УДК 519.1

А.Г. ДОНЕЦ, Г.А. ШУЛИНОК

О ХРОМАТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ НАТУРАЛЬНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Продолжаются теоретические поиски хроматического числа числовых графов. Проведено исследование хроматического числа некоторых натуральных арифметических графов, а также определены подходы для разработки метода нахождения хроматического числа произвольных натуральных арифметических графов.

Введение. Проблема нахождения хроматического числа для обычных графов относится к NP -полным задачам, хотя и представляет интерес для решения многих практических задач. Для числовых графов, известных своим способом представления, появляется возможность находить оптимальные алгоритмы решения задач. Так, для натуральных модульных графов в [1] была решена задача нахождения хроматического числа за полиномиальное время. Поскольку натуральные арифметические графы, в дальнейшем NA-графы, являются простейшими из числовых графов, было бы логично и для них попытаться решить задачу нахождения хроматического числа.

Нахождение хроматического числа графа имеет смысл решать для связных графов, поскольку для несвязных задача распадается на решение задачи для каждой связной компоненты. Известны [2] необходимые и достаточные условия связности арифметических графов. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением только связных NA-графов.

Образующие NA-графа обладают свойством двойственности. Известно [3], что натуральные арифметические графы с двойственными образующими изоморфны.

Определение 1. Образующая u называется двойственной к образующей v, если $u = 2n - v + 2$, где n – число вершин графа.

Добавление пары двойственных образующих в NA-граф обеспечивает «плавный» прирост количества ребер, а также позволяет наращивать граф от простой цепи до полного графа. Это позволяет провести исследование хроматического числа *NA*-графов, начиная с самых простых случаев.

Рассмотрим следующее свойство.

Лемма 1. Хроматическое число *NA*-графа с образующими вида $(n+1, n+2)$ и двойственными к ним составляет 2.

Такие графы представляет собой гамильтоновы цепи, а хроматическое число гамильтоновой цепи составляет 2. Добавление любой образующей к данному множеству сохраняет связность и не выводит нас за пределы исследования.

Гамильтоновы циклы и гамильтоновы цепи можно получить с помощью других образующих. Например, для нечетного n граф с образующими $(n, n+2)$ также представляет собой гамильтонову цепь, при этом для четного n цепью будет граф с образующими $(n+1, n+3)$. Среди образующих, которые обеспечивают связность *NA*-графа с двумя образующими, нет ни одной пары, которая бы не давала гамильтонову цепь.

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 2. Хроматическое число произвольного связного *NA*-графа с двумя образующими составляет 2.

Поскольку несвязные графы с двумя образующими распадаются на множество цепей, то это приводит к верхней оценке произвольного *NA*-графа с двумя образующими.

Следствие. Хроматическое число произвольного связного *NA*-графа с двумя образующими не превышает 2.

Рассмотрим связные графы с большим числом образующих.

Лемма 3. Хроматическое число *NA*-графа с тремя образующими вида $(3, n+1, n+3)$ и двойственным к ним составляет 2.

Граф с такими образующими при четном n представляет собой гамильтонов цикл, а при нечетном – гамильтонову цепь, откуда соответствующее свойство.

Лемма 4. Хроматическое число *NA*-графа с четырьмя образующими вида $(3, 4, n+2, n+4)$ и двойственным к ним составляет $2 + n(\mathrm{mod}\, 2)$.

Подобно утверждению леммы 3, такой граф при нечетном n является гамильтоновым циклом, а при четном – гамильтоновой цепью. Известно, что цикл с нечетным числом вершин имеет хроматическое число 3, а цепь – 2, что и совпадает с условием леммы.

Рассмотрим связные графы со специально заданным множеством образующих. В таких графах все образующие будут двойственными.

Определение 2. *NA*-графы с двойственными образующими называются двойственными.

Нетрудно показать, что двойственные графы изоморфны.

Примечателен случай *NA*-графа с образующими вида $(n, n+1, n+2)$. Такой граф будет двойственен себе самому. Образующая $n+1$ двойственна себе, тогда как остальные образующие являются двойственными. Таким образом, граф с образующими $(n, n+1, n+2)$ является двойственным себе. Это значит, что множество графов, двойственных данному, состоит из одного элемента, что особенно важно при рассмотрении, так как среди *NA*-графов много изоморфных.

Итак, рассмотрим граф при четном n. По структуре такой граф представляет собой последовательность четырехвершинных циклов, которые имеют вид $(1+j, n-j, 2+j, n-1-j)$, где $j = 0, 1, 2, ..., \frac{n}{2}$. Ввиду того, что эти циклы содержат ребра соседних циклов, количество таких циклов составляет $\frac{n}{2}-1$. Исходя из структуры графа, его хроматическое число составляет 2 (рис 1). Раскраска показана греческими буквами.

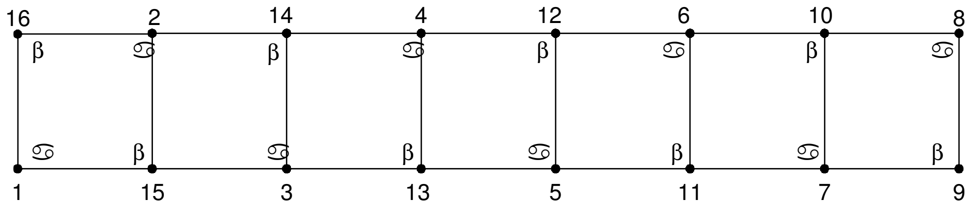

РИС.1. Раскраска *NA*-графа с $n = 16$ и образующими $(16, 17, 18)$

При четном числе вершин на рис.1 нумерация графа состоит из двух последовательностей, следующих по диагоналям четырехвершинных граней: одна возрастающая от 1 до *n/*2, а другая – убывающая от *n* до *n/*2–1. Вершины этих последовательностей окрашены одним цветом.

Рассмотрим граф с нечетным числом вершин. В этом случае он содержит $\frac{n-1}{2}-1$ циклов из четырех вершин, имеющих вид $(1+j, n-j, 2+j, n-1-j)$, $j = 0, 1, 2, ..., \frac{n-1}{2}$, и одного треугольного цикла вида $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}+1, \frac{n-1}{2}+2\right)$. Поэтому хроматическое число такого графа составляет 3, а остаток графа 2-хроматичен. Здесь также нумерация вершин графа состоит из двух тех же последовательностей, которые окрашиваются своим цветом, но последовательности сходятся в вершине 9, смежной с вершинами разного цвета, поэтому она требует третьего цвета. Таким образом, для всего графа хроматическое число составит 3 (рис.2).

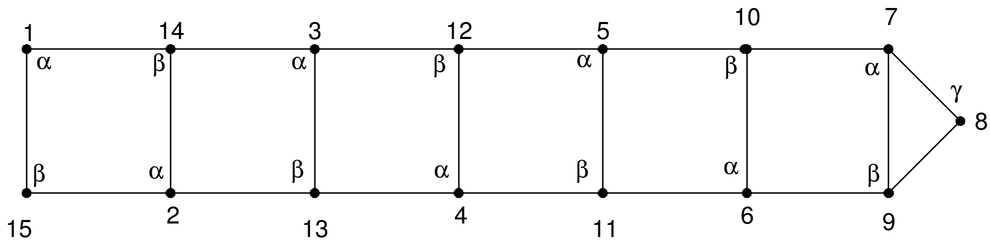

РИС. 2. Раскраска графа с $n = 15$ и образующими $(15, 16, 17)$

Оформим это исследование в виде утверждения.

Лемма 5. Хроматическое число *NA*-графа вершин с образующими вида $(n, n+1, n+2)$ равно $2 + n(\mathrm{mod}\, 2)$.

Продолжим расширять множество образующих, сохраняя множество самодвойственным.

Так, для множества образующих $(n-1, n, n+1, n+2, n+3)$ имеем следующий результат.

Лемма 6. Хроматическое число *NA*-графа с n вершинами и образующими вида $(n-1, n, n+1, n+2, n+3)$ не меньше $4 - n(\mathrm{mod}\, 2)$.

Доказательство. Чтобы такой граф существовал, необходимо, чтобы $n > 3$. Для графов с $n = 4$, 5 можно непосредственно убедиться в этом (рис.3, а, б).

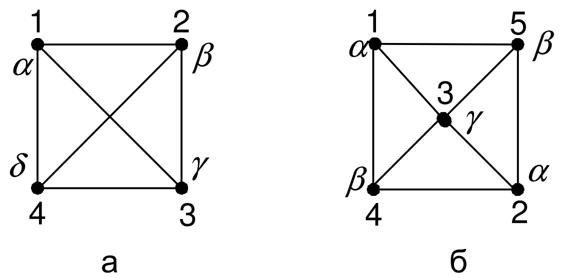

РИС. 3. Пример раскраски графов с образующими $(n-1, n, n+1, n+2, n+3)$

Проведем индукцию по количеству вершин графа.

Пусть задан граф с образующими $(n, n+1, n+2, n+3, n+4)$ и $n+1$ вершинами. Такой граф разделяем на граф с n вершинами и 3 ребра вида $(1, n+1), (2,\ n+1), (3,\ n+1)$. В полученном графе имеются ребра, соединяющие вершины 1, 2, 3, 4 с вершиной n.

Рассмотрим четный случай, т. е. $n(\mathrm{mod}\, 2) \equiv 0$. Нижняя оценка хроматического числа в этом случае равна 2, так как из леммы 2, ведь граф содержит подграф с образующими ($n, n+1, n+2$). С другой стороны, при $n = 5$ имеем 3-хроматичный граф (рис.3,б). Таким образом, оценка хроматического числа увеличивается до 3.

Выделим в этом графе две композиции вида $C_4(k-2,\ k+2,\ k-1,\ k+1)$ и $S_4(k : k-2, k-1, k+1, k+2)$ из четырехвершинного цикла и пятивершинной звезды. В данном случае $k = 3$ при $n = 2k-2$. Увеличивая k, получаем подграф, объединяющий вершины вида $k-2, k-1,\ k,\ k+1$ и $k+2$. Несложно показать, что такой подграф изоморфен исходному графу при $n = 5$. Вершина k соединяется ребрами со всеми данными вершинами. Вершина $k-2$ соединяется ребрами с вершинами $k+2$ и $k+1$. В свою очередь эти вершины соединяются ребрами с вершиной $k-1$. Результат заключается в том, что такой подграф 3-хроматичен (рис. 4, а).

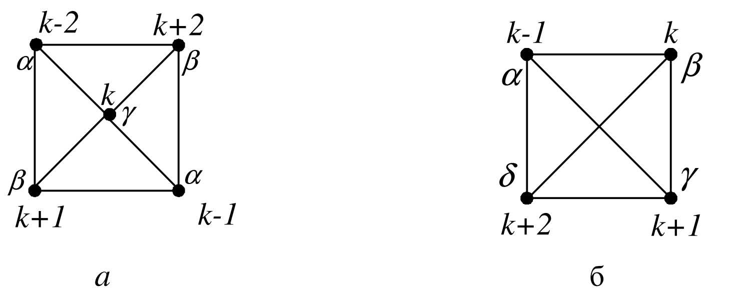

РИС.4. Подграфы с $U = (n-1,\ n,\ n+1,\ n+2,\ n+3)$, изоморфные графам на рис.3

Для нечетного случая аналогично получаем обязательно присутствие подграфа, изоморфного K_4 (рис.4, б), где $2k-1 = n$, что подтверждает лемму.

Для графа с образующими вида $(n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4)$ получаем следующий результат.

Лемма 7. Хроматическое число *NA*-графа с образующими вида $(n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4)$ не меньше $5-(n+1)(\mathrm{mod}\,2) = 4+n(\mathrm{mod}\,2)$.

Доказательство. Граф с образующими $(n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4)$ отличается от предложенного в условии леммы 6 на пару двойственных образующих $n-2$ и $n+4$, которые приводят к появлению подграфов K_4 в четном случае и K_5 – в нечетном.

Рассмотрим нечетный случай. При $n = 5$ это будет полный граф. При увеличении n подграф, состоящий из вершин $(k-1, k, k+1, k+2, k+3)$, $2k = n-1$, является изоморфным графу K_5. Несложно показать, что указанные вершины соединены между собой ребрами. Например, для вершин $k-1$ и k имеем

$k-1+k=2k-1=2k+1-2=n-2$. Таким образом, граф, у которого есть 5-хроматичный подграф, будет иметь нижнюю оценку хроматического числа, равную 5. Продолжая увеличивать длину цепочки, получаем такой обобщающий результат.

Теорема 1. Хроматическое число *NA*-графа с образующими вида $(n-k,\, n-k+1,\ldots,\, n+1,\ldots, n+2+k)$, при $k=0,1,\ldots,n-3$ будет не меньше $k+2+n(\mathrm{mod}\, 2)+(-1)^n k(\mathrm{mod}\, 2)$.

Доказательство. При $k=0$ мы получаем результат из леммы 5. При $k=1$ – результат леммы 6, при $k=2$ – леммы 7. По индукции продолжаем до полного графа и получаем соответствующее хроматическое число.

Рассмотрим другие связные *NA*-графы.

Будем обозначать $NA_n(\,u_1, u_2, \ldots, u_m\,)$ – натуральный арифметический граф с n вершинами, множество образующих которого $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

Рассмотрим граф $G_n = NA_n(\,n+1, n+2, n+3\,)$. Такой граф представляет собой некий подграф графа $G_n^+ = NA_{n+1}(n+1, n+2, n+3)$, структура которого уже была рассмотрена. Граф $G_n^- = NA_{n-1}(n-1, n, n+1)$ будет строиться на основе двойственных образующих графа G_n. Заметим, что удалив висячую вершину 1 в графе G_n, получим граф, изоморфный графу G_n^-. Например, способ перенумерации вершин графа G_n в вершины графа G_n^- можно задать следующим способом:

$$G_n(x) = G_n^-(n+1-x),\ \ x=2,3,\ldots,n\,.$$

Отсюда легко определить, что граф G_n будет иметь то же хроматическое число, что и граф G_n^-. Запишем этот результат.

Лемма 8. Хроматическое число графа $NA_n(\,n+1, n+2, n+3\,)$ составляет $3-n(\mathrm{mod}\, 2)$.

Другими словами, граф G_n будет 2-хроматичен при нечетном n, и 3-хроматичен – при четном.

Расширим данное исследование. Добавим еще образующие в граф G_n. Образующая $n+4$ приводит к увеличению хроматического числа для нечетных n, но не влияет на его величину для четных. Таким образом, граф становится 3-хроматичным для любого n. Формально это можно записать так:

Лемма 9. Хроматическое число графа $NA_n(\,n+1, n+2, n+3, n+4\,)$ равно 3.

Образующая $n+5$ в свою очередь влияет на хроматическое число для четных n и не влияет для нечетных. Таким образом, продолжая добавлять образующие в граф вплоть до образующей $2n-1$, получаем увеличение хроматического числа до величины $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$.

Обобщающий результат запишем формально.

Теорема 2. Хроматическое число натурального арифметического графа $NA_n(n+1, n+2, n+3, ..., n+k)$, $3<k<n$ не меньше $2+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - n(\mathrm{mod}\,2)$.

Теорема 2 может быть сформулирована и для графов с двойственными образующими, то есть для графа $NA_n(n-k+2,\ldots,n-1,\ n,n+1)$, $3<k<n$, или любой композиции двойственных образующих, что дает достаточно общий результат для оценки хроматического числа натуральных арифметических графов.

Рассмотрим произвольный *NA*-граф с тремя образующими $U = (u_1,\ u_2,\ u_3)$, где $0 < u_1 < u_2 < u_3$. Для определения хроматического числа таких графов висячие вершины не играют никакой роли, так как их всегда можно раскрасить цветом, отличающимся от цвета соседней вершины. Поэтому путем удаления таких вершин вместе с инцидентными ребрами всегда можно добиться того, чтобы вопрос о хроматическом числе произвольных графов решался для графов, степени вершин которых не меньше двух.

Лемма 10. Хроматическое число *n*- вершинного *NA*-графа с произвольными образующими $U = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ равно хроматическому числу *NA*-графа с теми же (или двойственными к ним) образующими и с числом вершин $n' = u_2 - 1$.

*Доказательство***.** Пусть *NA*-граф состоит из произвольного числа вершин. Оно должно быть не меньше $u_1 - 1$, иначе первая образующая будет лишней. Если в исходном графе $u_2 > n + 1$, то с помощью эквивалентных преобразований $u_i' = 2n + 2 - u_i$ $(i = 1, 2, 3)$ переходим к двойственным образующим u_i', у которых $u_2' \leq n + 1$. Таким образом, не нарушая общности, считаем, что в исходном графе $u_2 \leq n + 1$. В этом случае все вершины с номерами, большими чем $u_2 - 1$, инцидентны ребрам, которые соответствуют только одной образующей u_3, поэтому имеют степень 1. Как указывалось выше, их можно удалять не изменяя хроматического числа исходного графа. В результате в остатке получим $n' = u_2 - 1$ вершин.

Будем называть такие *NA*-графы с тремя образующими нормированными графами. О связности нормированных *NA*-графов с тремя образующими изложено в [2].

Лемма 11 [2]. Число компонент связности нормированного *NA*-графа с тремя образующими $U = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ равно числу решений сравнения

$$i + j \equiv u_1 \ (\mathrm{mod}\ r), \qquad (1)$$

где $r = \text{НОД}\,(u_3 - u_2,\ u_2 - u_1)$.

Отсюда вытекает, что если $r = 1$, то граф связен, так как $u_1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1)$, и решением (1) есть единственная пара $(0 + 0) \equiv u_1\ (\mathrm{mod}\ 1)$. Если же $r = 2$, то граф связен только для $u_1 \equiv 1$ (mod 2) с единственным решением (0,1). Если $u_1 \equiv 0$(mod 2), то сравнение (1) имеет два решения (0,0) и (1, 1), тогда граф будет несвязным. Действительно, в этом случае граф разбивается на два подграфа: подграф с нечетными номерами вершин и подграф с четными номерами вершин. Если какие-то две вершины из разных подграфов окажутся смежными, то тогда найдется образующая $u_i \equiv 1$(mod 2), $i \in \{1, 2, 3\}$. Однако это противоречит начальным условиям, так как из соотношений $u_1 \equiv 0$(mod 2), $u_3 - u_2 \equiv 0$(mod r), $u_2 - u_1 \equiv 0$(mod r) следует $u_1 \equiv u_2 \equiv u_3 \equiv 0$(mod 2).

В дальнейшем образующие $u_i \equiv 0$(mod 2) будем называть четными, а образующие $u_i \equiv 1$(mod 2) – нечетными ($i \geq 1$).

Теорема 3. Хроматическое число нормированного *NA*-графа с тремя нечетными образующими равно 2.

Доказательство. Известно, что графы с хроматическим числом 2 называются бихроматическими. По теореме Кенига [4] такой граф не содержит циклов нечетной длины. Допустим обратное, что в заданном графе существует цикл нечетной длины, который проходит через вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, x_1$ ($k > 1$). Тогда для определенной последовательности образующих $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2k+1}$, где $v_i \in U$ ($i = 1, 2, \ldots, 2k + 1$), имеем

$$x_2 = v_1 - x_1;\ x_3 = v_2 - v_1 + x_1;\ x_{2k+1} = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} v_i + x_1. \tag{2}$$

Замыкая цикл, получаем $x_1 = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i+1} v_i - x_1$. Отсюда $x_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i+1} v_i$.

Однако сумма нечетного числа нечетных чисел равна нечетному числу и не делится на 2. Следовательно, в графе нет циклов с нечетной длиной, что и требовалось доказать.

Лемма 12. Нормированный *NA*-граф с тремя образующими, для которых справедливо $\sum_{i=1}^{3} u_i \equiv 0$(mod 2), содержит единственный цикл длиной 3.

Доказательство. По определению, в нормированном графе отсутствуют вершины со степенью 1(висячие вершины). Это означает, что максимальный номер вершины, которая инцидентна ребру, принадлежащему первой образующей, не должен быть меньшим наименьшего номера вершины, инцидентной ребру третьей образующей. Это равносильно соотношению $u_1 - 1 \geq u_3 - n$. Отсюда $u_1 - u_3 + n - 1 \geq 0$. Так как в нормированном графе $u_2 = n + 1$, то это равносильно $u_1 + u_2 - u_3 \geq 2$. Учитывая соотношение образующих, получаем общее свойство

$$u_i + u_j - u_k \geq 2,\ i, j, k \in \{1, 2, 3\}. \tag{3}$$

Из доказательства теоремы 3 можном записать координаты вершины цикла длиной три $x = ½(u_i + u_j - u_k)$. Поскольку здесь может быть только три комбинации из образующих и формула (3) всегда гарантирует положительное значение, то получим три разных номера вершин искомого цикла длиной 3.

В качестве примера рассмотрим рис. 2, на котором представлен нормирванный *NA*-граф с образующими U = (15, 16, 17). Получим следующие значения: $x = ½(15 + 16 – 17) = 7$, $y = ½(15 + 17 – 16) = 8$, $z = ½(16 + 17 – 15) = 9$.

Заключение. Данное исследование показало, что задача нахождения хроматического числа числовых графов тесно связана с решением задачи о связности и об изоморфизме таких графов. В дальнейшем будут подробно изучаться вопросы относительно натуральных арифметических графов, что позволит полностью решить задачу нахождения характеристических чисел графов, таких как связность, цикломатическое и хроматическое числа произвольного *NA*-графа.

А.Г. Донець, Г.О. Шулінок

ПРО ХРОМАТИЧНЕ ЧИСЛО НАТУРАЛЬНИХ АРИФМЕТИЧНИХ ГРАФІВ

Продовжуються теоретичні пошуки хроматичного числа числових графів. Проведено дослідження хроматичного числа деяких натуральних арифметичних графів, а також визначені підходи для розробки методу знаходження хроматичного числа довільних натуральних арифметичних графів.

A.G. Donets, G.A. Shulinok

ABOUT CHOMATIC NUMBER OF NATURAL ARITHMETICAL GRAPHS

The paper was devoted to investigation of chromatic number in numerical graphs. Continuing previous investigations for natural modular graphs this paper focus on natural arithmetical graphs. Eveluation of chromatic number for some classes of natural arithmetical graphs was provided. A number of proposition for cromatic number was given.

1. *Донец Г.А., Шулинок Г.А.* О хроматическом числе натуральных модульных графов // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2006. – № 1. – С.94 – 104.
2. *Донец Г.А.* Необходимые и достаточные условия связности арифметических графов // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1992. – С. 69–74.
3. *Шулинок И.Э.* Структура натуральных арифметических графов с нечетным числом вершин // Оптимизация и ее приложения. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1997. – С. 54–60.
4. *Берж К.* Теория графов и ее применение. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 319 с.

Получено 16.05.2007