УДК 519.1

В.Б. ПАВЛЕНКО

РАСКРАШИВАНИЕ ПЛОСКИХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ

В статье рассматривается подход, который может быть полезным при решении задачи о раскраске плоских графов четырьмя красками.

Введение. В статье рассматривается подход, который может быть полезным при решении задачи о раскраске плоских графов четырьмя красками.

Пусть G - связный плоский граф. Любая грань графа, ограниченная треугольником будет называться треугольником

Определение 1. Плоский связный граф, каждая грань которого является треугольником, называется *плоской триангуляцией*.

Определение 2. Граф называется *максимально-плоским*, если после добавления произвольного ребра он перестает быть плоским.

Лемма 1. Если число вершин некоторой плоской триангуляции не менее 4, то степень каждой вершины не менее 3.

Доказательство. Пусть v - произвольная вершина плоской триангуляции G, и u - плоская ей вершина. Ребро (u,v) в плоской триангуляции разделяет 2 грани, следовательно, существует x_1 принадлежащий одной грани и x_2 принадлежащий другой грани. Таким образом, все вершины графа G имеют степень не менее трех.

Лемма 2. Всякий планарный граф с числом вершин не менее 4 $(n >= 4)$ имеет по крайней мере 4 вершины, степень которых не превосходит 5.

Доказательство аналогично предыдущему.

Теорема 1. Для того чтобы граф являлся максимально-плоским необходимо и достаточно, чтобы он представлял собой плоскую триангуляцию.

Доказательство. Необходимость. Пусть G - максимально-плоский граф, тогда каждая его грань ограничена либо треугольником либо циклом длины не менее 4.

Рассмотрим грань Γ ("гамма большая"), ограниченную циклом длины 5. В графе G одновременно не могут существовать и ребро (v_1,v_3) и ребро (v_2,v_3). Т.к. оба ребра должны быть вне грани Γ, то они обязательно будут пересекаться, что противоречит факту, что G - плоский.

Пусть в G существует ребро (v_2,v_3). Добавим в граф ребро (v_1,v_3), проходящее внутри грани Γ и разбивающее ее на 2 грани, и полученный граф останется плоским. Но тогда G не максимально-плоский граф, следовательно все грани графа G - треугольники, а G - плоская триангуляция.

Достаточность. Пусть G - плоская триангуляция. Соединим любые 2 вершины грани Γ ребром, разбивающим эту грань на 2 грани. В этом случае, когда грани являются треугольниками это невозможно, следовательно граф G - максимально-плоский.

Следствие 1. Всякий плоский граф является некоторым подграфом плоской триангуляции.

Следствие 2. Для любого максимально-плоского графа верно неравенство: $m = 3n - 6$.

Свойства раскрашенных плоских триангуляций. Рассмотрим плоскую триангуляцию, вершины которой правильно раскрашены 4 красками (никакие 2 смежные вершины не окрашены одинаково). Пусть $Z = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ - множество цветов. Подграф, образованный на множестве вершин цвета s и t ($s \in Z,\ \ s \neq t$) будем называть ***бихроматическим*** *графом* G_{st}, где $p(G_{st})$ – число компонент связности, $\lambda(G_{st})$ – цикломатическое число графа.

Рассмотрим граф на рисунке. Как видим, граф раскрашен 4-мя красками таким образом, что вершины по краям треугольной грани принадлежат бихроматическому подграфу и только одна грань его не треугольна. Назовет такой граф ***мозаикой*** с внешними цветами s и t и обозначим $M(s,t)$.

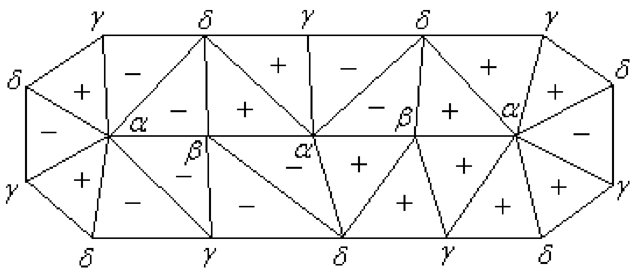

РИСУНОК. Мозаика M(s,t)

Лемма 3. Для всякой мозаики имеет место:

1) $\lambda(G_{st}) = p(G_{uv})$, (1)

2) $p(G_{st}) = \lambda(G_{uv}) + 1$, (2)
где $\{s,t\} \cup \{u,v\} = Z$.

Первое равенство очевидно для $\lambda(G_{st}) = 1$. Допустим, что оно справедливо для некоего $r \geq 1$: $\lambda(G_{st}) = r$. Рассмотрим $\lambda(G_{st}) = r + 1$. В подграфе $G_{s,t}$ выделим мозаику *M'(s,t),* полученную путем склеивания одинаково окрашенных вершин бихроматического цикла данного подграфа, для которой имеет место $\lambda'(G_{st}) = r = p'(G_{uv})$. Однако $p'(G_{uv}) = p(G_{uv}) - 1$, откуда следует равенство (1). Добавим к мозаике *M'(s,t)* внешний цикл с цветами *u* и *v*. Тогда для *M(u,v)* имеем: $\lambda'(G_{st}) = p'(G_{st}) = p(G_{st})$. Но $\lambda'(G_{uv}) = \lambda(G_{uv}) + 1$, что дает соотношение (2).

Следствие. Для раскрашенной плоской триангуляции справедливо $p(G_{st}) = \lambda'(G_{uv}) + 1$, где $\{s\} \cup \{t\} \cup \{u\} \cup \{v\} = Z$. Это равенство следует из того, что любую плоскую триангуляцию можно разбить на две мозаики, имеющие лишь общий бихроматический цикл.

Лемма 4. Для раскрашенной плоской триангуляции имеют место:

1) $m(G_{st}) + m(G_{uv}) = n - 2$, (3)

2) $[p(G_{st}) - \lambda(G_{st})] + [p(G_{uv}) - \lambda(G_{uv})] = 2$, (4)

где $\{s\} \cup \{t\} \cup \{u\} \cup \{v\} = Z$.

Раскраска плоской триангуляции четырьмя красками сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\sum_{i \in M_y} x_i \equiv 0 (\bmod 3), \quad y \in K, \tag{5}$$

$$x_j = \pm 1, \; j = 1, 2, ..., 2n - 4, \tag{6}$$

где – множество треугольных граней, инцидентных вершине y, *К* – множество вершин. Каждому решению системы (5-6) соответствует одна и только одна раскраска графа (с точностью до фиксации одного треугольника) и наоборот. Допустим, получена какая-либо раскраска. Тогда система уравнений решается как:

1) присваиваем произвольной грани (x_i) значение +1;
2) выбираем неотмеченную грань, имеющую общее ребро с отмеченной. Если вершины противолежащие этому ребру, окрашены общим цветом, присвоим выбранной грани знак, противоположный знаку соседней грани, в противном случае ставим тот же знак.

Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не будут отмечены все грани. Получим следующее выражение:

$$g = (-1)^{\varepsilon} = \prod_{i=1}^{2n-4} x_i \,. \tag{7}$$

В зависимости от того, какое значение принимает g, эпсилом может быть четным или нечетным (при этом имеем *четную* или *нечетную* раскраску). Пусть e=[0, 1], тогда в соответствующих случаях раскраска будет равна 0 или 1. Выберем компоненту подграфа G_{st}, в которой цвет s не равен цвету t и поменяем эти цвета местами. Назовем эту операцию ***элементарной перекраской*** графа.

Лемма 5. Элементарная перекраска не меняет четности раскраски графа.

Это утверждение легко доказывается, если рассмотреть мозаику $M(s,t)$ на рисунке. Число граней любой мозаики равно: $N=2n-k-2\equiv 0(mod\ 2)$, так как k-четное число, то и исходный граф имеет четное число граней. Элементарная перекраска приводит к замене всех знаков в графе на противоположные, поэтому:

$$g' = (-1)^{\varepsilon'} = g'(-1)^N = g,\ \ \varepsilon' = \varepsilon (\mathrm{mod}\, 2)\,,$$

что доказывает лемму.

Теорема 2. Четность раскраски плоской триангуляции постоянна и сравнима с числом ее вершин.

Выделим в раскрашенной плоской триангуляции одну компоненту подграфа G_{st} и рассмотрим подграф, образованной вершинами этой компоненты и смежными с ними вершинами цвета u и v. Легко убедиться, что множество граней этого подграфа можно разбить на несколько циклических непересекающихся последовательностей, в которых каждая следующая грань смежна с предыдущей через ребро, один конец которого окрашен в цвет s и t. Рассмотрим такую последовательность.

Пусть число граней всей равно N, а каждая грань имеет основанным ребро либо из подграфа G_{st} либо из подграфа G_{uv}. Обозначим их число соответственно через $N(s,t)$ и $N(u,v)$. Из леммы 5 следует: $N(s,t)\ \equiv\ N(u,v)(mod\ 2)\ \equiv\ 0(mod\ 2)$. Сделаем разметку граней знаками $+1$ и -1 в соответсвии с системой (1.6)-(1.7). Пусть число граней со знаком $+1$ равно x, а число граней со знаком y, тогда сумма всех знаков для граней входящих в $N(s,t)$ равна $N(s,t)-2x$. Рассмотрим последовательность знаков, соответствующую последовательности всех граней и выделим в ней отрезок, соответствующий отрезку последовательности между двумя ближайшими гранями, имеющих основанием ребро из подграфа Gst. Нетрудно заметить, что если знаки этих граней совпадают, что сума отрезка равна соответствующему значению этих граней, если знаки граней различны, то сумма отрезка равна нулю. То есть: $N(u, v) - 2y = N(s, t) - 2x$. Сумма всей последовательности знаков равна тогда: $S=2N(s, t) - 4x$. Однако $N(s, t) =2l$, где l – натуральное число, и поэтому имеем $S=4(l-x)$.

Таким образом, сумма всех знаков для раскрашенной плоской триангуляции равна $4r$, где r – целое число. Пусть число граней, имеющих знак -1 равно k_1, а число граней со знаком +1 равно k_2. Тогда эти числа удовлетворяют системе уравнений:

$$k_1+k_2=2n-4,$$
$$k_2-k_1=4r.$$

Четность раскраски плоской триангуляции определяется из соотношения $\varepsilon = k_1(mod 2)$. Но из выведенной выше системы находим: $k_1=n-2(r+1)$, откуда $\varepsilon = n(mod 2)$, что и требовалось доказать.

Может показаться, что все раскраски плоской триангуляции можно получить путем элементарных перекрасок, однако легко убедиться, что это не так.

Заключение. Система уравнений для плоской триангуляции адекватно отражает проблему раскрашивания плоского графа четырьмя красками. Существенную роль тут играет использование в качестве переменных ребра гамильтонова цикла плоского графа. Дальнейшие исследования следует направить в углубление данной проблемы и построение полинома, способного разрешить проблему четырех красок.

В.Б. Павленко

РОЗФАРБОВУВАННЯ ПЛОСКИХ ТРІАНГУЛЯЦІЙ

У статті розглядається підхід, який може бути корисним при вирішенні задачі про розфарбовування плоских графів чотирма фарбами.

V.B. Pavlenko

PAINTING PLANE TRIANGULATIONS

The article proposes an approach that can be useful in solving the problem of coloring planar graphs with four colors.

1. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
2. http://grafy.do.am/index/0-27. Плоские триангуляции (интернет-ресурс)
3. *Донец А.П.* Теоретико-числовой подход к решению некоторых задач теории графов. Диссертационная работа. – К., 1997. – 162 с.
4. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 341 с.
5. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.

Получено 14.05.2012