УДК 519.8
УДК 519.8

А.Г. ДОНЕЦ, И.Э. ШУЛИНОК

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ОБРАЗОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХЦВЕТНОЙ МОЗАИКИ

Рассматривается проблема построения линейной мозаики для двухцветных шаблонов. Сначала рассматриваются два шаблона, а затем произвольное их количество. Составляются соответствующие линейные уравнения и приводится их решение.

Введение. В данной статье продолжается изучение двухцветных мозаик [1]. Зная алгоритм построения любой единицы, покажем, как при этом получить решение для произвольной правой части системы (3) из [1].

Для удобства изложения рассмотрим пример 1 с параметрами

$$S = \{5,8\},\ n = 11,\ B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

Обозначим переменные для первого шаблона x_i $(i = 1,2,\dots,n+1-s_1)$, для второго шаблона – x_{s_2+j} $(j = 1,2,\dots,n+1-s_2)$, где i и j координаты в строке меток соответствующих шаблонов. Тогда система (3) примет конкретный вид

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
x_1+ & & & & & & & x_9 & & & & = b_1 \\
x_1+ & x_2+ & & & & & & x_9+ & x_{10} & & & = b_2 \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & & & & & x_9+ & x_{10}+ & x_{11} & & = b_3 \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & & & & x_9+ & x_{10}+ & x_{11}+ & x_{12} & = b_4 \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & & & x_9+ & x_{10}+ & x_{11}+ & x_{12} & = b_5 \\
 & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & & x_9+ & x_{10}+ & x_{11}+ & x_{12} & = b_6 \\
 & & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_9+ & x_{10}+ & x_{11}+ & x_{12} & = b_7 \\
 & & & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_9 & x_{10}+ & x_{11}+ & x_{12} & = b_8 \\
 & & & & x_5+ & x_6+ & x_7+ & & x_{10}+ & x_{11}+ & x_{12} & = b_9 \\
 & & & & & x_6+ & x_7+ & & & x_{11}+ & x_{12} & = b_{10} \\
 & & & & & & x_7+ & & & & x_{12} & = b_{11}
\end{array}\right\} \bmod . \qquad (1)$$

Отметим особенности общей системы для двух шаблонов. Она естественным образом по столбцам делится на две подобные части. Левая часть состоит из $s_2 - 1$ столбцов, в каждом из которых ровно s_1 переменных. Все столбцы одинаковы, но сдвигаются вниз ровно на одну позицию по отношению к предыдущему. Аналогично, правая часть состоит из $s_1 - 1$ столбцов, в которых ровно s_2 переменных.

В системе отсутствует переменная x_{s_2}. В строке s_1 переменных первого шаблона на одну больше, а переменных второго шаблона – одинаковое число. Тоже самое можно сказать и про строку $n+2-s_1$. Пусть $b_0 \equiv b_{12} \equiv 0 \pmod 2$. Начиная со второй строки, прибавим к ней предыдущую по $\bmod 2$. В результате получим новую систему в которой все строки, за исключением указанных выше, будут иметь по одной переменной от каждого шаблона, а в строках s_1 и $n+2-s_1$ ровно по одной переменной от первого шаблона. И добавим в систему последнее уравнение из (1)

$$\left.\begin{array}{cccccccccccl}
x_1+ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & +\,x_9 & \square & \square & \square & = b_0+b_1 \\
\square & x_2+ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & +\,x_{10} & \square & \square & = b_1+b_2 \\
\square & \square & x_3+ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & +\,x_{11} & \square & = b_2+b_3 \\
\square & \square & \square & x_4+ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & +\,x_{12} & = b_3+b_4 \\
\square & \square & \square & \square & x_5+ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & = b_4+b_5 \\
x_1+ & \square & \square & \square & \square & x_6+ & \square & \square & \square & \square & \square & = b_5+b_6 \\
\square & x_2+ & \square & \square & \square & \square & x_7+ & \square & \square & \square & \square & = b_6+b_7 \\
\square & \square & x_3 & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & = b_7+b_8 \\
\square & \square & \square & x_4+ & \square & \square & \square & +\,x_9 & \square & \square & \square & = b_8+b_9 \\
\square & \square & \square & \square & x_5+ & \square & \square & \square & +\,x_{10} & \square & \square & = b_9+b_{10} \\
\square & \square & \square & \square & \square & x_6+ & \square & \square & \square & +\,x_{11} & \square & = b_{10}+b_{11} \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & x_7+ & \square & \square & \square & +\,x_{12} & = b_{11}+b_{12}
\end{array}\right\} \bmod 2 \, . \qquad (2)$$

Получим непосредственное решение $x_5 \equiv (b_4+b_5) \pmod 2$ и $x_3 \equiv (b_7+b_8) \pmod 2$. Подставляя эти значения в остальные уравнения, находим полное решение системы (2).

Теорема 1. Решением системы (2) есть

$$x_i \equiv \sum_{j=1}^{\lambda} \left(b_\gamma + b_{\gamma-1}\right) \pmod 2 . \qquad (3)$$

*Доказательство***.** Будем рассуждать по индукции. Для x_{s_1} получаем $\lambda = s_1 \cdot s_1^{-1} [\bmod\ (s_1+s_2)] = 1$ и $x_{s_1} \equiv \left(b_{s_1} + b_{s_1 - 1}\right) \pmod 2$ или конкретно $x_5 \equiv (b_5+b_4) \bmod 2$.

Переменная x_5 встречается ниже на 5 позиций. Подставляя сюда значение x_5, получаем решение для x_{10}. Для него $\lambda = 2 \cdot s_1 \cdot s_1^{-1} [\bmod\ (s_1+s_2)] = 2$. Получаем $x_{10} \equiv (b_4+b_5+b_9+b_{10}) \pmod 2$. Дальше, поднимаясь на 8 позиций вверх, и подставляя значение x_{10}, получаем решение для x_2. Таким образом, получаем последовательное движение либо вниз на s_1 позиций (при этом индексы увеличиваются на s_1), либо вверх на s_2 позиций (при этом индексы уменьшаются на s_2). Но $-s_2 \equiv s_1 [\bmod (s_1+s_2)]$, то есть в классе вычетов получается каждый раз увеличение индекса на s_1.

В результате выражение ts_1, когда t пробегает все значения от 1 до s_1+s_2-2, пробегает все индексы переменных, а при $t = s_1+s_2-2$ получаем

$i = s_1(s_1 + s_2 - 1) \equiv -s_1 \equiv s_2 [\mathrm{mod}\,(s_1 + s_2)]$. Но у нас переменная x_{s_2} отсутствует. А предыдущая переменная имела индекс $i = s_1(s_1 + s_2 - 2) \equiv -2s_1 [\mathrm{mod}\,(s_1 + s_2)]$. Для нашего примера это $-2 \cdot 5 \equiv 3(\mathrm{mod}\,13)$. И для него справедливо

$$x_3 \equiv \sum_{\substack{j-1 \\ j \neq 8}}^{11} (b_j + b_{j-1})(\mathrm{mod}\ 2) \equiv (b_7 + b_8)(\mathrm{mod}\ 2),$$

что совпадает с непосредственным равенством в (2). Это и завершает доказательство теоремы.

Пример 2. Построение образа $B = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$ для этих решений приведено на рис. 1.

Согласно теореме имеем:

$x_5 = b_4 + b_5 = 0;$ $x_9 = x_4 + b_8 + b_9 = 1;$ $x_{10} = x_5 + b_9 + b_{10} = 0;$

$x_1 = x_9 + b_0 + b_1 = 1;$ $x_2 = x_{10} + b_1 + b_2 = 1;$ $x_6 = x_1 + b_5 + b_6 = 1;$

$x_7 = x_2 + b_6 + b_7 = 0;$ $x_{11} = x_6 + b_{10} + b_{11} = 1;$ $x_{12} = x_7 + b_{11} + b_{12} = 1;$

$x_3 = x_{11} + b_2 + b_3 = 1;$ $x_4 = x_{12} + b_3 + b_4 = 0$.

Напомним, что переменные x_j для $j > 8$ отвечают второму шаблону с метками $j - 8$.

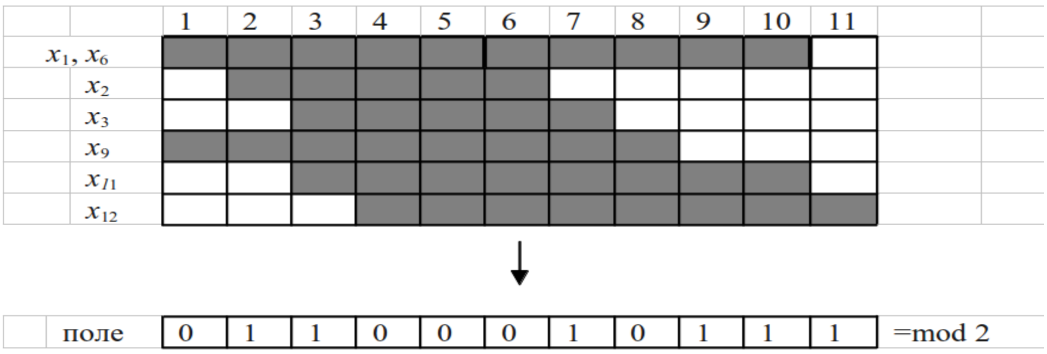

РИС.1. Построение образа B

Так решается проблема для двух шаблонов при заданных двух цветах. Если $s_1 + s_2 > n + 2$, то некоторые образы построить невозможно. В этом случае число уравнений больше числа переменных, что накладывает ограничения на правые части системы уравнений (3) [1]. Если они не выполняются, система не имеет решений. Здесь могут быть два принципиально отличающиеся случая в зависимости от значений s_1. Рассмотрим

Пример 3. Пусть $s_1 = 7$, $s2 = 8$, $n = 10$. Число переменных для первого шаблона, равно 10 + 1 – 7 = 4, для второго – 10 + 1 – 8 = 3. Обозначим их $x_i(i = 1,2,3,4)$ и $x_j(i = 1,2,3)$. Составим для них систему типа (3) [1]. Здесь

$s_1 = 7 \geq \frac{n}{2} + 1 = 6$. Это приводит к тому, что число переменных для первого шаблона $4 < s_1$. Система имеет матрицу размером 7×10 и её переменные образуют два касающихся параллелограмма, в каждом из которых левые нижние вершины находятся ниже правых верхних вершин. Если взять в качестве координат вершин номер столбца и номер строки матрицы системы уравнений, то для первого параллелограмма получим такие координаты вершин $(1;1)$, $(n+1-s_1; n+1-s_1)$, $(n+1-s_1; n)$ и $(1; s_1)$, или (1;1), (4;4), (4;10) и (1;7). Поскольку $n+1-s_1 < s_1$ (то же имеет место и для второго шаблона), то матрица системы содержит одинаковые строки, начиная со строки $n+1-s_1$ и кончая строкой s_1

$$\left.\begin{array}{llllllll}
x_1 + & & & & y_1 + & & & = b_1 \\
x_1 + & x_2 + & & & y_1 + & y_2 + & & = b_2 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & & y_1 + & y_2 + & y_3 & = b_3 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & y_1 + & y_2 + & y_3 & = b_4 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & y_1 + & y_2 + & y_3 & = b_5 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & y_1 + & y_2 + & y_3 & = b_6 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & y_1 + & y_2 + & y_3 & = b_7 \\
 & x_2 + & x_3 + & x_4 + & y_1 + & y_2 + & y_3 & = b_8 \\
 & & x_3 + & x_4 + & & y_2 + & y_3 & = b_9 \\
 & & & x_4 + & & & y_3 & = b_{10}
\end{array}\right\} \bmod 2 . \qquad (4)$$

Здесь четыре одинаковых строки в матрице системы: 4, 5, 6 и 7, и определитель этой системы равен $0(\bmod 2)$. Поэтому для существования решения системы необходимо, чтобы $b_4 = b_5 = b_6 = b_7$. Если удалить из системы три зависимые строки, то получим систему такого вида

$$\left.\begin{array}{llllllll}
x_1 + & & & & y_1 + & & & = b_1 \\
x_1 + & x_2 + & & & y_1 + & y_2 + & & = b_2 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & & y_1 + & y_2 + & y_3 & = b_3 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & y_1 + & y_2 + & y_3 & = b_4 \\
 & x_2 + & x_3 + & x_4 + & y_1 + & y_2 + & y_3 & = b_8 \\
 & & x_3 + & x_4 + & & y_2 + & y_3 & = b_9 \\
 & & & x_4 + & & & y_3 & = b_{10}
\end{array}\right\} \bmod 2 \qquad (5)$$

Эта система имеет размеры 7×7 и решается указанным выше способом для $n = 7$ и $S = \{4, 5\}$.

Если условие $s_1 \geq \frac{n}{2} + 1$ не выполняется, то определитель этой системы также равен $0(\bmod 2)$, но найти зависимые строки в системе сложнее.

Если $s_1 + s_2 < n+1$, то появляется множество решений, так как путём сдвига шаблонов, которые являются базисом для $s_1 + s_2 = n+1$, можно получить базис для больших значений n.

Вопрос о числе шаблонов больше двух решается аналогично. Пусть задано p шаблонов. Будем считать их упорядоченными по возрастанию. Очевидно, что для них также должно выполняться условие

$$\text{НОД}\left(s_{1,} s_{2,} \ldots, s_p\right) = 1 . \qquad (6)$$

Кроме того система типа (3) должна всегда иметь n переменных, чтобы решение было единственным. Но каждый шаблон может иметь $n+1-s_t$ переменных. Поэтому необходимо

$$\sum_{i=1}^{p}\left(n+1-s_i\right) = n ,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{p}\left(s_i\right) = (p-1)n + p . \qquad (7)$$

Эти условия являются необходимыми. Вопрос о конкретном методе решения задачи для более двух шаблонов остается открытым. Возьмём для начала $p=3$. Если среди них найдутся два взаимно простых шаблона, то составляем систему типа (3) для этих шаблонов и решаем задачу по теореме 1. Если из трёх шаблонов каждые два имеют общий делитель, а все вместе удовлетворяют условию (6), тогда составляем систему (3) для трёх шаблонов. Пусть существуют три неравных между собой множителя α_1, α_2 и α_3. Тогда $s_1 = \alpha_1 \cdot \alpha_2$, $s_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_3$ и $s_3 = \alpha_2 \cdot \alpha_3$ удовлетворяют условию (6). Если брать произвольные множители, то не всегда удовлетворяется условие (7), поэтому простейший подходящий пример содержит достаточно большие числа, не дающие возможности наглядно представить систему типа (3). Пусть, например, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ и $\alpha_3 = 5$. Тогда $s_1 = 6$, $s_2 = 10$ и $s_3 = 15$. Из (5) следует, что

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{p} s_i - p}{p-1} > s_i \; ; \quad i = 1,2,\ldots,p. \qquad (8)$$

Получаем $n = \dfrac{6+10+15-3}{2} = 14 < s_3$, что недопустимо. Однако, значения s_i не могут быть произвольными. Возьмём, например, $s_1 = 10$, $s_2 = 15$ и $s_3 = 18$. Эти значения подходят для (8), так как при этом $n = 20$. Каждому шаблону соответствует $n+1-s_i$ положений на поле или такое же количество переменных. Если подставить значение $p=3$ в (8), то получим

$$s_i + s_j < s_k - 2, \quad i, j, k \in \{1,2,3\}. \qquad (9)$$

Однако, даже если удовлетворяются все условия (7 – 9), то не всегда существует решение системы типа (3).

Лемма 1. Если $s_1 \geq \frac{n}{2}+1$, то система типа (3), составленная для p шаблонов, удовлетворяющих условиям (7 – 9), имеет матрицу А, у которой $detA \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)$.

*Доказательство***.** Система типа (4) для p шаблонов будет состоять из p параллелограммов. Так как $s_1 \geq \frac{n}{2}+1$, то в первом параллелограмме левая нижняя вершина будут находиться ниже правой верхней. Поскольку $s_1 < s_i$ для $i > 1$, то это справедливо и для остальных параллелограммов. А это обеспечивает совпадение строк матрицы системы, начиная от строки $n+1-s_1$ и кончая строкой s_1, что и дает значение $detA \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)$.

Заключение. Полученные результаты показывают, что задача построения линейной мозаики на двухцветных шаблонах может быть решена путём составления и решения систем уравнений по модулю 2.

А.Г. Донець, І.Е. Шулінок

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ОБРАЗІВ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ДВОКОЛЬОРОВОЇ МОЗАЇКИ

Розглядається проблема побудови лінійної мозаїки для двокольорових шаблонів. Спочатку розглядаються два шаблони, потім довільна їх кількість. Складаються відповідні лінійні рівняння та наводиться їх розв'язок.

A.G. Donets, I.E. Shulinok

A SOLUTION OF DUAL COLOR LINEAR MOSAIC CONSTRUCTION PROBLEM

The problem of construction of the linear mosaic for dual color templates is considered. Two templates are considered first, then variable templates number. Appropriate linear equations are compounded and solved then.

1. *И.Э.Шулинок.* Проблемы построения двухцветной линейной мозаики // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2010. – С. 126-135.

Получено 11.05.2012