УДК 519.8

Н.В. СЕМЕНОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ОГРАНИЧЕНИЯМ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ВЫПУКЛЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Исследованы различные типы устойчивости векторных целочисленных оптимизационных задач поиска множества Парето, имеющих выпуклые квадратичные функции ограничений, к возмущениям исходных данных ограничений. Сформулированы необходимые и достаточные условия различных типов устойчивости по ограничениям, проанализированы соотношения между ними. Определены некоторые структурные и топологические свойства пространства исходных данных задачи, при которых сохраняется различного вида оптимальность решений.

Введение. Статья посвящена некоторым вопросам качественной теории дискретной оптимизации, предназначенным для решения проблем устойчивости векторных задач к возможным возмущениям исходных данных. Современный интерес к исследованию проблем корректности многокритериальных моделей обусловлен в значительной степени их широким применением для решения важных задач экономики, управления, экологии, проектирования различных сложных систем, принятия решений в условиях неопределенности и многих др. Существует достаточно много оптимизационных, в том числе дискретных задач, для которых сколь угодно малые ошибки в исходных данных порождают значительные искажения истинного искомого решения. В связи с этим представляется особенно важным выделять такие классы задач, в которых малым изменениям исходных данных соответствуют малые изменения конечных результатов.

При проверке корректности некоторой оптимизационной модели относительно конкретной практической ситуации, прежде всего, важно знать границы множеств входных параметров модели, при которых не изменяется решение оптимизационной задачи. Во-вторых, появляется возможность построения высокоэффективных алгоритмов решения дискретных оптимизационных задач на основе результатов, полученных при исследовании соответствующих подмножеств пространства исходных данных. В частности, решая некоторую задачу, можно получить решение целого семейства задач, которые находятся в области устойчивости этой задачи, что особенно важно, если приходится решать последовательности задач, незначительно отличающиеся друг от друга.

Постановка задачи. Определения различных типов устойчивости

Рассмотрена задача векторной целочисленной оптимизации следующего вида: $Q_P(F, X)$: $\max\{F(x) \mid x\in X\}$, где $F(x)=(f_1(x),\ldots,f_\ell(x))$ – векторный критерий, определенный на множестве $X=G\cap Z^n$; $X\neq\varnothing$; $f_i : R^n \to R,\quad i\in N_l=\{1,...,l\}$, Z^n – множество n-мерных целочисленных векторов из R^n, G – ограниченное множество в R^n вида

$$G=\{x\in R^n \mid g_i(x)\le 0, i\in N_m\}, \tag{1}$$

$g_i(x)=\langle D_i x, x\rangle+\langle c_i, x\rangle+b_i\le 0,\ i\in N_m$, параметры $b_i\in R^n$, $c_i\in R^n, D_i\in R^{n\times n}$, D_i – симметричные неотрицательно определенные матрицы для всех $i\in N_m$.

Множество решений задачи $Q_P(F, X)$ обозначим $P(F, X)$, а элементы этого множества будем традиционно называть Парето-оптимальными либо эффективными решениями. Очевидно, что $\forall x\in X$: $x\in P(F, X)\Leftrightarrow \pi(x)=\varnothing$, $\pi(x, F, X)=\{y\in X \mid F(y)\ge F(x),\ F(y)\neq F(x)\}$.

Под исследованием устойчивости векторной оптимизационной задачи обычно понимают изучение поведения множества Парето-оптимальных (эффективных) решений при небольших возмущениях исходных данных задачи.

Продолжая исследования, отраженные в работах [1–3], здесь представлены результаты сравнительного изучения различных подходов к определению понятия устойчивости для векторной задачи целочисленной оптимизации с выпуклыми квадратичными функциями ограничений и ограниченным множеством допустимых решений. Рассмотрены пять известных типов устойчивости оптимизационных задач, по-разному описывающих такую ситуацию, при которой малым изменениям входных параметров задачи соответствуют малые изменения выходных результатов. Характеристика каждого типа устойчивости может быть представлена в терминах существования такой окрестности исходных данных задачи в пространстве всех ее возможных исходных данных, что множество оптимальных решений любой возмущенной задачи с исходными данными из этой окрестности обладает некоторым заданным свойством устойчивости по отношению к множеству оптимальных решений первоначальной задачи.

Для задачи $Q_P(F,X)$ в качестве исходных данных, которые могут быть подвергнуты возмущениям, будем рассматривать коэффициенты ограничений. Обозначим $D=(D_1,\ldots,D_m)$, $C=[c_{ij}]\in R^{m\times n}$, где $(c_{i1},\ldots,c_{in})=c_i$, $i\in N_m$. Данные $u=(D,C,b)$ являются элементом пространства $U\subset R^{n\times n\times m}\times R^{m\times n}\times R^m$ исходных данных задачи. Предполагается, что пространство U наделено нормой. Для произвольного вектора $v=(v_1,\dots,v_m)\in R^m$ зададим норму $\|v\|=\sum_{i\in N_m}|v_i|$. Под нормой любой матрицы $A=[a_{ij}]\in R^{m\times n}$ будем понимать норму вектора $(a_{11}, a_{12},\dots, a_{mn})$.

Для данных $u=(D,C,b)\in U$ и произвольного числа $\delta>0$ определим множество $O_\delta(u)=\{u(\delta)\in U \mid \max_{i\in N_m}\|D_i(\delta)-D_i\|<\delta, \|C(\delta)-C\|<\delta, \|b(\delta)-b\|<\delta\}$, где

$u(\delta)=(D(\delta),C(\delta),b(\delta))$, $D(\delta)=(D_1(\delta),\dots,D_m(\delta))$, $D_i(\delta)\in R^{n\times n}, i\in N_m, C(\delta)=[c_{ij}(\delta)]\in R^{m\times n}$, $b(\delta)\in R^m$. Для любых $\delta>0$ и $u(\delta)\in O_\delta(u)$ рассмотрим возмущенное допустимое множество $X(\delta)=\left\{x\in Z^n \mid \langle D_i(\delta)x,x\rangle+\langle c_i(\delta),x\rangle+b_i(\delta)\le 0, i\in N_m\right\}$, где

$c_i(\delta)=(c_{i1}(\delta),\dots,c_{in}(\delta))$, $i\in N_m$. Введем следующие определения.

Задачу $Q_P(F, X)$ назовем T_1-устойчивой по ограничениям, если существует число $\delta>0$, такое, что $\forall\ u(\delta)\in O_\delta(u)$ $P(F, X)\cap P(F, X(\delta))\neq\varnothing$; T_2-устойчивой по ограничениям, если $\exists\delta>0$ и $\exists\ x\in P(F, X)$, такие, что $\forall\ u(\delta)\in O_\delta(u)$ $x\in P(F, X(\delta))$; T_3-устойчивой по ограничениям, если существует $\delta>0$, такое, что $\forall\ u(\delta)\in O_\delta(u)$ $P(F, X(\delta))\subseteq P(F, X)$; T_4-устойчивой по ограничениям, если $\exists\ \delta>0$, такое, что $\forall u(\delta)\in O_\delta(u)$ $P(F, X)\subseteq P(F, X(\delta))$; T_5-устойчивой по ограничениям, если $\exists\ \delta>0$, такое, что $\forall u(\delta)\in O_\delta(u)$ $P(F, X)=P(F, X(\delta))$.

Из определений видно, что из T_2-устойчивости по ограничениям задачи следует ее T_1-устойчивость, а T_5-устойчивая по ограничениям задача является одновременно T_3- и T_4-устойчивой по ограничениям. Отметим, что свойство T_3-устойчивости (T_4 -, T_5 - устойчивости) по ограничениям задачи $Q_P(F, X)$ является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху (соответственно полунепрерывности снизу, непрерывности) по Хаусдорфу точечно-множественного отображения $P(D,C,b)\colon R^{n\times n\times m}\times R^{m\times n}\times R^m \to 2^X$, $(D,C,b)\to P(F, X(D, C, b))$.

Точку $x\in P(F,X)$ назовем устойчивым по ограничениям эффективным решением, если существует число $\delta>0$, такое, что $\forall u(\delta)\in O_\delta(u)$ $x\in P(F,X(\delta))$, а точку $x\in X\setminus P(F,X)$ назовем устойчивым по ограничениям неэффективным решением, если существует число $\delta>0$, такое, что $\forall u(\delta)\in O_\delta(u)$ $x\notin P(F,X(\delta))$, т.е. $x\in X(\delta)\setminus P(F,X(\delta))$.

Подмножество всех устойчивых по ограничениям точек множества $P(F,X)$ будем называть ядром его устойчивости по ограничениям или ядром устойчивости по ограничениям задачи $Q_P(F, X)$ и обозначать

$\mathrm{Ker}(P(F, X)) =\{x\in P(F, X) \mid \exists\ \delta>0\ \forall u(\delta)\in O_\delta(u)\colon (x\in P(F, X(\delta))\}$.

Определение условий устойчивости в смысле введенных определений основывается на установлении ряда фактов, касающихся следующих вопросов:

существование окрестности $O_\delta(u)$ точки u такой, что задача $Q_P(F, X)$ разрешима $\forall u \in O_\delta(u)$, ограниченность множества $\bigcup_{\delta\in(0,\delta_0]} X(\delta)$, для некоторого $\delta_0>0$.

Утверждение 1. Пусть $x\in X$ и $\exists i\in N_m: g_i(x)<0$, тогда $\forall\delta\ \left(0<\delta\le\lambda_i(x)\right)$, где $\lambda_i(x)=\left|\left\langle D_i x,x\right\rangle\right|/\left(\|x\|^2+\|x\|+1\right)$ $\forall u\in O_\delta(u)$ справедливо неравенство $g_i^{(\delta)}(x)<0$.

Доказательство. Используя неравенство Коши – Буняковского $\forall i\in N_m$, такого, что $g_i(x)<0$, и для любого $u\in O_\delta(u)$ оценим значение функции

$g_i^{(\delta)}(x)=\left\langle D_i(\delta)x,x\right\rangle+\left\langle c_i(\delta),x\right\rangle+b_i(\delta)=$

$=\left\langle D_i x,x\right\rangle+\left\langle c_i,x\right\rangle+b_i+\left\langle \Delta D_i x,x\right\rangle+\left\langle \Delta c_i,x\right\rangle+\Delta b_i\le g_i(x)+\|x\|^2\|\Delta D_i\|+\|x\|\|\Delta c_i\|+$

$+\|\Delta b_i\|<g_i(x)+\delta\left(\|x\|^2+\|x\|+1\right)$. Выбрав $0<\delta\le\lambda_i(x)$, приходим к $g_i^{(\delta)}(x)<0$.

Утверждение 2. Если множество G является непустым ограниченным выпуклым множеством вида (1) , то существует такое число $\delta_0>0$, что для любого $\delta\in[0,\delta_0]$ все множества $X(\delta)$ ограничены в совокупности, хотя некоторые из $X(\delta)$ могут быть пустыми.

Доказательство. Так как функции ограничений множества G являются выпуклыми полиномами второй степени, то по лемме 5 [4, с.82] рецессивный конус $0^+(G)$ множества G задается конечной системой линейных однородных неравенств, т.е. является многогранным, следовательно сопряженный ему конус также многогранный. Исходя из теоремы 8.4 [5], непустое замкнутое выпуклое множество G является ограниченным тогда и только тогда, когда его рецессивный конус $0^+(G)$ состоит лишь из нулевого вектора. Поскольку конус $0^+(G)=\{0\}$, то сопряженный ему конус $(0^+(G))^*=R^n$. В силу леммы 8.7 [6], если многогранный конус $(0^+(G))^*$ совпадает с пространством R^n, то существует такое число $\delta_0>0$, что для любого $\delta\in[0,\delta_0]$ возмущенный конус $(0^+(G(\delta)))^*$ также совпадает с R^n, откуда следует, что конус $0^+(G(\delta))=\{0\}$, и, таким образом, множества $G(\delta)$ ограничены в совокупности. Теорема доказана.

Утверждение 3. $\exists\delta>0$, такое, что $\forall u(\delta)\in O_\delta(u)$: $\operatorname{int} G\bigcap Z^n\subset X(\delta)\subset X$.

Доказательство. Докажем сначала, что существует $\delta>0$, такое, что $\forall u(\delta)\in O_\delta(u)$ выполняется включение $X(\delta)\subset X$. Предположим от противного, что $\forall\delta>0\ \ \exists\ u(\delta)\in O_\delta(u)$ и $\exists\, x(\delta)=(x_1(\delta),...,x_n(\delta))\in X(\delta)\setminus X$. Согласно теореме 1 существует такое $\delta_0>0$, при котором множество $\bigcup_{\delta\in(0,\delta_0]} X(\delta)$ ограничено и, следовательно, конечно. Тогда конечным является и его подмножество $\{x(\delta):\delta\in(0,\delta_0]\}$, из которого можно выделить сходящуюся и, более того, стационарную последовательность $\{x(\delta_r):r\in N\}$, удовлетворяющую условию

$\lim\limits_{r\to\infty} \delta_r = 0$. Таким образом, $\exists \bar{x} = (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) = \lim\limits_{r\to\infty} x(\delta_r)$ и $\exists r_0 \in N$ такие, что $\forall r \in N(r \geq r_0) : \bar{x} = x(\delta_r)$. Следовательно, $\bar{x} \in \bigcap\limits_{r\geq r_0} X(\delta_r) \setminus X$. Однако от неравенств $\langle D_i(\delta_r)\bar{x},\bar{x}\rangle + \langle c_i(\delta_r),\bar{x}\rangle + b_i(\delta_r) \leq 0, i \in N_m$, справедливых для всех $r \geq r_0$, можно при $r \to \infty$ перейти к неравенствам $\langle D_i\bar{x},\bar{x}\rangle + \langle c_i,\bar{x}\rangle + b_i \leq 0, i \in N_m$ и включению $\bar{x} \in X$, что противоречит сделанному выше заключению и тем самым завершает первую часть доказательства данного утверждения.
Теперь покажем, что $\exists \delta > 0,$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ имеет место включение $\operatorname{int} G \cap Z^n \subset X(\delta)$. Предположим $\operatorname{int} G \cap Z^n \neq \varnothing$, иначе утверждение очевидно. Пусть $0 < \delta_1 \leq \min\left\{\lambda_i(x) = \langle D_i x, x\rangle / \left(\|x\|^2 + \|x\| + 1\right) \mid x \in \operatorname{int} G \cap Z^n, i \in N_m\right\}$. Учитывая утверждение 1, можно показать, что $\operatorname{int} G \cap Z^n \subset X(\delta_1),$ а выбрав число $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ нетрудно убедиться в справедливости данного утверждения.

Следствие 1. Все точки множества $\operatorname{int} G \cap Z^n$ устойчивы.

Утверждение 4. Точка $x \in P(F, X)$ является устойчивым по ограничениям эффективным решением задачи $Q_P(F,X) \Leftrightarrow x \in P(F, X) \cap \operatorname{int} G.$

Следствие 2. $\operatorname{Ker}(P(F, X)) = P(F, X) \cap \operatorname{int} G.$

Необходимые и достаточные условия всех перечисленных типов устойчивости по ограничениям задачи $Q_P(F,X)$

Теорема 1. $P(F, X) \cap \operatorname{int} G \neq \varnothing \Leftrightarrow$ задача $Q_P(F,X)$ как T_1 -, так и T_2-устойчива по ограничениям.

Доказательство. Покажем, что из T_1- устойчивости по ограничениям следует $P(F, X) \cap \operatorname{int} G \neq \varnothing$. Предположим от противного, что $P(F,X) \subset \operatorname{Fr} G$, т.е. $\forall x \in P(F, X) \exists i(x) \in N_m$: $g_i(x)=0$. Тогда $\forall \delta>0 \ \exists \ u(\delta)=(D,C,b(\delta)) \in O_\delta(u)$: $b(\delta)<b$ и $P(F,X) \subset X \setminus X(\delta) \subset X \setminus P(F,X(\delta))$, т.е. $P(F,X) \cap P(F, X(\delta)) = \varnothing.$ Пришли к противоречию с условием T_1- устойчивости. Следуя определениям задача T_2 -устойчива по ограничениям тогда и только тогда, когда $Ker(P(F, X)) \neq \varnothing$, по следствию 2 для этого необходимо и достаточно выполнение неравенства $P(F, X) \cap \operatorname{int} G \neq \varnothing$. Учитывая, что из T_2- устойчивости по ограничениям задачи $Q_P(F, X)$ следует ее T_1- устойчивость, приходим к выводу об эквивалентности понятий T_1- и T_2 -устойчивости по ограничениям. Теорема доказана.

Из утверждения 3 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. $P(F, X) = X \Longrightarrow$ задача $Q_P(F, X)$ T_3 - устойчива по ограничениям.

Теорема 3. $P(F,X) \subseteq \operatorname{int} G \Longrightarrow$ задача $Q_P(F, X)$ T_3 -устойчива по ограничениям. Доказательство следует из внешней устойчивости множества $P(F, X)$.

Утверждение 5. Задача $Q_P(F,X)$ T_3-устойчива по ограничениям тогда и только тогда, когда множество $X \setminus P(F,X)$ не содержит неустойчивых по ограничениям неэффективных решений.

Доказательство несложно получить из определений устойчивости неэффективных решений, T_3 - устойчивости по ограничениям задачи $Q_P(F, X)$ и утверждения 3.

Напомним некоторые определения [7].

Функция $f(x)$ называется псевдовыпуклой на множестве $D(f)$, если для любых точек x_1, $x_2 \in D(f)$ из условия $f(x_2) < f(x_1)$ следует справедливость условия $(x_2 - x_1)\nabla f(x_1) < 0$. Если $f(x)$ псевдовыпуклая функция, то $-f(x)$ − псевдовогнутая.

Теорема 4. Если все частичные критерии $f_1,\ldots,f_\ell$ – псевдовогнутые функции, то любое неэффективное решение $x \in X \setminus P(F,X)$ устойчиво по ограничениям тогда и только тогда, когда

$$\pi(x,F,X) \cap \mathrm{int}G \neq \varnothing. \qquad (2)$$

Доказательство. Достаточность. Предположив от противного, что при условии теоремы любое решение $x \in X \setminus P(F,X)$ не устойчиво по ограничениям, с учетом утверждения 3 приходим к заключению, что $\forall \delta > 0$ $\exists$ $u(\delta) \in O_\delta(u)$ и $\exists\, y \in P(F, X(\delta)) \setminus P(F,X) \subset X \setminus P(F,X)$, такие, что выполняются соотношения $\pi(y,F,X) \bigcap \mathrm{int}\, G \subset \pi(y,F,X) \bigcap X(\delta) = \pi(y,F,X(\delta)) = \varnothing$, что приводит к противоречию с условием теоремы.

Для доказательства необходимости предположим, от противного, что $\pi(x,F,X) \subset FrD$. Тогда очевидно, $\forall y \in \pi(x,F,X)$ $\exists i \in N_m : g_i(y) = 0$ и $N(y) = \{i \in N_m : g_i(y) = 0\} \neq \varnothing$, $I = \bigcup\limits_{y \in \pi(\overline{x},X)} N(y) \neq \varnothing$. Кроме того, учитывая утверждение 3, заключаем, что $\exists \delta_0 > 0$, такое, что $\forall u(\delta_0) \in O_{\delta_0}(u)$ $X(\delta_0) \subseteq X$. $\forall\, \delta > 0$ выберем $u(\delta) \in O_\delta(u)$ по следующим формулам: $D_i(\delta) = D_i$, $i \in N_m$,

$$c_i(\delta) = \begin{cases} c_i, & i \in N_m \setminus I, \\ c_i + \beta \sum\limits_{k \in N_\ell} \nabla f_k(y), & i \in I, \end{cases} \qquad b_i(\delta) = \begin{cases} b_i, & i \in N_m \setminus I, \\ b_i - \beta \sum\limits_{k \in N_\ell} \nabla f_k(y) x, & i \in I, \end{cases}$$

где $\beta \in (0, \overline{\beta})$, $\overline{\beta} = \min\{\delta, \delta_0\}(m \max\{1, \|x\|\} \sum\limits_{k \in N_l} \|\nabla f_k(x)\|)^{-1}$. Очевидно, что $\forall \delta > 0$ точка x содержится во множестве $X(\delta)$, полученном в результате описанного возмущения исходных данных. Кроме того, $X(\delta) \subset X$, и, следовательно, $\pi(x,F,X(\delta)) = \pi(x,F,X) \cap X(\delta)$. Покажем, что множество $\pi(x,F,X(\delta)) = \varnothing$. Для произвольной точки $y \in \pi(x,F,X)$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k \in N_\ell} (f_k(y) - f_k(x)) > 0$, и $\forall$ $i \in N(y)$ учитывая псевдовогнутость функций $f_i(x)$, $i \in N_l$, справедливы соотношения:

$\left\langle D_i(\delta)y, y\right\rangle + \left\langle c_i(\delta), y\right\rangle + b_i(\delta) = \beta(\sum_{k\in N_\ell}\left\langle \nabla f_k(y), y\right\rangle - \sum_{k\in N_\ell}\left\langle \nabla f_k(y), x\right\rangle) > 0$, из которых следует, что $y \notin X(\delta)$ и $\pi(x, F, X) \cap X(\delta) = \varnothing$. Это означает, что $\forall \delta > 0$ $\exists\, u(\delta) \in O_\delta(u)$: $x \in P(F, X(\delta))$, следовательно x – неустойчивое по ограничениям неэффективное решение задачи $Q_P(F, X)$, что противоречит условию теоремы.

Теорема 5. Если $P(F, X) \neq X$, $\mathrm{int}G \cap Z^n \neq \varnothing$ и все частичные критерии $f_1, \ldots, f_\ell$ – псевдовогнутые функции, то задача $Q_P(F,X)$ T_3- устойчива по ограничениям тогда и только тогда, когда выполняется условие (2) $\forall\, x \in X \backslash P(F, X)$.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 4. Необходимость доказывается с помощью утверждения 5 и теоремы 4.

Теорема 6. Если $\mathrm{int}G \cap Z^n = \varnothing$ и все $f_i, i \in N_l$ – псевдовогнутые функции, то задача $Q_P(F,X)$ T_3- устойчива по ограничениям $\Leftrightarrow P(F,X) = X$.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 2. Необходимость следует из утверждения 5 и теоремы 4.

Исходя из утверждения 4, теоремы 1, определений T_3- , T_4- и T_5- устойчивости по ограничениям следует справедливость следующей теоремы, устанавливающей критерий, а также эквивалентность понятий T_4- и T_5- устойчивости по ограничениям задачи $Q_P(F, X)$.

Теорема 7. $P(F, X) \subseteq \mathrm{int}G \Leftrightarrow$ задача $Q_P(F, X)$ как T_4-, так и T_5- устойчива по ограничениям.

Проанализировав полученные результаты, приходим к выводу, что из T_4- устойчивости по ограничениям задачи $Q_P(F,X)$ следует ее T_3 - устойчивость по ограничениям, а понятия T_1-, T_2-, а также T_4- и T_5- устойчивости по ограничениям попарно эквивалентны.

Установлена также связь между устойчивостью разных видов эффективных и неэффективных решений допустимой области задачи и топологическими свойствами соответствующих им подмножеств исходных данных задачи $Q(F, X)$, при которых сохраняется соответствующего вида оптимальность или неоптимальность решений.

Теорема 8. Для любой точки $x \in \mathrm{int}\, G \bigcap Z^n$ множества
$U_{Sm}(x) = \{u \in U \,|\, x \in Sm(F, X_u)\}$, $U_{Sl}(x) = \{u \in U \,|\, x \in Sl(F, X_u)\}$,
$U_P(x) = \{u \in U \,|\, x \in P(F, X_u)\}$, $U^u_{Sm}(x) = \{u = (u_1, u) \in U \,|\, x \in Sm(F_{u_1}, X_u)\}$ являются открытыми конусами.

Заключение. Полученные необходимые и достаточные условия разных типов устойчивости по ограничениям свидетельствуют о том, что как бы ни была мала точность приближения исходных данных, множество $P(F, X(\delta))$ в общем случае нельзя считать приближением множества $P(F, X)$ эффективных решений исходной задачи. Это естественно приводит к необходимости создания регуляризующего оператора, представляющего собой определенный вид возмущений исходных данных задачи, для того, чтобы заменить возможно неустойчивую задачу серией заведомо устойчивых эквивалентных задач. Таким образом, эффективный процесс постановки и решения рассмотренной векторной задачи дискретной оптимизации предполагает наличие этапа исследования устойчивости этой задачи относительно изменения исходных данных с последующей, если это необходимо, ее регуляризацией, которая позволяет перейти от возможно неустойчивой исходной задачи к заведомо устойчивой к возмущениям входных параметров задаче.

Н.В. Семенова

СТІЙКІСТЬ ЗА ОБМЕЖЕННЯМИ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ОПУКЛИМИ КВАДРАТИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОБМЕЖЕНЬ

Досліджені різні типи стійкості векторних задач цілочислової оптимізації пошуку множини Парето, які мають опуклі квадратичні функції обмежень, до збурень вхідних даних обмежень. Сформульовані необхідні і достатні умови стійкості за обмеженнями. Встановлені деякі структурні і топологічні властивості простору вхідних даних задачі, за яких зберігається оптимальність розв'язків.

N.V. Semenova

STABILITY WITH REPECT TO CONSTRAINTS AS FOR VECTOR INTEGER OPTIMIZATION PROBLEMS WITH CONVEX QUADRATIC FUNCTIONS OF CONSTRAINTS

The paper studies different types of stability taking place with respect to constraints as for vector integer optimization problems with convex quadratic constraints. Such problems consist in finding Pareto-efficient solutions. The necessary and sufficient conditions for stability with respect to constraints are formulated. Some structural and topological properties of a space of input problem data are stated under which optimality of solutions.

1. *Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т.* Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач.– Киев: Наук. думка, 1995.– 170 с.
2. *Лебедева Т.Т. , Семенова Н.В., Сергиенко Т.И.* Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и сист. анализ. – 2005.– № 4.– С. 90–100.
3. *Лебедева Т.Т., Сергиенко Т. И.* Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Там же – 2004.– № 1.– С. 63–70.
4. *Математическая* оптимизация: вопросы разрешимости и устойчивости / Под. ред. Е.Г. Белоусова, Б. Банка. – М.: Изд-во Моск. ун – та, 1986.– 216 с.
5. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 471с.
6. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. – М.: Наука, 1981. – 304 с.
7. *Введение* в нелинейное программирование / К.Х Эльстер., Р. Рейнгардт, М. Шойбле, Г. Донат. – М.: Наука, 1985. – 264 с.

Получено 14.05.2007