УДК 519.21

Є. О. Лебєдєв, І. Я. Усар

Про системи з повторними викликами та керованим вхідним потоком

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Досліджуються марковські системи з повторними викликами і керованою інтенсивністю вхідного потоку. Для моделей такого типу знайдені умови існування стаціонарного режиму, одержані явні формули та ефективні алгоритми розрахунку стаціонарних імовірностей. Розглянуто застосування одержаних результатів до розв'язання оптимізаційних задач в класі багатопорогових стратегій.

1. Результати для систем з повторними викликами складають один з розділів теорії масового обслуговування. Основні з цих результатів систематизовано в роботі [1]. Математичні моделі систем з повторними викликами мають широке застосування в практиці (див., наприклад, [1, 4–6]).

Характерною рисою стохастичних систем, що розглядаються, є така: виклики, які надійшли в зайняту систему, через випадковий проміжок часу повторюють спробу отримати обслуговування. Такі виклики стають джерелами повторних викликів, що генерують вторинний потік вимог.

Основна модель, що розглядається в даній роботі, є двовимірний ланцюг Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = I \times J$, де $I = \{0, 1, \ldots, m\}$, $J = \{0, 1, \ldots\}$. Інфінітезимальні характеристики $q_{(i,j)(i',j')}$ ланцюга $Q(t)$ визначаються таким чином: якщо $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $j \in J$, то

$$q_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j & \text{при} \quad (i',j') = (i+1, j), \\ i\mu & \text{при} \quad (i',j') = (i-1, j), \\ j\nu & \text{при} \quad (i',j') = (i+1, j-1), \\ -(\lambda_j + i\mu + j\nu) & \text{при} \quad (i',j') = (i, j), \\ 0 & \text{— в інших випадках;} \end{cases} \tag{1}$$

якщо $i = m$, $j \in J$, то

$$q_{(m,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j & \text{при} \quad (i',j') = (m, j+1), \\ m\mu & \text{при} \quad (i',j') = (m-1, j), \\ -(\lambda_j + m\mu) & \text{при} \quad (i',j') = (m, j), \\ 0 & \text{— в інших випадках.} \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$ є процесом обслуговування для системи з повторними викликами, яка складається з m обслуговуючих приладів. Час обслуговування має показниковий розподіл з параметром μ. Вхідний потік містить дві складові — первинну і вторинну. Інтенсивність λ_j потоку первинних викликів залежить від числа j — джерел повторних викликів. Кожний повторний виклик через показниковий час з параметром ν повторює спробу отримати обслуговування.

Компонента $Q_1(t)$ вказує на число зайнятих приладів у момент часу t, а $Q_2(t)$ дорівнює числу джерел повторних викликів. Згідно з прийнятою системою позначень, таку модель будемо кодувати як $M_Q/M/m/\infty$. Символ ∞ означає відсутність обмежень на число повторних викликів.

2. Умови існування ергодичного розподілу. З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t)$, $t \geqslant 0$.

Лема 1. *Нехай* $\lambda = \sup\limits_j \lambda_j < \infty$. *Тоді при* $\lambda/m\mu < 1$ *ланцюг* $Q(t)$ *ергодичний і його граничний розподіл збігається з єдиним стаціонарним.*

Доведення. Розглянемо як тест-функції Ляпунова такі функції:

$$\varphi(i,j) = ai + j, \qquad (i,j) \in S, \tag{3}$$

де параметр a буде визначено пізніше.

Для обраних тест-функцій середній перенос

$$y_{ij} = \sum_{(i',j') \neq (i,j)} q_{(i,j)(i',j')}(\varphi(i',j') - \varphi(i,j))$$

дорівнює

$$y_{ij} = \begin{cases} \lambda_j a - i\mu a + j\nu(a-1), & 0 \leqslant i \leqslant m-1, \\ \lambda_j - m\mu a, & i = m. \end{cases}$$

При $\lambda/(m\mu) < 1$ для будь-якого $a \in (\lambda/(m\mu), 1)$ існує $\varepsilon > 0$, що $y_{ij} < -\varepsilon$ для всіх $(i,j) \in S$ за винятком скінченного числа станів (i,j). Таким чином, для тест-функцій (3) виконуються умови теореми Твіді [1, с. 97]. Лему доведено.

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях типу $M_Q/M/m/\infty$ дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі. В зв'язку з цим розглянемо клас багатопорогових стратегій, які задаються порогами $0 = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \cdots \leqslant H_{N-1} < H_N = \infty$, $H' = (H_1, H_2, \ldots, H_{N-1})$, N — фіксоване число. Якщо в момент часу $t \geqslant 0$ число джерел повторних викликів $Q_2(t) \in [H_{i-1}, H_i)$, $i = 1, \ldots, N$, то будемо казати, що система з повторними викликами функціонує в i-му режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює h_i. Інші параметри від режиму не залежать. Вибір порогової стратегії H означає фіксацію залежності λ_j від числа джерел повторних викликів: $\lambda_j = h_i$, $j \in [H_{i-1}, H_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Відповідний процес обслуговування і його характеристики наділятимемо індексом H, $Q(t) = Q(t,H), \ldots$.

Нехай $S_1(t,H)$ — число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t; $S_2(t,H)$ — число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_3(t,H)$ — число перемикань інтенсивності вхідного потоку. Якщо існують границі $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1} S_i(t,H)$, то будемо позначати їх через $S_i(H)$, $i = 1, 2, 3$.

Розглянемо оптимізаційну задачу

$$\begin{aligned} &W(H) = C_1 S_1(H) - C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) \to \max, \\ &0 = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \cdots \leqslant H_{N-1} < H_N = \infty, \qquad H_i \in \{0, 1, \ldots\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{4}$$

де C_1 — прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику; C_2 — штраф за відмову в обслуговуванні; C_3 — штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

Розв'язком задачі (4) є така багатопорогова стратегія H, яка максимізує середній прибуток від роботи системи. Подібні задачі для одноканальних систем з повторними викликами розглядалися в роботах [5, 6].

В умовах леми 1 граничні функціонали $S_i(H)$, $i = 1, 2, 3$, існують і можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}(H)$, $(i, j) \in I \times J$

$$S_1(H) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} i\mu\pi_{ij}(H), \qquad S_2(H) = \sum_{i=1}^{N} h_i \sum_{j=H_{i-1}}^{H_i-1} \pi_{mj}(H), \tag{5}$$

$$S_3(H) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(h_i \pi_{mH_i-1}(H) + \nu H_i \sum_{k=0}^{m-1} \pi_{kH_i}(H) \right). \tag{6}$$

Таким чином, для розв'язання задачі (4) необхідні ефективні алгоритми розрахунку стаціонарного розподілу для системи $M_Q/M/m/\infty$. З цього моменту зосередимо увагу на цій проблемі.

3. Алгоритми підрахунку стаціонарних імовірностей. Розглянемо спочатку модель типу $M_Q/M/m/N$, в якій скінченне число N місць для повторних викликів. При умові, що всі N місць зайнято, виклик губиться і не отримує обслуговування в системі.

Інфінітезимальні характеристики $q^{(N)}_{(i,j)(i',j')}$ для процесу обслуговування $Q^{(N)}(t) = (Q^{(N)}_1(t), Q^{(N)}_2(t))$ в системі $M_Q/M/m/N$ збігаються з (1) для $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $j = 0, 1, \ldots, N$, і з (2) для $i = m$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, а для $i = m$, $j = N$ задаються таким чином:

$$q^{(N)}_{(m,N)(i',j')} = \begin{cases} m\mu & \text{при} \quad (i', j') = (m-1, N), \\ -m\mu & \text{при} \quad (i', j') = (m, N), \\ 0 & \text{— в інших випадках.} \end{cases}$$

Процес $Q^{(N)}(t)$ набуває значення в скінченній множині станів $S^{(N)} = I \times J^{(N)}$, $J^{(N)} = \{0, 1, \ldots, N\}$, і є ергодичним. Знайдемо його стаціонарний розподіл $\pi^{(N)}_{ij}$, $(i, j) \in S^{(N)}$.

Нехай $A(j) = \|a_{ik}(j)\|^{m-1}_{i,k=0}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ — тридіагональна матриця вигляду

$$a_{ik}(j) = \begin{cases} \lambda_j + i\mu + j\nu & \text{при} \quad k = i, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \\ -\lambda_j & \text{при} \quad k = i+1, \quad i = 0, 1, \ldots, m-2, \\ -i\mu & \text{при} \quad k = i-1, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

$$B = \|b_{ik}\|^{m-1}_{i,k=0}, \qquad b_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = i+1, i = 0, 1, \ldots, m-2, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

$$C = \|c_{ik}\|^{m-1}_{i,k=0}, \qquad c_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = m-1, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \\ 0 & \text{— в інших випадках.} \end{cases}$$

Через $D(N)$ будемо позначати трикутну матрицю

$$D(N) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(N\nu+\lambda_N) & 2\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -N\nu & -(N\nu+\lambda_N) & 3\mu & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -N\nu & -N\nu & -N\nu & \dots & -(N\nu+\lambda_N) & (m-1)\mu \end{pmatrix}.$$

Нам також необхідні будуть вектори

$$\pi^{(N)}(j)' = \big(\pi_{0j}^{(N)}, \pi_{1j}^{(N)}, \dots, \pi_{m-1j}^{(N)}\big),$$

$$G^{(N)}(j)' = \frac{\pi^{(N)}(j)'}{\pi_{0N}^{(N)}} = \big(G_{0j}^{(N)}, G_{1j}^{(N)}, \dots, G_{m-1j}^{(N)}\big),$$

$\overline{1}(m-1)-(m-1)$-вимірний вектор, що складається з одиниць, $e_i(m-1)-(m-1)$ — вимірний вектор, i-та компонента якого дорівнює одиниці, а інші — нулю. Через $\overline{1}$, e_i будемо позначати такі ж вектори розмірності m.

Теорема 1. *Якщо $\lambda_j > 0$, $j = 0, 1, \dots,$ то для будь-якого N стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$, $(i, j) \in S^{(N)}$ можна подати у вигляді*

$$\begin{pmatrix} \pi_{1N}^{(N)} \\ \dots \\ \pi_{m-1N}^{(N)} \end{pmatrix} = \pi_{0N}^{(N)} D^{-1}(N)(N\nu\overline{1}(m-1) + \lambda_N e_1(m-1)), \tag{7}$$

$$\pi_{mN}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}}{m\mu} G^{(N)}(N)'(N\nu\overline{1} + \lambda_N e_m),$$

$$\pi_j^{(N)\prime} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! \nu^{N-j}}{j!} G^{(N)}(N)' T(N-1) \times \dots \times T(j), \qquad j = 0, 1, \dots, N-1, \tag{8}$$

$$\pi_{mj}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! \nu^{N-j}}{\lambda_j j!} G^{(N)}(N)' T(N-1) \times \dots \times T(j+1)\overline{1}, \qquad j = 0, 1, \dots, N-1, \tag{9}$$

де

$$\pi_{0N}^{(N)} = \Bigg\{ G^{(N)}(N)' \Bigg(\overline{1} + N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}}{j!} T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \bigg[T(j) + \frac{1}{\lambda_j} \bigg] \overline{1} + \\ + \frac{1}{m\mu}(N\nu\overline{1} + \lambda_N e_m) \Bigg) \Bigg\}^{-1}. \tag{10}$$

$$G^{(N)}(N) = \begin{pmatrix} 1 \\ D^{-1}(N)(N\nu\overline{1}(m-1) + \lambda_N e_1(m-1)) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$T(j) = \bigg[B + \frac{m\mu}{\lambda_j} C \bigg] A^{-1}(j), \qquad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Доведення. Для зручності позначимо $\pi_{ij}^{(N)} = \widetilde{\pi}_{ij}$, $G_{ij}^{(N)} = \widetilde{G}_{ij}$, $(i,j) \in S^{(N)}$. Для кожного $k = 0, 1, \ldots, m-1$ розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $E_k = \{(0,N), (1,N), \ldots, (k,N)\}$ та $\overline{E}_k = S^{(N)} \setminus E_k$. Внаслідок рівності потоків імовірностей через замкнений контур у стаціонарному режимі [3, с. 49] матимемо для $k = 0, 1, \ldots, m-1$

$$N\nu\widetilde{\pi}_{0N} + N\nu\widetilde{\pi}_{1N} + \cdots + N\nu\widetilde{\pi}_{k-1N} + (N\nu + \lambda_N)\widetilde{\pi}_{kN} = (k+1)\mu\widetilde{\pi}_{k+1N}. \tag{12}$$

Для $\widetilde{G}_{ij} = \widetilde{\pi}_{ij}/\widetilde{\pi}_{0N}$ з перших $(m-1)$ рівнянь системи (12) маємо

$$\begin{pmatrix} \widetilde{G}_{1N} \\ \cdots \\ \widetilde{G}_{m-1N} \end{pmatrix} = D^{-1}(N)(N\nu\overline{1}(m-1) + \lambda_N e_1(m-1)),$$

що дає нам (11). З (12) при $k = m-1$ знаходимо

$$\widetilde{G}_{mN} = \frac{1}{m\mu}\widetilde{G}(N)'(N\nu\overline{1} + \lambda_N e_m). \tag{13}$$

Знайдемо тепер $\widetilde{G}_{mj}$, коли $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $S_j^{(N)} = \{(\alpha, \beta) \in S^{(N)} \colon \beta \leqslant j\}$ і $\overline{S}_j^{(N)} = S^{(N)} \setminus S_j^{(N)}$. Знову використовуючи рівність потоків імовірності через замкнений контур, маємо

$$\lambda_j\widetilde{\pi}_{mj} = (j+1)\nu\widetilde{\pi}_{0j+1} + \cdots + (j+1)\nu\widetilde{\pi}_{m-1j+1}, \tag{14}$$

звідки отримаємо

$$\widetilde{G}_{mj} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_j}\widetilde{G}(j+1)'\overline{1}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{15}$$

Розглянемо тепер $m \times N$ замкнених контурів, які містять точку (i,j) з області $\widetilde{S}^{(N)} = \{0, 1, \ldots, m-1\} \times \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Відповідні рівняння для $\widetilde{G}_{ij}$, $(i,j) \in \widetilde{S}^{(N)}$ мають вигляд

$$(\lambda_j + j\nu)\widetilde{G}_{0j} = \mu\widetilde{G}_{1j}, \qquad i = 0, \tag{16}$$

$$(\lambda_j + i\mu + j\nu)\widetilde{G}_{ij} = (j+1)\nu\widetilde{G}_{i-1j+1} + \lambda_j\widetilde{G}_{i-1j} + (i+1)\mu\widetilde{G}_{i+1j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-2. \tag{17}$$

При $i = m-1$ з урахуванням (15)

$$(\lambda_j + (m-1)\mu + j\nu)\widetilde{G}_{m-1j} = (j+1)\nu\widetilde{G}_{m-2j+1} + \lambda_j\widetilde{G}_{m-2j} + \frac{(j+1)m\mu\nu}{\lambda_j}\widetilde{G}(j+1)'\overline{1}. \tag{18}$$

Систему (16)–(18) можна подати у векторно-матричному вигляді

$$\widetilde{G}(j)' = (j+1)\nu\widetilde{G}(j+1)'\left[B + \frac{m\mu}{\lambda_j}C\right]A^{-1}(j) = (j+1)\nu\widetilde{G}(j+1)'T(j),$$

$$j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Звідси знаходимо

$$\widetilde{G}(j)' = \frac{N!\nu^{N-j}}{j!}\widetilde{G}(N)'T(N-1) \times \cdots \times T(j), \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{19}$$

Підставляючи праву частину (19) в (15), маємо

$$\widetilde{G}_{mj} = \frac{N!\nu^{N-j}}{j!\lambda_j}\widetilde{G}(N)'T(N-1)\times\cdots\times T(j+1)\overline{1}, \qquad j=0,1,\ldots,N-1.$$

Умова нормування для стаціонарних імовірностей $\widetilde{\pi}_{ij}$ дозволяє знайти $\widetilde{\pi}_{0N}$, що і дає нам формулу (10). Співвідношення (7)–(9) є безпосереднім наслідком (13), (19) та (10). Теорему доведено.

При виконанні умов леми 1 і $N \to \infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$ наближають відповідні ймовірності для системи $M_Q/M/m/\infty$. Результати роботи [7] щодо похибки такого наближення можуть бути поширені і на випадок моделей з керованою інтенсивністю вхідного потоку. Таким чином, теорема 1 містить ефективний алгоритм рекурентного типу для підрахунку стаціонарних характеристик.

Розглянемо тепер клас моделей типу $M_Q/M/2/\infty$. У даному випадку можна провести більш детальний аналіз і отримати явні формули.

Не порушуючи загальності, будемо вважати $\mu = 1$. Позначимо

$$A_i(j) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=i}^{j-1} \frac{1+\rho_k+\lambda_{k+1}+(k+1)\nu}{\rho_k[(\lambda_k+k\nu)^2+k\nu]}, & i<j, \\ 1, & i=j, \end{cases}$$

де $\rho_k = \lambda_k/2\mu = \lambda_k/2$ — завантаження системи первинними викликами.

Наслідок 1. *Якщо для $M_Q/M/2/\infty$ — системи з повторними викликами $\mu = 1$, $\lambda_j > 0$, $j = 0,1,\ldots, \sup\limits_j \lambda_j < 2$, то для неї існує стаціонарний режим і стаціонарні ймовірності дорівнюють*

$$\begin{aligned} &\pi_{0j} = \frac{P_j}{\nu^j j!}, \qquad \pi_{1j} = \frac{(\lambda_j+j\nu)P_j}{\nu^j j!}, \\ &\pi_{2j} = \frac{(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)P_j}{\nu^j\lambda_j j!}\,\frac{\rho_j[(\lambda_j+j\nu)^2+j\nu]}{1+\rho_j+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}, \end{aligned} \tag{20}$$

де

$$\begin{aligned} P_j = \Bigg\{&\sum_{i=0}^{j}\frac{(1+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{\nu^i i!} + \sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{A_j(i)\nu^i i!} + \\ &+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\nu^i\lambda_i i!} + \sum_{i=j}^{\infty}\frac{1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{A_j(i+1)\nu^i\lambda_i i!}\Bigg\}^{-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Доведення. Сам факт існування ергодичного розподілу випливає з леми 1 і умов наслідку. Для того щоб отримати формули для ергодичного розподілу, використаємо наступний спосіб. Розглянемо спочатку систему $M_Q/M/2/N$. До такої системи ми можемо застосувати результати теореми 1, яка дає явні формули для ергодичного розподілу.

Оскільки тепер

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A(j) = \begin{pmatrix} \lambda_j + j\nu & -\lambda_j \\ -1 & 1+\lambda_j+j\nu \end{pmatrix},$$

то

$$T(j)=\frac{1}{\rho_j[(\lambda_j+j\nu)^2+j\nu]}\begin{pmatrix} 1+\rho_j & (1+\rho_j)(\lambda_j+j\nu) \\ 1 & \lambda_j+j\nu \end{pmatrix}.$$

Тепер з формул (7)–(11) після відповідних перетворень отримаємо

$$\pi_{0j}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{N!\nu^{N-j}A_j(N)}{j!},\qquad \pi_{1j}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{N!\nu^{N-j}(\lambda_j+j\nu)A_j(N)}{j!},$$

$$\pi_{2j}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{N!\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{j!\lambda_j},\qquad j=0,1,\ldots,N-1,$$

$$\pi_{1N}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}(\lambda_N+N\nu),\qquad \pi_{2N}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{(\lambda_N+N\nu)^2+N\nu}{2},$$

де

$$\pi_{0N}^{(N)}=\Bigg\{1+\lambda_N+N\nu+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_j+j\nu)A_j(N)}{j!}+$$
$$+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{j!\lambda_j}+\frac{1}{2}((\lambda_N+N\nu)^2+N\nu)\Bigg\}^{-1}.$$

Перейшовши в цих формулах до границі при $N\to\infty$, одержимо зображення (20), (21). Наслідок доведено.

Розглянемо випадок керування системою $M_Q/M/2/20$, коли зміна інтенсивності вхідного потоку пов'язана з пересуванням одного порогу $H_1=H$. Параметри системи дорівнюють $h_1=2{,}5$; $h_2=0{,}5$; $\mu=1$; $\nu=0{,}1$, а коефіцієнти вартості $C_1=6$, $C_2=2$, $C_3=4$.

Підрахунок за формулами (4)–(6) з використанням наслідку 1 дає такі значення:

$$W(H)=3{,}295;3{,}427;3{,}533;3{,}619;3{,}689;3{,}749;3{,}800;3{,}844;3{,}883;$$
$$3{,}917;3{,}948;3{,}976;4{,}001;4{,}024;4{,}044;4{,}057;4{,}052;3{,}978;3{,}617,$$

або в графічному зображенні (рис 1).

Для $H=16$ значення цільової функції буде максимальним.

Підсумовуючи одержані результати, можна зробити наступний висновок. В даній роботі знайдено умови існування стаціонарного режиму, отримано явні формули та ефективні

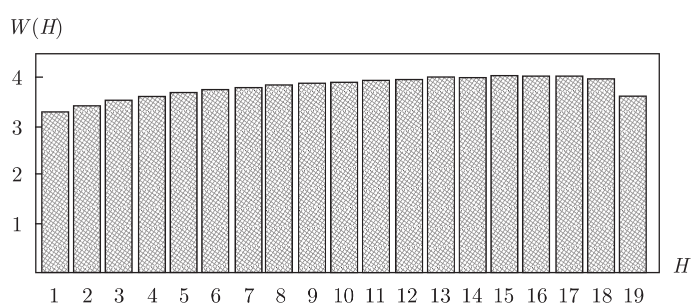

Рис. 1

алгоритми розрахунку стаціонарних імовірностей для систем з повторними викликами і керованою інтенсивністю вхідного потоку. Запропоновані алгоритми можуть бути використані для розв'язання оптимізаційних задач в класі багатопорогових стратегій.

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект Ф25.1/094).

1. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. – Москва: Рос. ун-т дружбы народов, 1995. – 529 с.
3. *Уолрэнд Дж.* Введение в теорию массового обслуживания. – Москва: Мир, 1993. – 336 с.
4. *Anisimov V. V., Artalejo J. R.* Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals // Queuing Systems. – 2001. – **39**. – P. 157–182.
5. *Клименок В. И.* Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами // Автоматика и вычислит. техника. – 1990. – № 1. – С. 25–30.
6. *Дудин А. Н., Клименок В. И.* Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети // Там же. – 1991. – № 2. – С. 25–31.
7. *Степанов С. Н.* Численные методы расчета систем с повторными вызовами. – Москва: Наука, 1983. – 232 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 05.12.2008

E. A. Lebedev, I. Ya. Usar

On retrial queues with controlled input flow

Markov retrial queues with the controlled rate of the input flow are investigated. For such models, the existence conditions of a stationary regime are obtained. To calculate the stationary probabilities, explicit formulas and effective algorithms are constructed. The obtained results are used to solve optimization problems in a class of multithreshold strategies.