УДК 517.977

Я.Й. БІГУН, Є.А. ЛЮБАРЩУК

ПРО УНИКНЕННЯ СУТИЧОК В ІГРОВІЙ ЗАДАЧІ ВЗАЄМОДІЇ УГРУПУВАНЬ

Розглядається задача про втечу хоча б одного з утікачів при взаємодії чотирьох переслідувачів та двох утікачів з простим рухом та областями керування – одиничними кулями. Показано, що навіть у випадку «оточення» хоча б один із втікачів може уникнути зустрічі з переслідувачами. Відповідний спосіб керування рухом реалізований програмно.

Вступ. За влучним висловом Л.С. Понтрягіна проблема взаємодії груп керованих об'єктів є вершиною теорії диференціальних ігор. В силу складності задачі доцільно на перших порах розглядати об'єкти з простим рухом та рівними максимальними швидкостями [1]. Відомо, що у випадку трьох переслідувачів та двох втікачів один із втікачів може уникнути піймання. Якщо ж переслідувачів п'ять, то їх можна розмістити так, що обидва втікачі будуть піймані [2]. Найбільший інтерес викликає проміжна ситуація «чотири проти двох» [3]. У даній роботі запропоновано спосіб уникнення сутичок у цьому випадку хоча би одним із втікачів використовуючи методику, описану в [3, 4] та програмна реалізація ігрової взаємодії.

1. Теоретичне обґрунтування

Розглянемо задачу взаємодії групи з 4-х переслідувачів та групи з 2-х втікачів у евклідовому просторі R^2 з простим рухом і рівними динамічними можливостями

$$\dot{x}_i = u_i, i = 1..4, \|u_i\| \le 1, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad (1)$$

$$\dot{y}_j = v_j, j = 1..2, \|v_j\| \le 1, \quad y_j(0) = y_j^0. \quad (2)$$

Керування гравців належить класу вимірних функцій. Мета групи переслідувачів – упіймати всіх втікачів, для втікачів метою є – хоча б одному втекти від переслідувачів.

Умовою захвату переслідувачем втікача є виконання співвідношення

$$\exists t > 0 \,|\; x_i(t) = y_j(t) \text{ для деяких } i \text{ та } j.$$

Твердження 1. Для задачі (1), (2) при будь-яких початкових положеннях гравців хоча б один втікач уникне піймання.

Доведення. Позначимо $I=\{1,2,3,4\}$ та $J=\{1,2\}$. Не зменшуючи загальності вважаємо, що $\forall j \in J \quad y_j \in \operatorname{int} co\left\{\bigcup_{i\in I} x_i^0\right\}$, інакше втікач, який знаходиться за межами опуклої оболонки рухається від неї і, очевидно, втече.

1. Розглянемо випадок коли один з переслідувачів належить внутрішній частині опуклої оболонки початкових положень решти переслідувачів, тобто

$$\exists i \in I \Big| \; x_i^0 \in \operatorname{int} co\left\{\bigcup_{j\in I\backslash i} x_j^0\right\}.$$

Нехай це 4-ий переслідувач. Позначимо $L_i(t)$ пряму, що проходить через точку $x_i(t)$ та точку $x_4(t)\; \forall i \in I \backslash 4$. $L_{12}(t), L_{13}(t), L_{21}(t), L_{23}(t), L_{31}(t), L_{32}(t)$ – відкриті півплощини, що визначаються прямими $L_1(t), L_2(t), L_3(t)$, причому $x_2(t) \in L_{12}(t), L_{32}(t)$, $x_3(t) \in L_{13}(t), L_{23}(t)$, $x_1(t) \in L_{21}(t), L_{31}(t)$.

Нехай $y_1^0 \in L_{21}(0) \cap L_{32}(0)$:

а) якщо $y_2^0 \in L_{21}(0) \cup L_{32}(0)$, то задавши керування втікачів при $t=0$

$v_1 = v_2 = p$, $\|p\|=1$, $(p, x_4^0 - x_2^0)=0$, $(p, x_1^0 - y_1^0) \ge 0$, $(p, x_1^0 - y_2^0) \ge 0$, при $y_2^0 \in L_{21}(0)$ або $v_1 = v_2 = p$, $\|p\|=1$, $(p, x_4^0 - x_3^0)=0$, $(p, x_2^0 - y_1^0) \ge 0$, $(p, x_2^0 - y_2^0) \ge 0$, при $y_2^0 \in L_{21}(0)$ або $v_1 = v_2 = p$, $\|p\|=1$, $(p, x_4^0 - x_3^0)=0$, при $y_2^0 \in L_{32}(0)$ хоча б один з втікачів уникне піймання (рис. 1);

b) якщо $y_2^0 \in L_{23}(0) \cap L_{31}(0)$, то керування втікачів при $t=0$

$v_1 = p_1$, $\|p_1\|=1$, $(p_1, y_1^0 - x_2^0)=0$, $(p_1, x_1^0 - y_1^0) > 0$, $v_2 = p_2$, $\|p_2\|=1$, $(p_2, y_2^0 - x_3^0)=0$, $(p_2, x_1^0 - y_2^0) > 0$ (рис. 2).

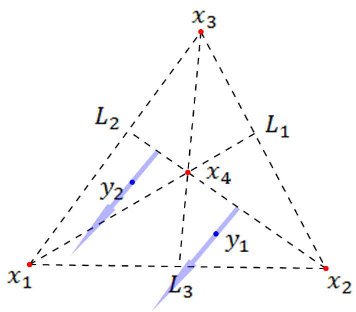


РИС. 1. Випадок $y_2^0 \in L_{21}(0) \cup L_{32}(0)$

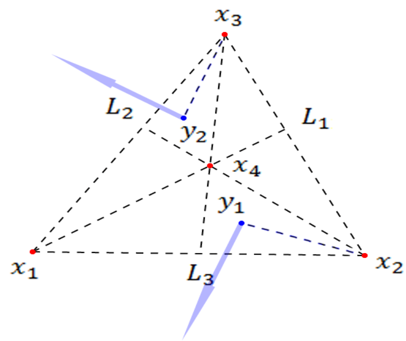


РИС. 2. Випадок $y_2^0 \in L_{23}(0) \cap L_{31}(0)$

Нехай існують моменти захвату T_1, T_2 причому $T_1 < T_2$.

Покладемо $\forall t \in [0;T_1)$ виконання умов:

1) $y_j(t) \in \operatorname{int} co\left\{ \bigcup_{i\in I} x_i(t) \right\} \quad j = 1,2$;

2) $x_4(t) \in \operatorname{int} co\left\{ \bigcup_{j\in I\setminus 4} x_j(t) \right\}$;

3) $y_1(t) \in L_{21}(t) \cap L_{32}(t) = A_1$; $y_2(t) \in L_{23}(t) \cap L_{31}(t) = A_2$.

Якщо для деякого моменту часу $\tilde{t} \in [0;T_1)$ умова 3) не виконується, то задача зводиться до п. а), тобто можлива втеча. Не зменшуючи загальності вважаємо, що $x_1(T_1) = y_1(T_1)$. Умова 3) гарантує, що жоден із втікачів не вийшов зі своєї зони (A_1 та A_2 відповідно) аж до моменту захвату T_1. Тоді, очевидно, що x_1 перетнув пряму $L_3(t)$, тобто в цей момент $y_2(T_1) \notin \operatorname{int} co\left\{ \bigcup_{i\in I} x_i(T_1) \right\}$. Іншими словами, можлива втеча.

2. Розглянемо випадок, коли початкові положення переслідувачів утворюють опуклу оболонку, тобто $\nexists i \in I \mid x_i^0 \in \operatorname{int} co\left\{ \bigcup_{j\in I\setminus i} x_j^0 \right\}$.

Зауваження 1. Очевидним є той факт, що якщо $\exists j \in J \mid y_j^0 \in \partial co\left\{ \bigcup_{i\in I} x_i^0 \right\}$, то у грі можлива втеча.

Позначимо $L_i(t)$ пряму, що проходить через $x_i(t)$ та $x_{i+2}(t)$ для $i = 1,2$. $L_{12}(t), L_{14}(t), L_{21}(t), L_{23}(t)$ – відкриті півплощини, що визначаються прямими L_1, L_2. Причому $x_2(t) \in L_{12}(t)$, $x_4(t) \in L_{14}(t)$, $x_1(t) \in L_{21}(t)$, $x_3(t) \in L_{23}(t)$. Нехай $y_1^0 \in L_{14}(0) \cap L_{21}(0)$:

a) якщо $y_2^0 \in L_{14}(0) \cup L_{21}(0)$, то керування втікачів при $t = 0$ $v_1 = v_2 = p$, $\|p\| = 1$, $(p, x_4^0 - x_2^0) = 0$, $(p, x_1^0 - y_1^0) \geq 0$, $(p, x_1^0 - y_2^0) \geq 0$, при $y_2^0 \in L_{21}(0)$ або $v_1 = v_2 = p$, $\|p\| = 1$, $(p, x_1^0 - x_3^0) = 0$, $(p, x_4^0 - y_1^0) \geq 0$, $(p, x_4^0 - y_2^0) \geq 0$, при $y_2^0 \in L_{14}(0)$ хоча б один з втікачів втече (рис. 3);

b) якщо $y_2^0 \in L_{12}(0) \cap L_{23}(0)$, то керування втікачів при $t = 0$ $v_1 = p_1$, $\|p_1\| = 1$, $p_1 \in N\left(y_1^0 / co\left\{ x_1^0, y_1^0, x_4^0 \right\} \right)$, $v_2 = p_2$, $\|p_2\| = 1$,

$$p_2 \in N\left(y_2^0 / co\left\{ x_2^0, y_2^0, x_3^0 \right\} \right),$$

де $N(x/A)$ – нормальний конус множини A в т. x [5] (рис. 4).

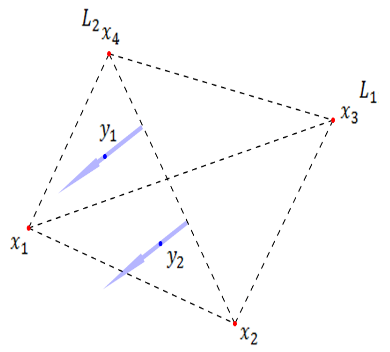


РИС. 3. Випадок $y_2^0 \in L_{14}(0) \cup L_{21}(0)$

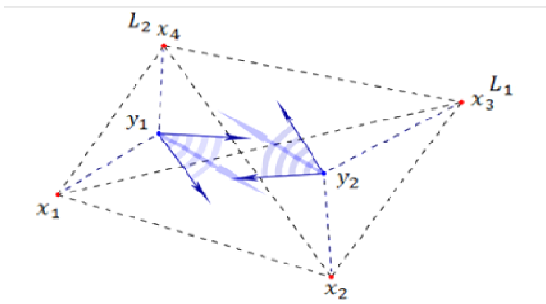


РИС. 4. Випадок $y_2^0 \in L_{12}(0) \cap L_{23}(0)$

Нехай існують моменти захвату втікачів T_1, T_2, такі, що $0 < T_1 < T_2$.

Покладемо $\forall t \in [0; T_1)$ виконання умов:

1) $y_j(t) \in \operatorname{int} co\left\{ \bigcup_{i \in I} x_i(t) \right\}$ $j = 1, 2,$

2) $y_1(t) \in L_{14}(t) \cap L_{21}(t) = A_1,$ $y_2(t) \in L_{12}(t) \cap L_{23}(t) = A_2.$

Якщо для деякого моменту часу $\tilde{t} \in [0; T_1)$ умова 2) порушується, то задача зводиться до п. а), тобто можлива втеча. Не зменшуючи загальності вважаємо, що $x_2(T_1) = y_1(T_1)$. Умова 2) гарантує, що жоден з втікачів не вийшов зі своєї зони (A_1 та A_2 відповідно) аж до моменту захвату T_1. Тоді, очевидно, що x_2 перетнув пряму $L_1(t)$, тобто в цей момент $y_2(T_1) \notin \operatorname{int} co\left\{ \bigcup_{i \in I} x_i(T_1) \right\}$. Іншими словами, можлива втеча.

Розглянемо випадок $T_1 = T_2$. Нехай виконуються умови 1) та 2) і $y_1(T_1) = x_2(T_1)$, $y_2(T_1) = x_4(T_1)$.

Нехай

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left\| x_2(T_1 - \delta) - y_1(T_1 - \delta) \right\| < \varepsilon, \quad \left\| x_4(T_1 - \delta) - y_2(T_1 - \delta) \right\| < \varepsilon.$$

Задамо керування y_1 в момент часу $T_1 - \delta$: $v_1 = \tilde{p}_1$, $\tilde{p}_1 \neq p_1$, $\left\| \tilde{p}_1 \right\| = 1$, $\tilde{p}_1 \in N(y_1 / co\{x_1, y_1, x_4\})$. Це завжди можна зробити, оскільки нормальний конус має безліч променів (випадок виродження конуса у пряму розглянуто у зауваженні 1). Керування гравця y_2 залишаємо без змін. Легко побачити, що в такому випадку $T_1 \neq T_2$. Тобто, можлива втеча. Твердження доведено.

2. Програмна реалізація. Алгоритм керування втікачем.

1. Визначити, чи належить даний втікач внутрішній частині опуклої оболонки початкових положень переслідувачів. Якщо ні, то втікач рухається з максимальною швидкістю від опуклої оболонки і втікає, інакше перейти до п. 2.

2. Визначити, чи один з переслідувачів належить внутрішній частині опуклої оболонки початкових положень решти переслідувачів. Якщо це так, то перейти до п. 3, інакше перейти до п. 4.

3. Побудувати прямі $L_1(0), L_2(0), L_3(0)$. Якщо обидва втікачі знаходяться з однієї сторони щодо однієї з цих прямих, то використовуючи керування з п. 1.a) один з втікачів втікає. Якщо ж для кожної з прямих $L_1(0), L_2(0), L_3(0)$ втікачі знаходяться з різних сторін, то використовуючи керування з п. 1.b) один із втікачів втікає.

4. Побудувати прямі $L_1(0), L_2(0)$. Якщо обидва втікачі знаходяться з однієї сторони щодо однієї з цих прямих, то використовуючи керування з п. 2.a) один із втікачів втікає. Якщо ж для кожної з прямих $L_1(0), L_2(0)$ втікачі знаходяться з різних сторін то використовуються керування з п. 2.b), поки хоча б один з втікачів не перетне пряму $L_1(t)$ чи $L_2(t)$, коли це сталось, то керування втікачів змінюються на 2.a) і хоча б один із них втече.

Контрольні приклади

На мові JavaScript з використанням html5 розроблено програмний продукт, що дозволяє візуально споглядати поведінку втікачів і переслідувачів (рис. 5–7).

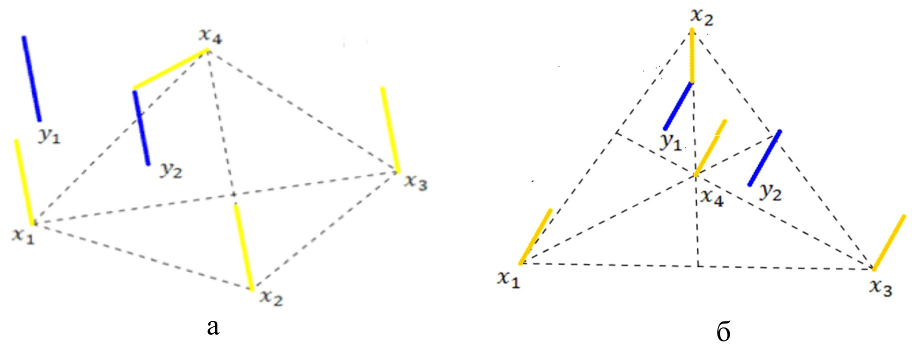
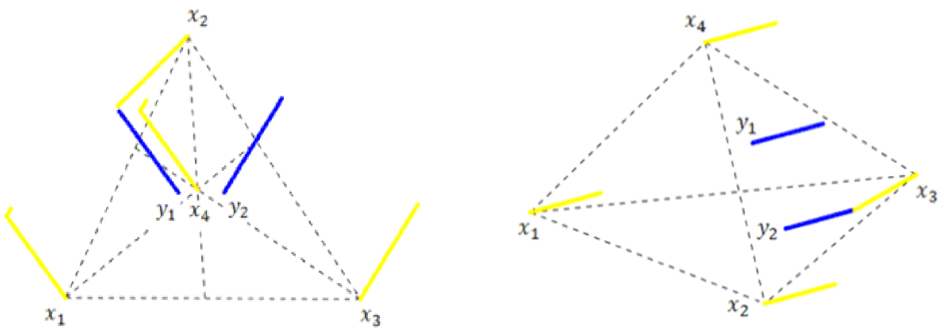


РИС. 5. Випадок коли хоча б один з втікачів знаходиться за межами внутрішньої частини опуклої оболонки початкових положень переслідувачів: а – випадок коли обидва втікачі знаходяться в межах внутрішньої частини опуклої оболонки початкових положень переслідувачів; б – причому один з переслідувачів також належить їй



а б

РИС. 6. а – випадок розміщення двох втікачів у межах внутрішньої частини опуклої оболонки початкових положень переслідувачів, за умови, що один з переслідувачів також належить їй; б – випадок коли обидва втікачі знаходяться в межах внутрішньої частини опуклої оболонки початкових положень переслідувачів, але жоден з переслідувачів їй не належить

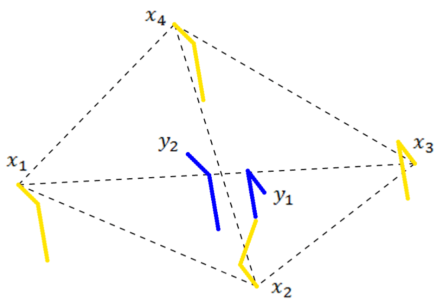


РИС. 7. Випадок розміщення двох втікачів у межах внутрішньої частини опуклої оболонки початкових положень переслідувачів, за умови, що жоден з переслідувачів їй не належить

Я.И. Бигун, *Е.А. Любарщук*

ОБ ИЗБЕЖАНИИ СТОЛКНОВЕНИЙ
В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГРУППИРОВОК

Рассматривается задача об избегании поимки хотя бы одним из убегающих при взаимодействии четырех преследователей и двух убегающих с простым движением и областями управления – единичными шарами. Показано, что даже в случае «окружения» хотя бы один из беглецов может избежать встречи с преследователями. Соответствующий способ управления движением реализован программно.

J.I. Bihun, *E.A. Liubarshchuk*

ON COLLISION AVOIDANCE IN THE GAME PROBLEM OF GROUP INTERACTION

The problem of escaping of at least one evaders is analysed in the case of interaction of four pursuers and two evaders, having "simple motion" dynamics and control domains in the form of unit spheres. It is shown that at least one of the evaders can escape. The corresponding motion control is program designed and computer simulated.

1. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. – 1976. – № 3. – С. 145 – 146.
2. *Григоренко Н.Л.* Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // Докл. АН СССР. – 1985. – 282, № 5. – С. 1051 – 1054.
3. *Прокопович П.В., Чикрий А.А.* О взаимодействии групп управляемых объектов // Теория оптимальных решений. – 1987. – С. 71 – 75.
4. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – К.: Наук. думка, 1992. – 384 с.
5. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач.– М.: Наука, 1974. – 480 с.

Одержано 29.03.2013