УДК 517.929.4

ОПТИМАЛЬНІ ОЦІНКИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ В ЗАДАЧІ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Я.М. ЛІНДЕР, В.В. ПІЧКУР

Вивчається практична стійкість диференціальних включень із багатозначними імпульсними впливами. Обґрунтовано властивості оптимальних оцінок імпульсних впливів диференціальних включень: для нелінійних диференціальних включень доведено критерій оптимальності оцінки імпульсних впливів. У випадку лінійного диференціального включення з лінійними відображеннями імпульсного впливу, які задовольняють умові поділу, одержано аналітичний вираз для знаходження оптимальної оцінки імпульсних впливів, яка забезпечує практичну стійкість системи на заданому часовому інтервалі. Результати мають алгоритмічну спрямованість.

ВСТУП

Системи, на які впливають короткочасні, але істотні зовнішні сили, доцільно описувати диференціальними рівняннями з імпульсним впливом. У роботах [1–4] вивчаються питання існування, єдиності, продовжуваності, неперервної залежності розв’язків від початкових умов, а також стійкості систем із імпульсним впливом. Задачі практичної стійкості диференціальних рівнянь із імпульсною дією розглядаються в [5]. У роботах [5–8] побудовано критерії практичної стійкості таких систем, одержано алгоритми для знаходження екстремальних областей початкових умов та їх оптимальних оцінок. Також у [2] розглядаються властивості розв’язків лінійних диференціальних рівнянь із імпульсним впливом, досліджується стійкість таких систем.

За умови постійних збурень права частина системи диференціальних рівнянь набуває багатозначного характеру [1, 9–11]. Задачі, пов’язані з диференціальними включеннями з імпульсним впливом, зараз інтенсивно досліджуються. У [1,4] розглядаються питання існування, неперервної залежності від початкових умов та імпульсних впливів, продовжуваності розв’язків диференціальних включень із імпульсним впливом. У [7] вивчаються властивості максимальної множини початкових умов для сильної та слабкої стійкості диференціальних включень, наведено методи апроксимації таких множин.

У статті обґрунтовуються властивості оптимальних оцінок багатозначних функцій імпульсної дії, за яких має місце внутрішня сильна стійкість диференціальних включень із імпульсним впливом. У випадку лінійних диференціальних включень із лінійними за фазовими змінними імпульсними впливами та за умови поділу одержано формули для обчислення оптимальних оцінок у аналітичному вигляді.

Будемо використовувати такі позначення: T — знак транспонування; $\|\cdot\|$ — евклідова норма в R^n; $\mathrm{comp}(\mathrm{R}^n)$ — сукупність усіх непорожніх компактних множин із R^n; $\mathrm{comp}(\mathrm{R}^n)$ — сукупність усіх непорожніх опуклих компактів із R^n; $f(x^-), f(x^+)$ — відповідно ліва та права границі функції f в точці $x \in \mathrm{R}^1$; $\mathrm{int}\, A$ — внутрішність, ∂A — границя множини A; $S = \{x \in \mathrm{R}^n : \| x \| = 1\}$ — одинична сфера; $K_\varepsilon(a) = \{x \in \mathrm{R}^n : \| x - a \| \le \varepsilon\}$ — замкнена куля радіусу ε з центром у точці a; $A^\varepsilon = A + K_\varepsilon(0)$ — ε-розширення множини A; $\rho(a, A) = \inf\limits_{x \in A} \| a - x \|$ — відстань від точки a до множини A; $\beta(A, B) = \sup\limits_{a \in A} \rho(a, B)$ — напівметрика Хаусдорфа між множинами A та B; $\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$ — метрика Хаусдорфа; $\limsup\limits_{t \to \tau} \Phi(t) = \{x \in \mathrm{R}^n : \liminf\limits_{t \to \tau} \rho(x, \Phi(t)) = 0\}$ — верхня топологічна границя відображення Φ; $\Gamma(F)$ — графік відображення F; $\Delta(F)$ — трубка відображення F.

ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНОК ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ У ВИПАДКУ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Розглянемо диференціальне включення з імпульсним впливом вигляду

$$\frac{dx}{dt} \in F_i(x, t), t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), i \in \{1, 2, ..., N\}, \ \tau_0 = t_0, \ \tau_N = T, \tag{1}$$

$$x(\tau_i) \in G_i(x(\tau_i^-), \lambda), \ i \in \{1, 2, ..., N-1\}, \tag{2}$$

де $x \in \mathrm{R}^n$ — вектор фазових координат, $(x, t) \in D$, D — область в R^{n+1}. Крім того, для будь-якого $i \in \{1, 2, ..., N\}$ відображення $F_i : D \to \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ задовольняє основним умовам на D, тобто множина його значень непорожня, обмежена, замкнена і опукла, а саме відображення напівнеперервне зверху за t [9]. Також існують неперервні додатні функції $L_i(t)$ такі, що $\alpha(F_i(u, t), F_i(v, t)) \le L_i(t) \| u - v \|$, якщо $(u, t), (v, t) \in D$. За будь-якого фіксованого $\lambda > 0$ відображення $G_i(\lambda) = G_i(\cdot, \lambda) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ неперервні, $i \in \{1, 2, ..., N-1\}$. Крім того, задана компактна множина $G \subset \mathrm{R}^n$ початкових значень у момент часу t_0.

Означення 1. Відображення $G_i(\lambda)$ назвемо строго монотонними, якщо для кожного $G_i(\lambda)$, $i \in \{1, 2, ..., N-1\}$ справджуються умови:

- при імпульсних впливах $G_i = G_i(0)$, $i \in \{1, 2, ..., N-1\}$ диференціальне включення, (1), (2) є $\{G, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким;
- для будь-яких $\lambda_1 < \lambda_2$ знайдеться таке $r > 0$, що для всіх $x \in \mathrm{R}^n$ виконується $(G_i(x, \lambda_1))^r \subset G_i(x, \lambda_2)$ (строга монотонність);

- для кожного $\lambda > 0$ та довільного $\varepsilon > 0$ існують $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ такі, що для всіх $x \in \mathrm{R}^n$ виконується $G_i(x,\lambda_1) \subset G_i(x,\lambda) \subset G_i(x,\lambda_2)$ та $G_i(x,\lambda_2) \subset (G_i(x,\lambda))^{\varepsilon}$, $G_i(x,\lambda) \subset (G_i(x,\lambda_1))^{\varepsilon}$ (неперервність);
- знайдеться $h > 0$ таке, що для кожного $\lambda > 0$ існує $\lambda_1 > 0$, при якому для всіх $x \in \mathrm{R}^n$ виконується включення $(G_i(x,\lambda))^h \subset G_i(x,\lambda_1)$.

Задача полягає у знаходженні такого значення λ_*, за якого диференціальне включення (1), (2) є $\{G, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким та разом із цим для довільного $\lambda > \lambda_*$ практична $\{G, \Phi(t), t_0, T\}$-стійкість вже не виконується. Таке значення λ_* називається оптимальною оцінкою імпульсного впливу в задачі практичної стійкості (1), (2). Під практичною стійкістю будемо розуміти внутрішню сильну практичну стійкість [7].

Позначимо $X(t, x_0, t_0)$ множину досяжності диференціального включення (1), (2), що відповідає початковій умові $x(t_0) = x_0$. Іншими словами, $X(t, x_0, t_0) = \bigcup x(t, x_0, t_0)$, де об’єднання здійснюється за всіма розв’язками диференціального включення (1), (2) за умови $x(t_0) = x_0$. На кожному відрізку $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i \in \{1,2,...,N\}$ введемо відображення $\widetilde{X}_i(t, x_0, t_0) = X(t, x_0, t_0)$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$, і $\widetilde{X}_i(\tau_i, x_0, t_0) = \limsup\limits_{t \to \tau_i} X(t, x_0, t_0)$. Аналогічно введемо відображення $\widetilde{\Phi}_i(t) = \Phi(t)$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$ і $\widetilde{\Phi}_i(\tau_i) = \limsup\limits_{t \to \tau_i} \Phi(t)$. Розглянемо також позначення $\widetilde{X}_i^{\varepsilon}(t, x_0, t_0, \lambda)$ — множина досяжності диференціального відображення (1), (2) на інтервалі $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, що визначається відображеннями імпульсної дії $(G_k(\lambda))^{\varepsilon}$, $k \in \{1,2,...,N\}$ й початковою умовою $x(t_0) = x_0$.

Лема 1. Є справедливим включення

$$\widetilde{X}_i(t, u_0, t_0, \lambda) \subseteq \operatorname{int} \widetilde{X}_i^{\varepsilon}(t, u_0, t_0, \lambda), t \in [\tau_k, \tau_{k+1}],\ i \in \{2,3,...,N\}.$$

Доведення. Доведемо включення ітеративним методом, починаючи з часового інтервалу $[\tau_1, \tau_2]$. У точці τ_1 маємо:

$$\widetilde{X}_2(\tau_1, u_0, t_0, \lambda) = G_1(\widetilde{X}_1(\tau_1, u_0, t_0, \lambda_*), \lambda) \subseteq$$

$$\subseteq \operatorname{int} G_1^{\varepsilon}(\widetilde{X}_1(\tau_1, u_0, t_0, \lambda), \lambda) = \operatorname{int} \widetilde{X}_2^{\varepsilon}(\tau_1, u_0, t_0, \lambda).$$

Виходячи з властивостей розв’язків диференціальних включень [7], $M^A(t) \subseteq M^B(t)$, $A \subseteq \operatorname{int} B$. Тут $M^A(t)$ — множина досяжності диференціального включення $\dfrac{dx}{dt} \in F_2(x,t)$ на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$ з початковим моментом часу τ_1 й початковою множиною $A \subseteq \mathrm{R}^n$. Отже, $\widetilde{X}_2(t, u_0, t_0, \lambda_*) \subseteq$

$\subseteq \operatorname{int} \widetilde{X}_2^{\varepsilon}(t,u_0,t_0,\lambda)$, $t \in [\tau_1,\tau_2]$ та це включення, зокрема, виконується в момент часу τ_2. Далі,

$$\widetilde{X}_3(\tau_2,u_0,t_0,\lambda) = G_2(\widetilde{X}_2(\tau_2,u_0,t_0,\lambda),\lambda) \subseteq$$

$$\subseteq \operatorname{int} G_1^{\varepsilon}(\widetilde{X}_2^{\varepsilon}(\tau_2,u_0,t_0,\lambda),\lambda) = \operatorname{int} \widetilde{X}_3^{\varepsilon}(\tau_2,u_0,t_0,\lambda).$$

Продовжуючи міркування, послідовно доводимо включення на всіх інтервалах до $[\tau_{N-1},\tau_N]$ включно. Лему доведено.

Наслідок. В умовах леми 1 для $t \in [\tau_{i-1},\tau_i]$, $i \in \{2,3,...,N\}$ наявні оцінки $(\widetilde{X}_i(t,u_0,t_0,\lambda))^{r_i(\varepsilon)} \subseteq \widetilde{X}_i^{\varepsilon}(t,u_0,t_0,\lambda)$, тобто

$$\beta(\widetilde{X}_i^{\varepsilon}(t,u_0,t_0,\lambda),\widetilde{X}_i(t,u_0,t_0,\lambda)) \ge r_i(\varepsilon),$$

де $r_i(\varepsilon)$ — деякі неперервні функції.

Доведення. З леми 1 та з компактності $\widetilde{X}_i(\cdot)$ випливає, що на інтервалі $t \in [\tau_{i-1},\tau_i]$, $i \in \{2,3,...,N\}$ можна визначити додатну неперервну функцію $r_i(\varepsilon,t)$ таку, що $(\widetilde{X}_i(t,u_0,t_0,\lambda))^{r_i(\varepsilon,t)} \subseteq \widetilde{X}_i^{\varepsilon}(t,u_0,t_0,\lambda)$. На компакті функція $r_i(\varepsilon,t)$ досягає свого мінімуму за t, отже справедливим є включення $(\widetilde{X}_i(t,u_0,t_0,\lambda))^{r_i(\varepsilon)} \subseteq \widetilde{X}_i^{\varepsilon}(t,u_0,t_0,\lambda)$. Наслідок доведено.

Теорема 1. Значення λ_* є оптимальною оцінкою імпульсного впливу для $\{G_0,\Phi(t),t_0,T\}$-стійкості нульового розв'язку диференціального включення (1), (2), тоді й тільки тоді, коли для кожного $x_0 \in G$, $i \in \{1,2,...,N\}$ виконується $\Gamma(\widetilde{X}_i(x_0,\lambda_*)) \subseteq \Gamma(\widetilde{\Phi}_i)$ та існує $u_0 \in G$, $i \in \{2,3,...,N\}$ таке, що $\Delta(\widetilde{X}_i(u_0,\lambda_*)) \cap \Delta(\widetilde{\Phi}_i) \ne \varnothing$.

Доведення. Необхідність. За означенням 1, для всіх $\lambda \in [0,\lambda_*]$ наявне співвідношення $\Gamma(\widetilde{X}_i(x_0,\lambda_*)) \subseteq \Gamma(\widetilde{\Phi}_i)$ для всіх $x_0 \in G$. Припустимо, що $\Delta(\widetilde{X}_i(x_0,\lambda_*)) \cap \Delta(\widetilde{\Phi}_i) = \varnothing$ для кожного $i \in \{2,3,...,N\}$. Згідно теореми 4 [1] існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного $i \in \{2,3,...,N\}$ справджується $\Gamma(\widetilde{X}_i^{\varepsilon}(x_0,\lambda_*)) \subseteq \Gamma(\widetilde{\Phi}_i)$. Виберемо $\mu > \lambda_*$, для якого $G_i(\lambda_*) \subset G_i(\mu)$, $G_i(\mu) \subset (G_i(\lambda_*))^{\varepsilon}$. Отже, $\Gamma(\widetilde{X}_i(x_0,\mu)) \subseteq \Gamma(\widetilde{\Phi}_i)$, а це суперечить означенню оптимального імпульсного впливу $G_i(\lambda_*)$.

Достатність. З умов теореми випливає $(z,t_*) \in \Delta(\widetilde{X}_i(x_0,\lambda_*)) \cap$ $\cap\, \Delta(\widetilde{\Phi}_i)$, причому $t_* \ne t_0$. Оскільки $\Gamma(\widetilde{X}_i(x_0,\lambda_*)) \subseteq \Gamma(\widetilde{\Phi}_i)$, то існує послідовність $(z_k,t_k) \to (z,t_*)$, $(z_k,t_k) \notin \Gamma(\widetilde{\Phi}_i)$ $k = 1,2,...$. Зафіксуємо довільне $\lambda > \lambda_*$. Оскільки для деякого $r > 0$ справджується включення $(G_i(x,\lambda_*))^r \subset$ $\subset G_i(x,\lambda)$ для всіх $x \in \mathrm{R}^n$, то $\widetilde{X}_i^r(t,u_0,t_0,\lambda_*) \subseteq (\widetilde{X}_i(t,u_0,t_0,\lambda))^{s(r,t)}$, $i \in \{2,3,...,N\}$, де $s(r,t) > 0$ — неперервна функція. При цьому

$\widetilde{X}_i^r(t_*, u_0, t_0, \lambda_*) \supseteq z^{s(r,t_*)}$. Отже ми можемо вибрати $\delta > 0$ таке, що $\Gamma(\widetilde{X}_i^r(t, u_0, t_0, \lambda_*)) \supset \{(z^{s(r,t_*)}, t) : t \in [t_* - \delta, t_* + \delta] \cap [\tau_{i-1}, \tau_i]\}$. Тоді

$$\Gamma(\widetilde{X}_i(x_0, \lambda)) \supset \Gamma(\widetilde{X}_i^r(t, u_0, t_0, \lambda_*)) \supset$$

$$\supset \{(z^{s(r,t_*)}, t) : t \in [t_* - \delta, t_* + \delta] \cap [\tau_{i-1}, \tau_i]\} = I.$$

Множина I є околом точки z. Тому існує номер $K > 0$ такий, що $(z_k, t_k) \in I$ при $k > K$. Отже, $\Gamma(\widetilde{X}_i(x_0, \lambda)) \not\subseteq \Gamma(\widetilde{\Phi}_i)$. Теорему доведено.

ОЦІНКИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Розглянемо лінійне диференціальне включення

$$\frac{dx}{dt} \in A_i(t)x + U_i(t), t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), i \in \{1, 2, ..., N\},\ \tau_0 = t_0,\ \tau_N = T, \tag{3}$$

$$x(\tau_i^+) \in B_i x(\tau_i^-) + V_i(\lambda),\ \ i \in \{1, 2, ..., N-1\}, \tag{4}$$

де $A_i(t)$, $B_i \in \mathrm{R}^{n \times n}$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$, $V_i(\lambda) : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ — строго монотонні відображення у сенсі означення 1. Крім того, $A_i(t)$ — неперервні на (τ_{i-1}, τ_i), B_i — невироджені матриці. Позначимо $Q_i(t) = \int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} \Theta_i(t, s) U_i(s) ds$, де $\Theta_i(t, s)$ — фундаментальна матриця системи $\frac{dx}{dt} = A_i(t)x$, нормована в точці s, інтеграл розглядаємо у сенсі Аумана [11]. Крім того, задана компактна опукла множина G початкових значень у момент часу t_0.

Розглянемо багатозначне відображення $\Phi : t \mapsto \Phi(\mathrm{t})$, яке задає фазові обмеження. Відображення $\Phi : t \to \Phi(t)$ компактозначне та напівнеперервне зверху на інтервалах $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i \in \{1, 2, ..., N\}$, його графік $\Gamma(\Phi) \subset D$.

Нехай при $\lambda = 0$ має місце $\{G, \Phi(t), t_0, T\}$-стійкість диференціального включення (3), (4). Ми будемо шукати максимальне значення параметру λ, яке забезпечуватиме практичну стійкість включення (3), (4). Припустимо, що відображення $V_i(\lambda) : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ задовольняють умову поділу, тобто

$$V_i(\lambda) = \lambda P_i + W_i,$$

де $P_i, W_i \in \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ — опуклі компакти для всіх $i \in \{1, 2, ..., N-1\}$. Тоді на інтервалі $[t_0, T]$ множина досяжності матиме вигляд $X(t, t_0, x_0) = H(t)x_0 + \lambda M^p(t) + M^w(t)$, де

$$M^{p}(t)=\Theta_{i}(t,\tau_{i-1})\sum_{k=2}^{i}\left(\prod_{j=i-1}^{k}B_{j}\Theta_{\mathrm{j}}(\tau_{j},\tau_{j-1})\right)P_{k-1},$$

$$M^{w}(t)=\Theta_{i}(t,\tau_{i-1})\sum_{k=2}^{i}\left(\prod_{j=i-1}^{k}B_{j}\Theta_{\mathrm{j}}(\tau_{j},\tau_{j-1})\right)(B_{k-1}Q_{k-1}(\tau_{k-1})+W_{k-1})+Q_{i}(t),$$

$$H(t)=\Theta_{i}(t,\tau_{i})\left(\prod_{j=i-1}^{1}B_{j}\Theta_{\mathrm{j}}(\tau_{j},\tau_{j-1})\right),\ t\in[\tau_{i-1},\tau_{i}).$$

На кожному відрізку $[\tau_{i-1},\tau_{i}],\ i\in\{1,2,...,N\}$ введемо відображення

$$\widetilde{X}_{i}(t,x_{0},t_{0})=X(t,x_{0},t_{0})\ ,\ t\in[\tau_{i-1},\tau_{i})\ ,$$

та

$$\widetilde{X}_{i}(\tau_{i},x_{0},t_{0})=\limsup_{t\to\tau_{i}}X(t,x_{0},t_{0}).$$

Аналогічно розглянемо багатозначні функції $\widetilde{\Phi}_{i}(t)=\Phi(t)$, $t\in[\tau_{i-1},\tau_{i})$ та $\widetilde{\Phi}_{i}(\tau_{i})=\limsup_{t\to\tau_{i}}\Phi(t)$. Тоді $X_{i}(t,x_{0},t_{0})=H_{i}(t)x_{0}+\alpha M_{i}^{p}(t)+M_{i}^{w}(t)$, де $H_{i}(t)=H(t)$, $M_{i}^{p}(t)=M^{p}(t)$, $M_{i}^{w}(t)=M^{w}(t)$, для всіх $t\in[\tau_{i-1},\tau_{i})$, а $H_{i}(\tau_{i})=\lim_{t\to\tau_{i}^{-}}H(t)$, $M_{i}^{p}(\tau_{i})=\lim_{t\to\tau_{i}^{-}}M^{p}(t)$, $M_{i}^{w}(\tau_{i})=\lim_{t\to\tau_{i}^{-}}M^{w}(t)$.

За теоремою 1 оцінка λ_{*} оптимальна тоді й тільки тоді, коли для всіх $i\in\{1,2,...,N\}$, $t\in[\tau_{i-1},\tau_{i}]$, $x_{0}\in G,\ \psi\in S$ маємо нерівність

$$\psi^{T}H_{i}(t)x_{0}+\lambda c(M_{i}^{p}(t),\psi)+c(M_{i}^{w}(t),\psi)\le c(\widetilde{\Phi}_{i}(t),\psi) \tag{5}$$

та існують $j\in\{1,2,...,N\}$, $\tau\in[\tau_{i-1},\tau_{i}]$, $y_{0}\in G$, $\xi\in S$ такі, що

$$\xi^{T}H_{j}(\tau)y_{0}+\lambda c(M_{j}^{p}(\tau),\xi)+c(M_{j}^{w}(\tau),\xi)=c(\widetilde{\Phi}_{j}(\tau),\xi). \tag{6}$$

Тоді з (5), (6) випливає

$$\lambda_{*}=\min_{x_{0}\in G}\ \min_{\substack{i\in\{1,2,...,N\},\\ t\in[\tau_{i-1},\tau_{i}]}}\ \min_{\psi\in S'}\frac{c(\widetilde{\Phi}_{i}(t),\psi)-\psi^{T}H_{i}(t)x_{0}-c(M_{i}^{w}(t),\psi)}{c(M_{i}^{p}(t),\psi)}.$$

При цьому S' є множиною всіх таких $\psi\in S$, за яких чисельник виразу (7) є невід'ємним. Оскільки $\min_{x_{0}\in G}(-\psi^{T}H_{i}(t)x_{0})=-\max_{x_{0}\in G}(x_{0}H_{i}^{T}\psi)=$ $=-c(G,H_{i}^{T}\psi)$, то

$$\lambda_{*}=\min_{i\in\{1,2,...,N\}}\ \min_{t\in[\tau_{i-1},\tau_{i}]}\ \min_{\psi\in S'}\frac{c(\widetilde{\Phi}_{i}(t),\psi)-c(G,H_{i}^{T}\psi)-c(M_{i}^{w}(t),\psi)}{c(M_{i}^{p}(t),\psi)}. \tag{7}$$

Умова (7) означає, що незбурений розв'язок включення (3), (4) при $\lambda \in [0, \lambda_*]$ $\{G, \Phi(t), t_0, T\}$ — стійкий.

Приклад. Нехай $P_i = K_1(0)$, $W_i = \{0\}$ для всіх $i \in \{1,2,...,N-1\}$. Крім того, нехай $U_i = K_1(0)$ для всіх $i \in \{1,2,...,N-1\}$, $\Phi(t) = K_{r(t)}(0)$, $r \in C[t_0, T]$, $r > 0$, $G = K_p(0)$, $p > 0$. Тоді

$$c(M^p(t), \psi) = \| \Xi(t)^T \psi \|, \text{ де } \Xi(t) = \Theta_i(t, \tau_{i-1}) \sum_{k=2}^{i} \left(\prod_{j=i-1}^{k} B_j \Theta_j(\tau_j, \tau_{j-1}) \right),$$

$$c(M^w(t), \psi) = \| \Upsilon(t)^T \psi \| + \| \Theta_i(t, \tau_{i-1})^T \psi \|,$$

$$\Upsilon(t) = \Theta_i(t, \tau_{i-1}) \sum_{k=2}^{i} \left(\prod_{j=i-1}^{k} B_j \Theta_j(\tau_j, \tau_{j-1}) \right) B_{k-1} \Theta_{k-1}(\tau_{k-1}, \tau_{k-2}),$$

$$\lambda_* = \min_{i \in \{1,2,...,N\}} \min_{t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]} \min_{\psi \in S'} \frac{r(t) \| \psi \| - p \| H_i^T \psi \| - \| \Upsilon(t)^T \psi \| - \| \Theta_i(t, \tau_{i-1})^T \psi \|}{\| \Xi(t)^T \psi \|}.$$

ВИСНОВКИ

Дослідження багатьох динамічних процесів приводить нас до задачі аналізу динамічних систем, у яких присутня невизначеність у правій частині та на які у фіксовані моменти часу діють короткочасові, але суттєві за силою поштовхи. Такі моделі можна описати у вигляді диференціальних включень із імпульсним впливом. Крім того, у практичних задачах часто існують обмеження, яким мають задовольняти фазові змінні у кожен момент часу, отже виникає задача практичної стійкості. Якщо відображення імпульсної дії диференціального включення параметричні, то постає задача знаходження множини параметрів імпульсних впливів, у силу яких траєкторії системи залишаються всередині фазових обмежень. Проблеми відшукання оптимальних імпульсних впливів практичної стійкості диференціальних включень з імпульсною дією можуть виникати, наприклад, у задачі захоплення заряджених частинок у процес прискорення.

У цій роботі проаналізовано властивості оптимальних оцінок імпульсних впливів, за яких виконуються умови практичної стійкості диференціальних включень з імпульсною дією. У випадку лінійних диференціальних включень із лінійними відображеннями імпульсного впливу, що задовольняють умові поділу, у статті було знайдено явний вираз для знаходження оптимальної оцінки імпульсних впливів диференціального включення, на основі якого можна побудувати чисельний алгоритм.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Перестюк Н.А., Плотников В.А, Самойленко А.М., Скрипник Н.В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — К.: Институт математики НАН Украины, 2007. — 428 с.

2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Выща школа, 1987. — 286 с.
3. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equations. — World scientific, 1989. — 273 c.
4. *Benchora M., Henderson J.* Impulsive differential equations and inclusions. — Contemporary Mathematics and its applications, vol. 2. — Hindawi Publishing Corporation, 2006. — 366 c.
5. *Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Критерії практичної стійкості для динамічних систем з імпульсним впливом // Вісник. Кібернетика. — 2002. — Вип. 3. — С. 35–37.
6. *Гаращенко Ф.Г., Хитько И.В.* Максимальные по включению множества практической устойчивости импульсных систем // Кибернетика и вычислительная техника. — 2004. — Вып. 142. — С. 65–72.
7. *Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Практична стійкість, оцінки та оптимізація. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. — 383 с.
8. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — Київ: Наук. думка, 1985. — 304 с.
9. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включения. — М.: Физматлит, 2003. — С. 265–288.
10. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. — Boston: Birkhauser, 1990. — 460 c.
11. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004. — 416 с.

Надійшла 19.03.2012