УДК 518.9

А.П. ИГНАТЕНКО

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Рассмотрена дифференциальная игра преследования при наличии геометрических и интегральных ограничений на управления. Построена разрешающая функция системы, найдены условия, при которых игра может быть закончена за конечное время.

Введение. В реальных системах конфликтного управления ресурсы противоборствующих сторон обычно бывают ограничены. В зависимости от устройства системы, эти ограничения могут иметь различный характер – геометрический, интегральный, импульсный и т.д. В данной работе исследована задача преследования объектов, обладающих динамикой второго порядка при наличии интегрально-геометрических ограничений. Для случая геометрических ограничений задача преследования такого типа решалась в работах Л.С. Понтрягина [1] (первый прямой метод), Н.Н. Красовского [2, 3] (экстремальное прицеливание), А.А. Чикрия [4] (разрешающие функции). В случае интегральных ограничений такого рода динамика рассматривалась М.С. Никольским [5], Б.Н. Пшеничным и Ю.Н. Онопчуком [6] а также (для дискретных игр) А.Я. Азимовым [7]. В работе А.Я. Азимова рассматривалась постановка задачи при разнотипных ограничениях (как интегральных так и геометрических). При этом использовалась конструкция преследования на основе первого прямого метода Л.С. Понтрягина. В текущей работе рассмотрен подход, несколько обобщающий работу [8], который позволяет построить разрешающую функцию для рассматриваемого конфликтного процесса, что дает возможность использовать преимущества развитой теории.

Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальную игру двух однотипных объектов второго порядка, которую иногда называют динамикой «двух крокодилов»:

$$\dot{z}_1 = z_2,$$
$$\dot{z}_2 = u - v, \tag{1}$$

где z_1, z_2 – p-мерные векторы. $u(t)$, $v(t)$ – измеримые вектор-функции одинаковой размерности p, на которые накладываются ограничения такого вида:

$$\int_0^\infty \|u(\tau)\|^2 d\tau \le \mu^2,\ \|u(\tau)\| \le \rho, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \|v(\tau)\|^2 d\tau \le \nu^2,\ \|v(\tau)\| \le \sigma. \tag{3}$$

Терминальное множество имеет вид $M = \{z : z_1 = 0\}$ и является линейным подпространством. Обозначим L – ортогональное дополнение к M в R^{2p}, π – ортогональный проектор из R^{2p} на L. Фундаментальную матрицу однородной системы $\dot{z} = Az$, $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ обозначим e^{At}.

Выбирая свои управления в виде функций времени, каждый из игроков воздействует на процесс (1), преследуя свою цель. Цель преследователя – выбрать управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничениям (2) так, чтобы вывести в некоторый конечный момент времени траекторию $z(t)$ на множество M. Цель убегающего – избежать или максимально оттянуть такой момент времени, с использованием управлений, удовлетворяющим (3). При этом преследователь использует квазистратегии, убегающий – программные управления.

Вспомогательные построения. Введем многозначное отображение

$$U(t,\mu,\rho) = \left\{ \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau : \int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \le \mu^2, \|u(\tau)\| \le \rho \right\}. \tag{4}$$

Лемма 1. Множество $U(t,\mu,\rho)$ обладает такими свойствами:

1. Если $t_1 \le t_2$, то $U(t_1,\mu,\rho) \subset U(t_2,\mu,\rho)$.

2. $U(t,\mu,\rho)$ – замкнуто, ограничено и выпукло.

Следствие. $U(t,\mu,\rho)$ – выпуклое компактное множество.

Аналогично определяется множество $V(t,\nu,\sigma)$, которое обладает теми же свойствами. При исследовании структуры множества $U(t,\mu,\rho)$ возникает вопрос о максимизации функционала $\int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau$ при ограничениях на управление (2). Более подробно этот вопрос рассмотрен в [9]. Изложим основной результат.

Если $t \le \frac{\mu^2}{\rho^2}$, то максимум функционала достигается на управлении $u(\tau) = \rho\psi$, $\psi \in S^p$, где $S^p = \{x \in R^p : \|x\| \le 1\}$. При этом $\int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau = t\rho^2 \le \mu^2$.

Если $t > \frac{\mu^2}{\rho^2}$, то максимизирующая функция имеет вид

$$u(\tau, \lambda) = \begin{cases} \rho\psi, & \tau \in E(t, \lambda), \\ \frac{1}{\lambda}(t - \tau)\psi, & \tau \in G(t, \lambda), \end{cases} \tag{5}$$

где вектор $\psi \in S^p$, $E(t, \lambda) = \{\tau \in [0, t] : t - \tau > \lambda\rho\}$, $G(t, \lambda) = \{\tau \in [0, t] : t - \tau \le \lambda\rho\}$, а λ – параметр, который определяется из уравнения

$$\int_0^t \|u(\tau, \lambda)\|^2 d\tau = \mu^2. \tag{6}$$

Подставляя функцию $u(\tau, \lambda)$ в (6) получаем уравнение относительно λ:

$$\rho^2 \int_{E(t,\lambda)} d\tau + \frac{1}{\lambda^2} \int_{G(t,\lambda)} (t - \tau)^2 d\tau = \mu^2. \tag{7}$$

Если $\lambda\rho \in [0, t)$, то решение (7) $\lambda_0 = \frac{3\rho}{2}\left(t - \frac{\mu^2}{\rho^2}\right)$. Если $\lambda\rho \ge t$ (в этом случае $E(t, \lambda) = \varnothing$), то решение (7) $\lambda_0 = \frac{\sqrt{t^3}}{\mu\sqrt{3}}$. Таким образом, функция $u(\tau, \lambda_0)$ удовлетворяет ограничениям (2) и, как строго показано в [9], максимизирует функционал $\int_0^t (t - \tau) u(\tau) d\tau$. Множество всех значений $u(\tau, \lambda_0)$ в момент времени τ образуют шар переменного радиуса $R(t, \tau, \rho, \mu)$.

По определению $u(\tau, \lambda_0)$ выполняется соотношение $U(t, \mu, \rho) = \int_0^t (t - \tau) R(t, \tau, \rho, \mu) d\tau \cdot S^p$. Для отображения $V(t, \nu, \sigma)$ определим функцию $R(t, \tau, \sigma, \nu)$ таким же образом. Функции $R(t, \tau, \rho, \mu)$, $R(t, \tau, \sigma, \nu)$ характеризуют возможности игроков на протяжении игры.

Условие 1 (Л.С. Понтрягина) $R(t,\tau,\rho,\mu) > Q(t,\tau,\sigma,\nu)$, для всех $t \ge 0$, $\tau \in [0,t]$.

Условие 1 выражает преимущество преследователя над убегающим и выполняется, если $\rho > \sigma$, $\mu > \nu$, $\frac{\nu}{\sigma} < \frac{\mu}{\rho}$.

Основной результат. Обозначим $\xi(t,z) = z_1 + tz_2$. Введем функцию

$$\alpha(t,\tau,z,v) = \sup\Big\{\alpha \ge 0 : -\alpha\xi(t,z) \in (t-\tau)\Big(R(t,\tau,\rho-\sigma,\mu-\nu)S^p + \|v\|S^p - v\Big)\Big\}. \quad (8)$$

Поскольку $0 \in \|v\|S^p - v$ для всех $v \in R^p$ и $0 \in R(t,\tau,\rho-\sigma,\mu-\nu)S^p$, то при $z = 0$ выполняется $\alpha(t,\tau,z,v) = +\infty$. Если $z \ne 0$, то функция $\alpha(t,\tau,z,v)$ принимает конечные значения и к тому же равномерно ограничена по $\tau \in [0,t]$, $v \in R^p$.

Время окончания игры определим таким образом:

$$T(z) = \inf\left\{ t \ge 0 : \int_0^t \inf_{\|v\| \le \sigma} \alpha(t,\tau,z,v) \ge 1 \right\}. \quad (9)$$

Теорема. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1) выполнено условие 1, и для некоторого начального состояния z^0 выполняется $T(z^0) < +\infty$. Тогда траектория процесса может быть приведена из начального состояния z^0 на терминальное множество M в момент времени $T = T(z^0)$.

Доказательство. Пусть управление убегающего на промежутке времени $[0,T]$ некоторая допустимая функция $v(\tau)$. Рассмотрим контрольную функцию $h(t) = 1 - \int_0^t \alpha(T,\tau,v(\tau))d\tau$. Легко видеть $h(t)$ – абсолютно непрерывная функция времени. Поскольку $h(0) = 1$, $h(T) = 0$, и функция $h(t)$ – убывает, то существует минимальный момент времени $t_* \in [0,T]$, такой, что $h(t_*) = 0$. Определим управление преследователя. Пусть $U_1(\tau,v)$, $U_2(\tau,v)$ отображения следующего вида:

$$U_1(\tau,v) = \{u \in U : (T-\tau)(u-v) \in -\alpha(T,\tau,v)\xi(T,z^0)\},$$
$$U_2(\tau,v) = \{u \in U : (T-\tau)(u-v) = 0\}.$$

Управление $u(\tau)$ определим по следующей формуле:

$$u(\tau,v) = \begin{cases} u_1(\tau,v) \in U_1(\tau,v), & \tau \in [0,t_*], \\ u_2(\tau,v) \in U_2(\tau,v), & \tau \in [t_*,T]. \end{cases} \quad (7)$$

Запишем формулу Коши для системы (1):

$$z_1(T) = z_1^0 + Tz_2^0 + \int_0^T (T-\tau)(u(\tau)-v(\tau))d\tau,$$

$$z_1(T) = z_1^0 + Tz_2^0 - \int_0^T \alpha(T,\tau,v)(z_1^0 + Tz_2^0)d\tau,$$

$$z_1(T) = (z_1^0 + Tz_2^0)\left(1 - \int_0^T \alpha(T,\tau,v)d\tau\right).$$

Таким образом, выполняется $z_1(T)=0$ или $z(T)\in M$. Покажем теперь, что введенное управление $u(\tau,v)$ является допустимым на отрезке времени $[0,T]$.

$$(T-\tau)u(\tau)\in(T-\tau)\big(R(t,\tau,\rho-\sigma,\mu-\nu)+\|v\|\big)S^p,$$

$$\|u(\tau)\| = \big|R(t,\tau,\rho-\sigma,\mu-\nu)+\|v\|\big| \le$$
$$\le \big|\rho-\sigma+\|v\|\big| \le \rho.$$

Далее,

$$\int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau = \int_0^T \big|R(t,\tau,\rho-\sigma,\mu-\nu)+\|v\|\big|^2 d\tau =$$

$$= \int_0^T (R(t,\tau,\rho-\sigma,\mu-\nu))^2 d\tau + 2\int_0^T R(t,\tau,\rho-\sigma,\mu-\nu)\|v(\tau)\|d\tau + \int_0^T \|v(\tau)\|^2 d\tau \le$$

$$\le (\mu-\nu)^2 + 2\sqrt{\int_0^T (R(t,\tau,\rho-\sigma,\mu-\nu))^2 d\tau}\sqrt{\int_0^T \|v(\tau)\|^2 d\tau} + \nu^2 \le$$

$$\le (\mu-\nu)^2 + 2(\mu-\nu)\nu + \nu^2 \le \mu^2.$$

Теорема доказана.

О.П. Ігнатенко

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ ПРИ ІНТЕГРАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБМЕЖЕННЯХ

Розглядається диференційна гра переслідування при наявності геометричних та інтегральних обмежень на керування. Побудована розв’язуюча функція системи, знайдені умови, при яких гра може бути закінчена за скінчений час.

O.P. Ignatenko

ON THE ONE PURSUIT PROBLEM UNDER INTEGRAL-GEOMETRIC CONSTRAINTS

This paper deals with differential pursuit game under geometric and integral constraints on controls. There is constructed resolving function of system and found game ending conditions.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – 2. – 576 с.
2. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
3. *Красовский Н.Н.* К задаче преследования в случае линейных однотипных объектов // ПММ. – 1966. – 30. – № 2. – С. 209 – 225.
4. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
5. *Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н.* Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями // Известия АН СССР, Техническая кибернетика. – 1968. – № 1. – С. 13 – 22.
6. *Никольский М.С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Управляемые системы. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1969. – № 2. – С. 49 – 59.
7. *Азимов А.Я., Фан Зуй Хай.* Дискретные игры с интегральными ограничениями. – Баку, 1980. – 35 с. – Деп. Министерство высшего и среднего специального образования Азейбарджанской ССР; № 3164-80.
8. *Чикрий А.А., Безмагорычный В.В.* Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Автоматика. – 1993. – № 4. – С. 26 – 36.
9. *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. – М.: Наука, 1974. – 368 с.

Получено 14.05.2007