описується значеннями постійної розповсюдження  $\xi$  — коренями рівняння Похгаммера–Крі

$$(\Omega^2 - 2\xi^2)^2 J_0(\alpha)J_1(\beta) + 4\xi^2\alpha\beta J_0(\beta)J_1(\alpha) - 2\Omega^2\alpha J_1(\alpha)J_1(\beta) = 0$$

із введеними позначеннями

$$\alpha^2 = \frac{\Omega^2}{k^2} - \xi^2, \quad \beta^2 = \Omega^2 - \xi^2, \quad k = \sqrt{2\frac{1-\nu}{1-2\nu}}.$$

Дисперсійні криві для спектра поздовжніх осесиметричних мод нескінченного циліндра наведено на рис. 1 для трьох типових значень коефіцієнта Пуассона  $\nu$ . На рисунку  $\Omega_{LS}$  та  $\Omega_R$  позначають, відповідно, частоти запирання поздовжньо-зсувних та радіальних нормальних мод;  $\Omega^*$  — так звана критична (мінімальна) частота, вище якої друга та третя нормальні моди переходять від нерозповсюджуваних хвиль з комплексними значеннями хвильового числа до хвиль, що поширюються.

Аналітичні вирази для кривизни другої дійсної вітки на частотах запирання  $\xi = 0$ , які визначають наявність чи відсутність частоти  $\Omega^*$  в дисперсійному спектрі, знаходяться згідно зі співвідношеннями, вперше встановленими в [6]:

1) для поздовжньо-зсувної частоти запирання  $\Omega_{LS}$  — кореня рівняння  $J_1(\Omega) = 0$ :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} = \frac{\lambda_1^2}{\Omega} \left[ 1 - \frac{8J_1(\Omega/k)}{k\Omega J_0(\Omega/k) - 2J_1(\Omega/k)} \right];$$

2) для радіальної частоти запирання  $\Omega_R$  — кореня рівняння  $\Omega J_0(\Omega/k) - 2/k J_1(\Omega/k) = 0$ :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} = \frac{\lambda_1 k^3}{\Omega} \left[ 1 + \frac{4((k^2 - 4)J_1(\Omega) + 2\Omega J_0(\Omega))}{(k^2\Omega^2 - 4(k^2 - 1))J_1(\Omega)} \right],$$

де  $\lambda_1$  — перший корінь рівняння  $J_1(\lambda) = 0$ .

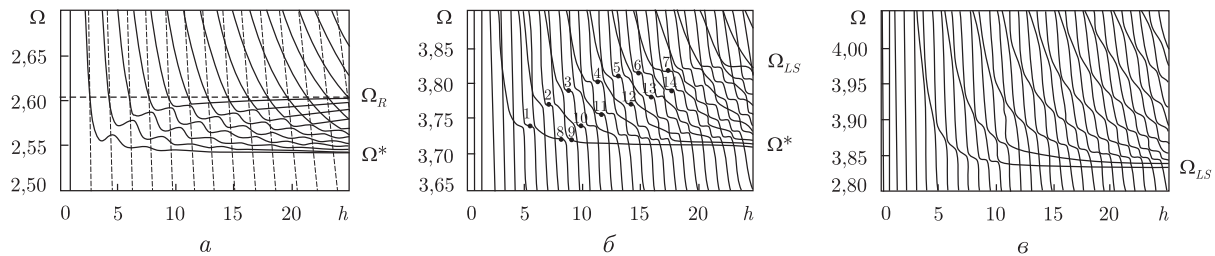


Рис. 2. Частотний спектр поздовжніх коливань скінченного циліндра:  $a - \nu = 0,00$ ;  $b - \nu = 0,34$ ;  $v - \nu = 0,45$

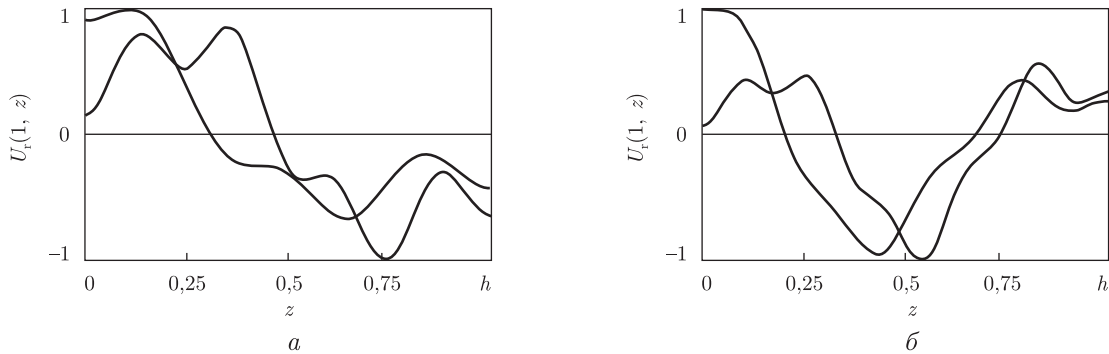


Рис. 3. Форми коливань для В-мод в точках 1, 2 ( $a$ ) та 8, 10 ( $b$ )

Частота  $\Omega_{LS}$  не залежать від  $\nu$ , в той час, як для частоти  $\Omega_R$  має місце складна залежність від коефіцієнта Пуассона. При  $\nu = \nu_c = 0,283412$  відбувається зміна типу руху на другій частоті запирання із радіального (який залежить від  $\nu$ ) на поздовжньо-зсувний (на частоті  $\Omega = \lambda_1$ ). Незважаючи на зміну типу руху на другій частоті запирання частотний мінімум  $\Omega^*$  спостерігається до значень  $\nu < \nu_* = 0,416937$ .

На рис. 2,  $a$  наведено частотний спектр для  $\nu = 0,00$ . В цьому випадку частково усувається зв'язок між різними типами руху, наслідком чого є точки двократного та трикратного перетину кривих. На цьому рисунку штриховою лінією позначені типи рухів, що відповідають чисто поздовжнім (гіперболи) та чисто радіальним (горизонтальна пряма) коливанням циліндра. Третє сімейство, що позначене суцільною лінією, не може бути виведене із елементарних розв'язків і пов'язане із здатністю пружного твердого тіла опиратися зсуву.

На рис. 2,  $b$  наведено частотний спектр для коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0,34$ . Точками 1–7 та 8–14 на спектрі позначені перші дві вітки, що відповідають так званим В-модам, які характеризуються зростанням частоти із збільшенням довжини циліндра.

Для характеристики форм коливань на рис. 3 наведено радіальні переміщення  $u_r$  вздовж бокової поверхні циліндра, побудовані в точках 1, 2 та 8, 10, які відповідають першій та другій В-модам. Незважаючи на неідентичність форм (що викликається зв'язком з іншими типами руху) чітко відслідковується збільшення на одиницю кількості вузлів у розподілі переміщень при збільшенні порядку вітки.

При значенні коефіцієнта Пуассона  $\nu > \nu_* = 0,416937$  зникає мінімум на другій дисперсійній вітці. Вигляд частотного спектра в цьому випадку значно простіший (рис. 2,  $v$ ). Водночас стає неможливим виділення типів руху, подібних В-модам, частоти яких збільшуються із зростанням лінійних розмірів циліндра.

Причина такої цікавої перебудови структури високочастотного спектра власних частот скінченного циліндра, коли при  $\nu > \nu_*$  зникає “терасоподібна” структура спектра, потребує подальшого детального вивчення.

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Анализ мод колебаний круглого диска в окрестности толщинного резонанса // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 6. – С. 3–19.
2. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Анализ частотного спектра и форм колебаний длинных цилиндров // Там же. – 1980. – **16**, № 1. – С. 3–7.
3. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акуст. журн. – 1978. – **24**. – С. 861–866.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
5. *Ebenezer D. D., Ravichandran K., Padmanabhan C.* Forced vibrations of solid elastic cylinders // J. Sound Vibr. – 2005. – **282**. – P. 991–1007.
6. *Оное М., McNiven H. D., Mindlin R. D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // J. Appl. Mech. – 1962. – **29**. – P. 729–734.

Київський національний університет

ім. Тараса Шевченка

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Надійшло до редакції 26.12.2008

**M. S. Yakymenko, V. V. Meleshko**, Corresponding Member of the NAS of Ukraine  
**A. F. Ulitko**, Academician of the NAS of Ukraine **V. T. Grinchenko**

### **High-frequency vibrations of finite cylinders**

*Vibrations of isotropic elastic cylinders near the second cut-off frequency of a cylindrical waveguide are studied. The method of superposition that uses the possibility of constructing the partial solutions of the equations of motion in cylindrical coordinates to satisfy the boundary conditions both at the ends and on the lateral surface of a cylinder is used. Dependence on Poisson's ratio for the curvature of branches near the cut-off frequency is analyzed in connection with the appearance of the “terrace”-like structures in frequency spectra. Examples of eigenmodes are given.*