ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

УДК 519.21

Е.Н. ДЕРИЕВА, С.П. ШПИГА, А.П. КНОПОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА СНОСА СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение на плоскости с дробным броуновским движением. Изучаются свойства оценки максимального правдоподобия параметра сноса, для ограниченного класса функций специального вида доказаны сильная устойчивость.

В работе изучается задача оценивания параметра сноса стохастического дифференциального уравнения на плоскости с аддитивным дробным броуновским полем. Аналогичные задачи для дробных винеровских процессов изучались, например, в [1] для случая, когда параметр Херста, принадлежит интервалу (1/2,1).

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) заданы действительное случайное поле $\{x(z),\, z \ge 0\}$ и двухпараметрическое дробное броуновское движение $\{B(z),\, z \ge 0\}$

$$E\{B(t_1,t_2)\,B(s_1,s_2)\} = \frac{1}{4}\prod_{i=1,2}\left(t_i^{2H_i} + s_i^{2H_i} - |t_i - s_i|^{2H_i}\right)$$

с $H_1, H_2 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, а $z = (s,t) \in R^2$. Будем предполагать, что поля $\{x(z)\}$ и $\{B(z)\}$ независимы. Допустим, что случайный процесс $\{y(z), z \ge 0\}$ имеет стохастический дифференциал

$$dy(z) = a_0(z)x(z)\,dz + dB(z), \quad z \ge 0 \quad (1).$$

Задача состоит в оценке неизвестной функции a_0 на основании наблюдений случайного поля $\{(x(z), y(z)),\, z \ge 0\}$ в прямоугольнике $z \in [0,T]^2$.

Сформулируем нужные нам условия на функцию a_0 и поле $\{x(z)\}$.

Функция a_0 является элементом множества K всех функций $a: R^2 \to R$ которые 2π-периодические по обеим переменным и коэффициенты Фурье которых

$$c_{kl}(a) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(s,t)e^{iks}e^{ilt}dsdt\,,\ k,l \in \square\,,\ a \in K$$

удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered}\left|c_{00}(a)\right| \le L, \quad \left|c_{k0}(a)\right|\left|k\right|^{\alpha} \le L, \\ \left|c_{0l}(a)\right|\left|l\right|^{\beta} \le L, \left|c_{kl}(a)\right|\left|k\right|^{\alpha}\left|l\right|^{\beta} \le L, \quad kl \ne 0,\end{gathered} \tag{2}$$

для некоторых действительных $L > 0, \alpha > 3, \beta > 3$.

Множество K компактно относительно равномерной сходимости на плоскости т.е. для любого его элемента существует производная второго порядка на плоскости. Для функции $a \in K$ введем норму $\|a\|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(s,t)\,dsdt$.

Функция $a \in K$ называется внутренней точкой множества K, если неравенства (2) выполняются для некоторого $\tilde{L} < L$.

2. Существует такая постоянная c, что при всех $z \ge 0$ $E(x(z))^2 \le c$.

3. Траектории поля $x(z)$ непрерывно дифференцированы по обеим переменным с вероятностью 1.

4. Поле $\left\{(x(z))^2, z \ge 0\right\}$ стационарно в широком смысле.

Обозначим через $r(s,t)$ корреляционную функцию поля $(x(z))^2$:

$$r(z) = E\left\{\left[x^2(z) - Ex(0)\right]\left[x^2(0) - Ex(0)\right]\right\}$$

5. При некоторых $L_1 > 0$ и $\gamma > 0$ справедливо неравенство

$$\int_0^T\int_0^T \left|r(z)\right| dz \le L_1 T^{1-\gamma}.$$

Для произвольной непрерывно дифференцируемой по z функции $x: R^2 \to C$, при выполнении условий 3 и 4, с помощью формулы интегрирования по частям определим стохастический интеграл

$$I(s,t) = \int_0^s\int_0^t a(u,v)\,x(u,v)\,dB(u,v).$$

При этом

$$E\left[\int_0^S\int_0^T a(u,v)\,x(u,v)\,B(du,dv)\right]^2 \le \tilde{c}_1(H_1,H_2)\|x\|_{L_{\tilde{H}}}$$

$$\le \tilde{c}_1(H_1,H_2)\left(\int_0^S\int_0^T |a(u,v)|^{\frac{1}{H_1H_2}}\,dudv\right)^{2H_1H_2}, \quad \tilde{H}=\min\left(\frac{1}{H_1},\frac{1}{H_2}\right),$$

и к тому же

$$\left(E\left\{\sup_{\substack{a_1\le s\le b_1\\ a_2\le t\le b_2}}\int_{a_1}^{s}\int_{a_2}^{t} a(u,v)\,x(u,v)\,B(dudv)\right\}^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{c}_2(H_1,H_2)\|a(u,v)\|_{L_{\tilde{H}}[0,T]^2}.$$

Вернемся к оцениванию функции a_0. В качестве оценки рассмотрим элемент a_T, который является какой-нибудь функцией из K, максимизирующей функционал

$$Q_T(a)=\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T a(u,v)\,x(u,v)\,dB(u,v)-$$
$$-\frac{1}{2T}\int_0^T\int_0^T a^2(u,v)\,x^2(u,v)\,dudv \qquad (3)$$

на множестве K. Поскольку накладывается условие 1, то максимум функционала Q_T на K достигается и такая оценка существует с вероятностью 1. Функционал Q_T может быть представлен также в виде

$$Q_T(a)=\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T\left[a(u,v)-a_0(u,v)\right]x(u,v)\,dB(u,v)-$$
$$-\frac{1}{2T}\int_0^T\int_0^T\left[a(u,v)-a_0(u,v)\right]^2 x^2(u,v)\,dudv+Q_T(a_0).$$

Лемма 1. Пусть справедливы условия 1 - 4.

$$P\left\{\lim_{T\to\infty}\max_{a\in K}\frac{1}{T^2}\left|\int_0^T\int_0^T a(u,v)\,x(u,v)\,B(dsdt)\right|=0\right\}=1$$

Доказательство. Обозначим

$$\eta_T=\max_{s\in K}\left|\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T a(u,v)\,x(u,v)\,dB(s,t)\right|$$

Из разложения в ряд Фурье получаем

$$E\left\{\eta_T^2\right\}=E\left\{\max_{a\in K}\left(\frac{1}{T^2}\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}c_{jk}\left(a\right)\int_0^T\int_0^T e^{i\left(ju+kv\right)}x\left(u,v\right)dB\left(u,v\right)\right)\right\}\le$$

$$\le E\left\{\left(\left(\frac{1}{T^2}\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{L}{\left|j\right|^{\alpha}}\int_0^T\int_0^T e^{iju}x\left(u,v\right)dB\left(u,v\right)\right]+\right.\right.\right.$$

$$+\frac{1}{T^2}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{L}{\left|k\right|^{\beta}}\int_0^T\int_0^T e^{ikv}x\left(u,v\right)dB\left(u,v\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{T^2}\sum_{\substack{j,k=-\infty\\ j,k\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{L}{\left|j\right|^{\alpha}\left|k\right|^{\beta}}\int_0^T\int_0^T e^{i\left(ju+kv\right)}x\left(u,v\right)dB\left(u,v\right)\right]+$$

$$\left.\left.+\frac{L}{T^2}\int_0^T\int_0^T x\left(u,v\right)dB\left(u,v\right)\right)^2\right\}.$$

Откуда, используя неравенство Коши-Буняковского и свойства стохастического интеграла, получаем что

$$E\left\{\eta_T^2\right\}\le\left\{\frac{1}{T^2}\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\frac{L}{\left|j\right|^{\alpha}\left|k\right|^{\beta}}\left[E\left|\int_0^T\int_0^T e^{i\left(ju+kv\right)}x\left(u,v\right)dB\left(u,v\right)\right|^2\right]\right\}$$

Здесь при $k,\ j=0$ множители $\left|j\right|^{\alpha}$ и $\left|k\right|^{\beta}$, соответственно, заменяются на 1. Таким образом,

$$E\left\{\eta_T^2\right\}\le\frac{cL^2}{T^L\left(1-H_1\right)\left(1-H_2\right)}\left(\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\left|j\right|^{-\alpha}\left|k\right|^{-\beta}\right)^2$$

Выберем p таким образом, чтобы $2p\left(1-H_1\right)\left(1-H_2\right)>1$ и рассмотрим последовательность $T_n=n^p$. Принимая во внимание лемму Бореля – Кантелли получим $P\left\{\lim_{n\to\infty}\eta_{T_n}=0\right\}=1$.

Для T_0 имеем

$$\sup_{T>T_0}\eta_T\le\sup_{n:T_{n+1}>T_0;}\ \sup_{T\in\left[T_n,T_{n+1}\right];}\eta_T$$

$$\sup_{T\in[T_n,T_{n+1}]} \eta_T = \eta_{T_n} + \sup_{T\in[T_n,T_{n+1}]} \left(\eta_T - \eta_{T_n}\right) +$$

$$+ \sup_{T\in[T_n,T_{n+1}]} \max_{a\in K} \left| \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T a(u,v)\, x(u,v)\, dB(u,v) + \right.$$

$$+ \frac{1}{T_n^{\,2}} \int_0^{T_n} \int_0^{T_n} a(u,v)\, x(u,v)\, dB(u,v) - \frac{1}{TT_n} \int_0^T \int_0^{T_n} a(u,v)\, x(u,v)\, dB(u,v) -$$

$$\left. - \frac{1}{TT_n} \int_0^{T_n} \int_0^T a(u,v)\, x(u,v)\, dB(u,v) \right| \le \frac{T_{n+1}^2}{T_n^2} \eta_{T_n} + \zeta_n$$

Отсюда следует, что $\dfrac{T_{n+1}^2}{T_n^2} = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^p$ и $P\left\{ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T^2}{T_n^2} \eta_{T_n} = 0 \right\} = 1$.

Рассмотрим поведение случайной величины ζ_n.

$$E\left(\zeta_n\right)^2 \le \frac{1}{T^2} E \left(\sup_{T\in[T_n,\,T_{n+1}]} \left| \begin{matrix} \displaystyle\int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T} a(u,v)\, x(u,v)\, dB(u,v) \\ \displaystyle + \int_{T_n}^{T} \int_0^{T_n} a(u,v)\, x(u,v)\, dB(u,v) \end{matrix} \right| \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \frac{L}{|j|^{\alpha} |k|^{\beta}} \right)^2 \le$$

$$= c^* \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 \right)^{2H_1H_2}.$$

Это означает, что $P\left\{ \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = 0 \right\} = 1$. Таким образом доказано утверждение

Лемма 2. В условиях 1-6

$$P\left\{ \lim_{T\to\infty} \max_{a\in K} \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T \int_0^T a(u,v)\, x(u,v)\, B(dsdt) \right| = 0 \right\} = 1$$

Замечание 1. В условиях леммы 1

$$P\left\{ \lim_{T\to\infty} \max_{a\in K} \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T \int_0^T \left(a(u,v) - a_0(u,v) \right) x(u,v)\, B(dsdt) \right| = 0 \right\} = 1$$

Лемма 3. [1] Пусть $\left\{\xi(u,v),(u,v)\in R^2\right\}$ - действительное однородное случайное поле со средним $E\xi(u,v)=0$ и ковариационной функцией $r(u,v)=E\left\{\xi(u,v)\xi(0,0)\right\}$, $(u,v)\in R^2$, такой, что для всех $T>1$ справедливо неравенство

$$\int_0^T\int_0^T\left|r(u,v)\right|dudv\le LT^{1-\delta}$$

с некоторыми положительными L и δ. Тогда

$$P\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\left|\int_0^T\int_0^T a(u,v)\,\xi(u,v)\,dudv\right|=0\right\}=1.$$

Теорема 1. В условиях 1 – 6 справедливо соотношение

$$P\left\{\lim_{T\to\infty}\sup_{(s,t)\in R^2}\left|a_T(s,t)-a_0(s,t)\right|=0\right\}=1$$

Доказательство. По определению оценки a_T $Q_T(a_T)=\sup\limits_{a\in K}Q_T(a)$, поэтому $Q_T(a_T)\ge Q_T(a_0)$, откуда получаем неравенство

$$Q_T(a_T)-Q_T(a_0)=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\left[a_T(s,t)-a_0(s,t)\right]x(s,t)\,B(ds,dt)-$$

$$-\frac{1}{2T^2}\int_0^T\int_0^T\left[a_T(s,t)-a_0(s,t)\right]^2x^2(s,t)\,dsdt\ge 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\max_{a\in K}\left|\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\left[a_T(s,t)-a_0(s,t)\right]x(s,t)\,B(ds,dt)\right|+$$

$$+\max_{a\in K}\left|\frac{1}{2T^2}\int_0^T\int_0^T\left[a_T(s,t)-a_0(s,t)\right]^2\left[x^2(s,t)-Ex^2(0,0)\right]dsdt\right|\ge$$

$$\ge\frac{Ex^2(0,0)}{2T^2}\int_0^T\int_0^T\left[a_T(s,t)-a_0(s,t)\right]^2dsdt\ . \tag{4}$$

Оба слагаемых левой части неравенства (4) стремятся к 0 при $T\to\infty$ с вероятностью 1: первое в силу леммы 1, а второе в силу леммы 2. Поэтому

$$P\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\left[a_T(s,t)-a_0(s,t)\right]^2 dsdt=0\right\}=1. \quad (5)$$

Таким образом, имеем

$$P\left\{\lim_{T\to\infty}\left\|a_T(s,t)-a_0(s,t)=0\right\|\right\}=1.$$

Используя компактность множества K относительно равномерной сходимости и неравенство Гельдера из (5), получаем утверждение теоремы.

О.М. Дерієва, С.П.Шпига, О.П.Кнопов

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРУ ЗНОСУ СДР НА ПЛОЩИНІ З ДРОБОВИМ БРОУНІВСКИМ РУХОМ

Розглядається стохастичне диференційне рівняння на площині з дробовим броунівським рухом. Вивчаються властивості оцінки максимальної вірогідності параметру зносу, для обмеженого класу функцій спеціального вигляду доведено сильна стійкість.

O.M.Driyeva, S.P.Shpyga, O.P.Knopov

ON SOME PROPERTIES OF AN ESTIMATOR FOR THE DRIFT COEFFICIENT OF A STOCHACTIC DIFFERENTIAL EQUATION ON THE PLANE WITH FBM

A stochastic differential equation with respect to fBm on the plane is considered. We study the maximum likelihood estimator for the drift coefficient. We assume that the coefficient belongs to a given compact set of functions and prove the strong consistency of the estimator.

1. *Kasyts'ka E.I., Knopov P.S.* Asymptotic Properties of an Estimator for the Drift Coefficient of a Stochastic Differential Equation with Fractional Brownian Motion. // Theor. Probability and Math. Statist. – 2009. – **79**. – P. 73-81.
2. *Zähle M*., Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. // Probab. Theory Relat. Fields. – 1998. – **III**. – P. 333–374.
3. Mémin J., Mishura Yu., and Valkeila E. Inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to a fractional Brownian motion. // Statist. Probab. Lett. – 2001. – **51**. – P. 197–206.
4. Krvavych Yu. V., Mishura Yu. S. Some maximal inequalities for moments of Wiener integrals with respect to fractional Brownian motion. // Teor. Imovir.Mat. Stat. – 2000. – 61. – P. 75–86.

Получено 14.05.2012