Теорія оптимальних рішень

УДК 517.977

И.Ю. КРИВОНОС

ОБ ОДНОЙ ИГРЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНОЙ ДИНАМИКОЙ

Изучается пример динамической игры преследования, в которой преследователь движется в соответствии с дифференциальным уравнением дробного порядка π, а уравнение движения убегающего имеет порядок e. Таким образом, преследователь обладает большей инерционностью. Данная игра преследования представляет собой обобщение классического примера «мальчик и крокодил». В статье получены достаточные условия поимки при любых допустимых управлениях убегающего.

Введение. Разработка методов управления динамическими системами, описываемыми дифференциальными уравнениями дробного порядка, сталкивается с трудностями, которые связаны со свойствами дробных производных. Так, в частности, широко используемая в моделях реальных процессов дробная производная Капуто не обладает ни полугрупповым свойством, ни свойством коммутативности.

Учитывая данное плодотворным оказалось использование идей метода разрешающих функций, базирующегося на использовании обратных функционалов Минковского и дающего полное обоснование правила параллельного сближения для сравнительно простых систем [1]. В работах [2 – 4] рассмотрены игровые задачи сближения для линейных процессов произвольного дробного порядка с классическими производными Римана – Лиувилля, регуляризованными производными Капуто и секвенциальными производными Миллера – Росса.

В настоящей работе изучается пример динамической игры преследования, в которой преследователь движется в соответствии с дифференциальным уравнением дробного порядка π, а уравнение движения убегающего имеет порядок e. Таким образом, преследователь обладает большей инерционностью. Данная игра преследования представляет собой обобщение классического примера «мальчик и крокодил» [1]. В работе получены достаточные условия поимки при любых допустимых управлениях убегающего.

Обозначим $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Пусть $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ – абсолютно непрерывная функция.

Левосторонний интеграл Римана – Лиувилля порядка α, $0<\alpha\le 1$, от функции f определяется как

$$J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau,$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Здесь и далее будем полагать, что J^0 представляет собой оператор тождественного преобразования. Для существования требуемого левостороннего интеграла Римана–Лиувилля достаточно предположить локальную интегрируемость функции $f(t)$.

Пусть теперь $m-1<\alpha<m$, $m\in \mathrm{N}$, а функция f имеет абсолютно непрерывные производные до порядка m. Производная Капуто от функции f дробного порядка α задается выражением

$$D^{(\alpha)} f(t) = J^{m-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau .$$

Справедлива следующая формула для преобразования Лапласа дробной производной Капуто:

$$L\{D^{(\alpha)} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^{\alpha-i-1} \frac{d^i}{dt^i} f(t)\,|_{t=0}, \tag{1}$$

где $L\{f(t); s\} = F(s)$.

Рассмотрим пример дифференциальной игры преследования. Пусть динамика первого игрока, которого мы будем называть преследователем, описывается уравнением:

$$D^{(\pi)} x = u, \quad |u|\le 1, \tag{2}$$

где $\pi = 3{,}14159\ldots$ – отношение длины окружности к его диаметру, с начальными условиями

$$x(0) = x^0,\ \dot{x}(0) = x_1^0,\ \ddot{x}(0) = x_2^0,\ \dddot{x}(0) = x_3^0.$$

Динамика второго игрока, которого мы будем называть убегающим, задается уравнением:

$$D^{(e)} y = v, \quad |v|\le 1, \tag{3}$$

где $e = 2{,}71828\ldots$ основа натуральных логарифмов, с начальными условиями

$$y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = y_1^0,\ \ddot{y}(0) = y_2^0.$$

Фазовые векторы x и y задают текущую позицию соответственно преследователя и убегающего в n-мерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

При этом $x = x(t)$ является трижды, а $y = y(t)$ – дважды абсолютно непрерывно дифференцируемой на полуоси $\mathbb{R}_+$ функцией времени t: $x(t) \in AC^3(\mathbb{R}_+)$, $y(t) \in AC^2(\mathbb{R}_+)$. Векторы $u = u(t)$, $v = v(t)$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ являются измеримыми функциями времени t, которые задают управление соответственно преследователя и убегающего.

Цель преследователя состоит в том, чтобы для некоторого конечного момента T добиться выполнения неравенства:

$$|x(T) - y(T)| \le \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Цель убегающего – противоположна и заключается в том, чтобы не допустить выполнения неравенства (4), а, если это невозможно, максимально отдалить момент T.

Обозначим S шар единичного радиуса в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Тогда $u \in U = S$, $v \in V = S$, а условие (4) можно переписать в виде

$$x(T) - y(T) \in M = \varepsilon S.$$

Применим преобразование Лапласа к левой и правой части уравнения (2), учитывая формулу (1). Получаем

$$s^{\pi} X - s^{\pi-1} x^0 - s^{\pi-2} x_1^0 - s^{\pi-3} x_2^0 - s^{\pi-4} x_3^0 = U$$

или

$$X = s^{-\pi} U + s^{-1} x^0 + s^{-2} x_1^0 + s^{-3} x_2^0 + s^{-4} x_3^0.$$

Применяя обратное преобразование имеем:

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\pi)} \int_0^t (t - \tau)^{\pi-1} u(\tau) d\tau + x^0 + t x_1^0 + \frac{t^2}{2} x_2^0 + \frac{t^3}{6} x_3^0.$$

Аналогично находим

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(e)} \int_0^t (t - \tau)^{e-1} v(\tau) d\tau + y^0 + t y_1^0 + \frac{t^2}{2} y_2^0.$$

Применим к дифференциальной игре (2)–(4) технику разрешающих функций для случая разделенных движений игроков [1].

Рассмотрим многозначные отображения:

$$W(t, v) = \frac{t^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)} U - \frac{t^{e-1}}{\Gamma(e)} C(t) v = \frac{t^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)} S - \frac{t^{e-1}}{\Gamma(e)} C(t) v,$$

$$W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v) = \frac{t^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)} S \overset{*}{-} \frac{t^{e-1}}{\Gamma(e)} C(t) S.$$

Обозначим I единичную матрицу. Положим

$$C(t) = c(t) I,$$

$$c(t)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(e)}{\Gamma(\pi)}t^{\pi-e} & \text{если}\quad 0\le t<\left(\dfrac{\Gamma(\pi)}{\Gamma(e)}\right)^{\frac{1}{\pi-e}}\\ 1 & \text{если}\quad t\ge\left(\dfrac{\Gamma(\pi)}{\Gamma(e)}\right)^{\frac{1}{\pi-e}}\end{cases}. \qquad (5)$$

Тогда

$$W(t)=\begin{cases}\{0\} & \text{если}\quad 0\le t<\left(\dfrac{\Gamma(\pi)}{\Gamma(e)}\right)^{\frac{1}{\pi-e}}\\ \left(\dfrac{t^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)}-\dfrac{t^{e-1}}{\Gamma(e)}\right)S & \text{если}\quad t\ge\left(\dfrac{\Gamma(\pi)}{\Gamma(e)}\right)^{\frac{1}{\pi-e}}\end{cases}.$$

Таким образом, условие Понтрягина выполнено, поскольку $W(t)\neq\varnothing$ для всех $t\ge 0$. Далее

$$M(t)=M\overset{*}{-}\int_0^t\frac{\tau^{e-1}}{\Gamma(e)}(1-c(\tau))Vd\tau=$$

$$=\begin{cases}\left[\varepsilon-\left|\dfrac{t^{\pi}}{\Gamma(\pi+1)}-\dfrac{t^{e}}{\Gamma(e+1)}\right|\right]S & \text{если}\quad 0\le t<\left(\dfrac{\Gamma(\pi)}{\Gamma(e)}\right)^{\frac{1}{\pi-e}}\\ \left[\varepsilon-\left|\dfrac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{\pi}{\pi-e}}}{\Gamma(\pi+1)}-\dfrac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{e}{\pi-e}}}{\Gamma(e+1)}\right|\right]S & \text{если}\quad t\ge\left(\dfrac{\Gamma(\pi)}{\Gamma(e)}\right)^{\frac{1}{\pi-e}}.\end{cases}$$

Следовательно, модифицированное условие Понтрягина выполнено если

$$\varepsilon\ge\left|\frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{\pi}{\pi-e}}}{\Gamma(\pi+1)}-\frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{e}{\pi-e}}}{\Gamma(e+1)}\right|=\frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{e}{\pi-e}}}{\Gamma(e+1)}-\frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{\pi}{\pi-e}}}{\Gamma(\pi+1)}.$$

Введем функцию

$$\xi(t,x_0,y_0)=x^0+tx_1^0+\frac{t^2}{2}x_2^0+\frac{t^3}{6}x_3^0-y^0-ty_1^0-\frac{t^2}{2}y_2^0,$$

здесь и далее $x_0=(x^0,x_1^0,x_2^0,x_3^0)$, $y_0=(y^0,y_1^0,y_2^0)$.

Положим

$$m(t)=\begin{cases} \varepsilon-\dfrac{t^{e}}{\Gamma(e+1)}+\dfrac{t^{\pi}}{\Gamma(\pi+1)} & \text{если } 0\le t<\left(\dfrac{\Gamma(\pi)}{\Gamma(\mathrm{e})}\right)^{\frac{1}{\pi-\mathrm{e}}} \\ \varepsilon-\dfrac{\left(\Gamma(\pi)/\Gamma(e)\right)^{\frac{e}{\pi-e}}}{\Gamma(e+1)}+\dfrac{\left(\Gamma(\pi)/\Gamma(e)\right)^{\frac{\pi}{\pi-e}}}{\Gamma(\pi+1)} & \text{если } t\ge\left(\dfrac{\Gamma(\pi)}{\Gamma(\mathrm{e})}\right)^{\frac{1}{\pi-\mathrm{e}}} \end{cases},$$

тогда

$$M(t)=m(t)S.$$

Рассмотрим разрешающую функцию

$$\alpha(t,\tau,v)=\sup\{\alpha\ge 0: W(t-\tau,v)\cap\alpha[M(t)-\xi(t)]\ne\varnothing\}.$$

Эта функция может быть найдена в явном виде, как больший корень квадратного уравнения:

$$\left|\alpha\xi(t)-\frac{(t-\tau)^{e-1}c(t-\tau)}{\Gamma(e)}v\right|=\frac{(t-\tau)^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)}+\alpha m(t).$$

Решая это уравнение, находим:

$$\alpha(t,\tau,v)=\frac{\dfrac{(t-\tau)^{e-1}c(t-\tau)}{\Gamma(e)}(\xi(t),v)+\dfrac{(t-\tau)^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)}m(t)+\sqrt{\Delta/4}}{|\xi(t)|^{2}-m^{2}(t)},$$

где

$$\Delta/4=\left(\frac{(t-\tau)^{e-1}c(t-\tau)}{\Gamma(e)}(\xi(t),v)+\frac{(t-\tau)^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)}m(t)\right)^{2}-$$

$$-\left(\frac{(t-\tau)^{2e-2}c^{2}(t-\tau)}{\Gamma^{2}(e)}|v|+\frac{(t-\tau)^{2\pi-2}}{\Gamma^{2}(\pi)}\right)\left(|\xi(t)|^{2}-m^{2}(t)\right).$$

При $v=-\dfrac{\xi(t)}{|\xi(t)|}$ достигается

$$\min_{|v|\le 1}\alpha(t,\tau,v)=\frac{\dfrac{(t-\tau)^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)}-\dfrac{(t-\tau)^{e-1}c(t-\tau)}{\Gamma(e)}}{|\xi(t)|-m(t)}. \qquad (6)$$

В силу непрерывности числителя и знаменателя в (6) время окончания игры (2)–(4) определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$\int_{0}^{t}\left[\frac{\tau^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)}-\frac{\tau^{e-1}}{\Gamma(e)}c(\tau)\right]d\tau=|\xi(t)|-m(t). \qquad (7)$$

Уравнение (7) можно упростить, учитывая (5) и вид функции $m(t)$. Действительно, из (5) следует, что при $0 \le t < \left(\Gamma(\pi) / \Gamma(e)\right)^{1/(\pi - e)}$ подынтегральная функция равна нулю и игра не может быть окончена на этом интервале.

Пусть $t \ge (\Gamma(\pi) / \Gamma(e))^{1/(\pi - e)}$, в таком случае, будем иметь $\int_0^t \left[\frac{\tau^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)} - \frac{\tau^{e-1}}{\Gamma(e)} c(\tau) \right] d\tau = \int_{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{1/(\pi-e)}}^{t} \left[\frac{\tau^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)} - \frac{\tau^{e-1}}{\Gamma(e)} \right] d\tau.$ Окончательно уравнение (7) для определения времени окончания игры приобретает следующий вид:

$$\frac{t^{\pi}}{\Gamma(\pi+1)} - \frac{t^{e}}{\Gamma(e+1)} + \varepsilon = \left\| \xi(t) \right\|.$$

Заключение. Полученные результаты показывают, что аппарат разрешающих функций может быть эффективно использован для решения игровых задач управления с дробной динамикой.

І.Ю. Кривонос

ПРО ОДНУ ГРУ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ З ДРОБОВОЮ ДИНАМІКОЮ

Вивчається приклад динамічної гри переслідування, в якій переслідувач рухається відповідно до диференціального рівняння дробового порядку π, а рівняння руху утікача має порядок e.

I.Yu. Krivonos

ON A PURSUIT GAME WITH FRACTIONAL DYNAMIC

An example of dynamic pursuit game is studies, in which the pursuer moves according to a differential equation of fractional order π, while evader's equation of motion is of order e .

1. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
2. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**. – № 3. – С. 262–278.
3. *Chikrii A.A., Matychyn I.I.* Game problems for fractional-order systems // New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications. Vol. XI. – Dordrecht; Heidelberg; London; New York: Springer, 2010. – P. 233–241.
4. *Матичин И.И.* Конфликтно управляемые процессы с дробными производными // Кибернетика и вычислительная техника. – 2010. – Т. 162. – С. 65–81.

Получено 05.03.2013