УДК 539.3

© 2009

**Т. В. Карнаухова**

# О новом подходе к активному демпфированию вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропных вязкоупругих пластин

*(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)*

*Запропоновано новий підхід до активного демпфування вимушених резонансних коливань ізотропних пластин за допомогою розподілених сенсорів та актуаторів. Механічне навантаження вважається невідомим. Воно визначається за експериментальними показниками сенсора. Як приклад, розглянуто задачу про активне демпфування ізотропної в'язкопружної прямокутної пластини з шарнірно обпертими торцями. Задача розв'язується методом Бубнова–Гальоркіна. Одержано формулу для різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для демпфування вимушених коливань за першою модою. Досліджено вплив розмірів сенсора та актуатора і дисипативних властивостей матеріалу на ефективність активного демпфування коливань.*

Вязкоупругие тонкие пластины находят широкое применение во многих областях современной науки и техники: в космической технике, авиа-, автомобиле-, судо-, машиностроении, радиоэлектронике и т. п. Очень часто на них действуют нестационарные и гармонические во времени механические нагрузки. Особенно опасными являются резонансные колебания, когда частота гармонической во времени силы совпадает с собственной частотой колебаний элемента. Для их демпфирования в последние годы эффективно используются активные методы, базирующиеся на включении в структуру пассивного (без пьезоэффекта) тонкостенного элемента из металлического, полимерного или композитного материала, пьезоэлектрических компонент [1–3]. Один из основных методов активного демпфирования колебаний основан на использовании пьезоэлектрических включений, выполняющих функции актуатора. К нему подводится разность потенциалов, в какой-то мере компенсирующая механическую нагрузку. Главным требованием при применении такого подхода является знание внешней нагрузки.

В данной работе предлагается новый подход к активному демпфированию резонансных изгибных колебаний вязкоупругих пластин при действии на них неизвестной механической нагрузки с помощью совместного использования двух типов пьезовключений — сенсоров и актуаторов. Суть его состоит в следующем. По показаниям сенсора — заряду или разности потенциалов — восстанавливается амплитуда и фаза внешней нагрузки. После этого к актуатору подводится разность потенциалов, которая рассчитывается по уже известной нагрузке. Как пример, рассмотрена задача об активном демпфировании резонансных колебаний прямоугольной вязкоупругой пластины с шарнирным опиранием ее торцов. Получено простое аналитическое выражение для разности потенциала, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки, определяемой по экспериментальному показателю сенсора. Указано на существенное значение диссипативных свойств пассивного материала для устойчивости активного демпфирования резонансных колебаний пластины.

Рассмотрим прямоугольную пластину с размерами $a \times b$ из изотропного вязкоупругого материала, на которую действует давление $p = p_0 e^{i\omega t}$, изменяющееся во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной частоте пластины. Торцы пластины считаются шарнирно опертыми. Ограничимся исследованием демпфирования только изгибных колебаний. Пассивные слои могут быть металлическими, полимерными либо композитными. Пьезоактивные слои считаются трансверсально-изотропными и поляризованными по толщине пластины. Диссипативные свойства материалов пассивных и пьезоактивных слоев учитываются на основе концепции комплексных характеристик [4–7]. Основные соотношения теории пластин с распределенными сенсорами и актуаторами представлены в работах [1–3, 7]. Приведем те из них, которые используются в дальнейшем. Воспользуемся декартовой системой координат $x$, $y$, $z$. Координатную поверхность $z = 0$ разместим в срединной поверхности пластины.

Ограничимся случаем трехслойной пластины, средний слой толщиной $h_0$ которой изготовлен из пассивного вязкоупругого изотропного материала, а два внешних слоя одинаковой толщины $h_1$ — из пьезоэлектрических трансверсально-изотропных материалов с одинаковыми электромеханическими свойствами и противоположным направлением поляризации. Тогда уравнение движения будет иметь вид [7–10]:

$$D\Delta\Delta w - \widetilde{\rho}\omega^2 w - p_0(x, y) - \Delta M_0 = 0. \tag{1}$$

Здесь $D = D' + iD''$ — комплексная изгибная жесткость, которая определяется через электромеханические характеристики пластины; $\widetilde{\rho}$ — приведенная плотность пластины; $M_0 = \gamma_{31}(h_0 + h_1)V_A$, $V_A$ — подводимая к актуатору разность потенциалов.

Для шарнирного опирания торцов пластины, когда равны нулю прогиб и изгибающий момент, решение задачи ищется в виде разложения по тригонометрическим функциям:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, \qquad k_m = \frac{m\pi}{a}, \qquad p_n = \frac{n\pi}{b}. \tag{2}$$

При этом внешние нагрузки также представляются в виде разложения в ряды по тем же функциям:

$$p_0(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, \qquad M_0(x, y) = \sum_m \sum_n M_{mn} \sin k_m x \sin p_n y. \tag{3}$$

Такое представление автоматически удовлетворяет механическим граничным условиям шарнирного опирания.

Из (1)–(3) получим следующее соотношение:

$$[D(k_m^2 + p_n^2)^2 - \widetilde{\rho}\omega_{mn}^2]w_{mn} - p_{mn} + (k_m^2 + p_n^2)M_{mn} = 0. \tag{4}$$

Отсюда имеем:

$$w_{mn} = \frac{p_{mn} - (k_m^2 + p_n^2)M_{mn}}{[D(k_m^2 + p_n^2)^2 - \widetilde{\rho}\omega_{mn}^2]}. \tag{5}$$

Из (5) видно, что для компенсации внешней механической нагрузки к актуатору необходимо подвести разность потенциалов, определяемую из соотношения

$$V_{mn} = \frac{p_{mn}}{k_m^2 + p_n^2}\gamma_{31}(h_0 + h_1). \tag{6}$$

При этом амплитуда колебаний на рассматриваемой моде будет равна нулю.

Как показано в [7], для компенсации наиболее энергоемкой первой моды $(1,1)$ при шарнирном опирании торцов пластины наиболее эффективным будет полное покрытие пластины пьезоэлектрическим слоем. Тогда для равномерного механического давления $p_0 = \mathrm{const}$ из формулы (6) следует, что для компенсации этой моды необходимо приложить разность потенциалов

$$V_{11} = \frac{p_{11}}{k_1^2 + p_1^2}\gamma_{31}(h_0 + h_1), \qquad p_{11} = \frac{4p_0}{k_1 p_1}, \qquad V_{11} = \frac{4V_0}{k_1 p_1}. \tag{7}$$

Основные недостатки подхода, основанного на формулах (6), (7), состоят в том, что 1) свободные колебания не демпфируются и 2) необходимо знать внешнюю механическую нагрузку.

Для устранения второго из этих недостатков используем показания сенсора, занимающего площадь $S_1$. Для короткозамкнутых электродов величина заряда, фиксируемого сенсором, определяется выражением

$$Q = -\gamma_{31}(h_0 + h_1) \iint\limits_{(S_1)} (\kappa_1 + \kappa_2)\, dxdy. \tag{8}$$

Здесь $\kappa_1 = -\partial^2 w/\partial x^2$, $\kappa_2 = -\partial^2 w/\partial y^2$.

Для разомкнутых электродов разность потенциалов сенсора дается формулой

$$V_S = \frac{h_1 Q}{S_1 \gamma_{33}}. \tag{9}$$

Детальное исследование места размещения сенсоров и актуаторов в зависимости от моды колебаний представлено в [7]. Для моды $(1,1)$ из (8), (9) и выражения для первой формы колебаний пластины имеем следующие выражения для показаний сенсора — заряда и разности потенциалов:

$$Q_{11} = 4\gamma_{31}(h_0 + h_1)\left(\frac{k_1}{p_1} + \frac{p_1}{k_1}\right) w_{11}, \tag{10}$$

$$V_{11S} = \frac{4h_1(h_0 + h_1)\gamma_{31}}{S_1\gamma_{33}}\left(\frac{k_1}{p_1} + \frac{p_1}{k_1}\right) w_{11}. \tag{11}$$

Решение задачи о резонансных механических колебаниях пластины с шарнирным опиранием торцов пластины по первой моде имеет следующий вид:

$$w_{11} = \frac{p_{11}}{[D_{11}k_1^4 + (2D_{12} + D_{66})k_1^2 p_1^2 + D_{22}p_1^4 - \widetilde{\rho}\omega_{11}^2]}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10) или (11), получим связь между показаниями сенсора и нагрузкой:

$$\begin{gathered} p_{11} = \frac{Q_{11}[D_{11}k_1^4 + (2D_{12} + D_{66})k_1^2 p_1^2 + D_{22}p_1^4 - \widetilde{\rho}\omega_{11}^2]}{4\gamma_{31}(h_0 + h_1)\left(\dfrac{k_1}{p_1} + \dfrac{p_1}{k_1}\right)}; \\ p_{11} = \frac{V_{11S}S_1\gamma_{33}[D_{11}k_1^4 + (2D_{12} + D_{66})k_1^2 p_1^2 + D_{22}p_1^4 - \widetilde{\rho}\omega_{11}^2]}{4\gamma_{31}(h_0 + h_1)\left(\dfrac{k_1}{p_1} + \dfrac{p_1}{k_1}\right)}. \end{gathered} \tag{13}$$

Подставим теперь найденную из выражений (13) нагрузку в формулу (7). В результате получим выражения для разности потенциала, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки:

$$V_{11} = \frac{Q_{11}[D_{11}k_1^4 + (2D_{12} + D_{66})k_1^2 p_1^2 + D_{22}p_1^4 - \widetilde{\rho}\omega_{11}^2]}{4\gamma_{31}^2(h_0 + h_1)^2\left(\dfrac{k_1}{p_1} + \dfrac{p_1}{k_1}\right)(k_1^2 + p_1^2)};$$

$$V_{11} = \frac{V_{11S}S_1\gamma_{33}[D_{11}k_1^4 + (2D_{12} + D_{66})k_1^2 p_1^2 + D_{22}p_1^4 - \widetilde{\rho}\omega_{11}^2]}{4\gamma_{31}^2(h_0 + h_1)^2\left(\dfrac{k_1}{p_1} + \dfrac{p_1}{k_1}\right)(k_1^2 + p_1^2)}. \qquad (14)$$

В этой формуле нагрузка исключена, а подводимая к актуатору разность потенциалов определяется по экспериментальным показаниям сенсора — заряду или разности потенциалов.

Таким образом, в настоящей работе предложен новый подход к реализации активного демпфирования изгибных колебаний изотропной вязкоупругой прямоугольной пластины в случае, когда внешняя механическая нагрузка неизвестна. Она определяется по экспериментальным показаниям сенсора. С его использованием решена задача об активном демпфировании вынужденных резонансных изгибных колебаний шарнирно опертой прямоугольной вязкоупругой пластины, находящейся под действием нормального поперечного давления, изменяющегося во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной. Получены формулы для расчета разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки с использованием только показаний сенсора. Из полученных формул (14) видно, что обязательным условием эффективного демпфирования вынужденных резонансных колебаний по предлагаемому методу является наличие вязкости в материале пассивного слоя. При ее отсутствии показания сенсора на резонансе, определяемые по формуле (10), (11), при приближении к резонансной частоте стремятся к бесконечности. При малой вязкости материала управление колебаниями становятся чувствительными к ошибкам измерений.


1. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart Structures and Structronic Systems. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer, 2001. – 384 p.
2. *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials // Appl. mech. reviews. – 1998. – **51**, No 8. – P. 505–521.
3. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 400 p.
4. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
5. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. – Москва: Мир, 1988. – 448 с.
6. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – Т. 4. – 320 с.
7. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖТТУ, 2005. – 428 с.
8. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов // Успехи механики. В 6-ти т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Киев: АСК, 2005. – Т. 1. – С. 107–130.
9. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. – Москва: Наука, 1967. – 266 с.
10. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – Т. 5. – 290 с.


*НТУ Украины "Киевский политехнический институт"*

*Поступило в редакцию 18.07.2008*

**T. V. Karnaukhova**

## On a new approach to the active damping of forced resonance bending vibrations of viscoelastic isotropic plates

*A new approach to the active damping of the forced resonance bending vibrations of the viscoelastic isotropic plates by distributed piezoelectric sensors and actuators is proposed. It is supposed that a mechanical load is unknown and is found by indications of a sensor. As an example, the problem of the active damping of vibrations of the isotropic viscoelastic rectangular plate with simply supported edges is considered and solved by the Bubnov-Galerkin method. A formula for the potential difference to compensate the forced vibrations of a plate on the first mode is obtained. The influence of the dimensions of sensors and actuators and dissipative material properties on the active damping effectiveness is investigated.*