УДК 519.6

А.Н. ХИМИЧ, Е.А. НИКОЛАЕВСКАЯ

АНАЛИЗ ВОЗМУЩЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЗВЕШЕННЫХ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Рассматривается задача взвешенных наименьших квадратов. Получены оценки погрешности взвешенного нормального псевдорешения при условии не сохранения ранга возмущенной матрицы, т.е. $rank(\bar{A}) \neq rank(A)$.

Введение. Исследованию задач взвешенных наименьших квадратов и разработке методов их решения посвящено значительное количество работ [1 – 3]. Значительно меньше работ посвящено теории возмущения решения взвешенных наименьших квадратов. В работах [4 – 6] рассматриваются оценки погрешности взвешенной псевдообратной матрицы и взвешенного псевдорешения в случае, когда ранг матрицы исходной задачи не меняется при возмущении элементов матрицы. В данной работе рассматривается задача взвешенных наименьших квадратов с положительно определенными весами, при условии, что ранг исходной матрицы не сохраняется. Получены оценки погрешности взвешенного нормального псевдорешения при возмущении матрицы и правой части в общем случае несовместной системы линейных алгебраических уравнений в рамках заданной модели погрешности исходных данных.

1. Предварительные сведения. Введем обозначения. Пусть $R^{m\times n}$ множество матриц размерностью $m\times n$. Для матрицы $A\in R^{m\times n}$ обозначим A^T матрицу, транспонированную к *A*, $rank(A)$ – ранг матрицы *A*; $\Re(A)$ – множество образов матрицы *A*; $N(A)$ – нулевое подпространство *A*; $\| \ \|$ – евклидова векторная и согласованная с ней спектральная матричная нормы; *I* – единичная матрица.

Для произвольной матрицы $A\in R^{m\times n}$ и симметричных матриц *M* и *N* порядка *m* и *n* соответственно, единственная матрица $X \in R^{m \times n}$, удовлетворяющая таким условиям:

$$AXA = A, \qquad XAX = X,$$
$$(MAX)^T = MAX, \qquad (NXA)^T = NXA \tag{1}$$

называется *взвешенной псевдообратной матрицей Мура – Пенроуза* для матрицы *A* и обозначается $X = A^+_{MN}$. Обозначим $A^\#$ взвешенную транспонированную матрицу к *A*, *P* и *Q* – взвешенные проекционные матрицы, т.е

$$A^\# = N^{-1} A^T M. \tag{2}$$

$$P = A^+_{MN} A = A^T A^{T+}_{MN}, \qquad Q = AA^+_{MN} = A^{T+}_{MN} A^T,$$
$$\overline{P} = \overline{A}^+_{MN}\, \overline{A} = \overline{A}^T\, \overline{A}^{T+}_{MN}, \qquad \overline{Q} = \overline{A}\,\overline{A}^+_{MN} = \overline{A}^{T+}_{MN}\, \overline{A}^T, \tag{3}$$

где $\overline{A} = A + \Delta A$ – возмущенная матрица.

Пусть $x \in R^m$, $y \in R^n$. Взвешенные векторные и матричные нормы определены таким образом:

$$\|x\|_M = \left\| M^{1/2} x \right\|, \qquad \|y\|_N = \left\| N^{1/2} y \right\|, \tag{4}$$

$$\|A\|_{MN} = \max_{\|x\|_N = 1} \|Ax\|_M = \left\| M^{1/2} A N^{-1/2} \right\|, \; A \in R^{m \times n}, \tag{5}$$

$$\|B\|_{NM} = \max_{\|y\|_M = 1} \|By\|_N = \left\| N^{1/2} A M^{-1/2} \right\|, \; B \in R^{n \times m}. \tag{6}$$

Взвешенная псевдообратная матрица Мура – Пенроуза A^+_{MN} может быть представлена в виде взвешенного сингулярного разложения [7].

Пусть $A \in R^{m \times n}$ и $rank(A) = k$, *M* и *N* – положительно-определенные матрицы порядка *m* и *n* соответственно. Тогда существуют матрицы $U \in R^{m \times m}$ и $V \in R^{n \times n}$, удовлетворяющие условию $U^T M U = I$ и $V^T N^{-1} V = I$, такие, что

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T, \qquad A^+_{MN} = N^{-1} V \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T M, \tag{7}$$

где $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots \ge \mu_k > 0$ и μ_i^2 – ненулевые собственные значения матрицы $A^\# A$. Неотрицательные значения μ_i называются взвешенными сингулярными значениями матрицы *A*, причем

$$\|A\|_{MN} = \mu_1, \; \left\|A^+_{MN}\right\|_{NM} = \frac{1}{\mu_k}.$$

Взвешенное SVD матрицы *A* обеспечивает *M* – ортонормальный базис векторов и N^{-1} – ортонормальный базис векторов, т.е. столбцы *U* и *V*, соответственно, такие, что матрица становится диагональной если трансформирована в эти два базиса.

Лемма 1 [8]. Пусть $A,\ E \in R^{m\times n}$. $\mu_i(A)$ и $\mu_i(A+E)$ – взвешенные сингулярные значения матриц A и $\overline{A}$ соответственно. Тогда

$$\mu_i(A) - \|E\|_{MN} \le \mu_i(A+E) \le \mu_i(A) + \|E\|_{MN}.$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу взвешенных наименьших квадратов с положительно определенными весами

$$\min_{x\in C}\|x\|_N,\ C = \{x \mid \|Ax-b\|_M = \min\}, \tag{8}$$

где $A \in R^{m\times n}$ – матрица неполного ранга, $b \in R^m$.

Наряду с задачей (8) рассмотрим задачу с приближенно заданными исходными данными

$$\min_{x\in C}\|\overline{x}\|_N,\ C = \{\ \overline{x} \mid \|(A+\Delta A)\overline{x} - (b+\Delta b)\|_M = \min\}, \tag{9}$$

где

$$\overline{A} = A + \Delta A,\ \ \overline{b} = b + \Delta b,\ \ \overline{x} = x + \Delta x. \tag{10}$$

Будем предполагать, что для погрешности элементов матрицы и правой части выполняются такие соотношения:

$$\|\Delta A\|_{MN} \le \varepsilon_A \|A\|_{MN}, \quad \|\Delta b\|_M \le \varepsilon_b \|b\|_M. \tag{11}$$

Существование M – взвешенного решения наименьших квадратов с минимальной N – нормой следует из [9].

3. Оценка погрешности взвешенного псевдорешения.

Лемма 2 [6]. Пусть $A, \Delta A \in R^{m\times n}$, $rank\,(\overline{A}) = rank(A)$ и $\|\Delta A\|_{MN}\|A^+_{MN}\|_{NM} < 1$. Тогда

$$\|\overline{A}^+_{MN}\|_{NM} \le \frac{\|A^+_{MN}\|_{NM}}{1 - \|\Delta A\|_{MN}\|A^+_{MN}\|_{NM}}.$$

Лемма 3 [6]. Пусть $G = \overline{A}^+_{MN} - A^+_{MN}$, $\overline{A} = A + \Delta A$ и $rank\,(\overline{A}) = rank(A)$. Тогда G может быть представлена в виде

$$G = -\overline{A}^+_{MN}\Delta A A^+_{MN} + (I - \overline{P})N^{-1}\Delta A^T A^{+T}_{MN} N A^+_{MN} + \overline{A}^+_{MN}(I - Q). \tag{12}$$

Используя представление проекционных матриц (3) можем получить следующий результат.

Теорема 1. Если $rank(\overline{A}) = rank(A)$, то

$$\|\overline{Q}(I-Q)\|_{MM} = \|Q(I-\overline{Q})\|_{MM}.$$

Доказательство. Запишем взвешенное сингулярное разложения матриц A и $\overline{A}$: $A = UDV^T$, $\overline{A} = \overline{U}\overline{D}\overline{V}^T$. Из (3) и предположения о том, что A и $\overline{A}$ имеют одинаковый ранг, следует

$$Q = U\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T M \ , \quad \overline{Q} = \overline{U}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{U}^T M \ .$$

Определим ортогональную матрицу $W \in R^{m \times m}$ с подматрицами W_{ij} соотношением

$$\overline{U}_1^T U_1 = W = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \\ \underbrace{\hphantom{W_{11}}}_{k} \ \underbrace{\hphantom{W_{12}}}_{m-k} \end{array} \begin{array}{l} \}k \\ \}m-k \\ \end{array} .$$

Тогда

$$\left\| \overline{Q}(I-Q) \right\|_{MM} = \left\| \overline{U}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{U}^T M U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} U^T M \right\|_{MM} =$$

$$= \left\| M^{1/2} \overline{U}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{U}^T M U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} U^T M M^{-1/2} \right\| =$$

$$= \left\| M^{1/2} \overline{U}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{U}^T M^{1/2} M^{1/2} U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} U^T M^{1/2} \right\| =$$

$$= \left\| \overline{U}_1 \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{U}_1^T U_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} U_1^T \right\| = \left\| \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & W_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| W_{12} \right\| .$$

Точно также можно проверить, что $\left\| Q(I-\overline{Q}) \right\|_{MM} = \left\| W_{21} \right\|$. Остается показать, что $\left\| W_{12} \right\| = \left\| W_{21} \right\|$. Пусть $x \in R^{m-k}$ – произвольный вектор.

Положим, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \begin{matrix} \}k \\ \}m-k \end{matrix}$. Используя ортогональность *W,* имеем

$$\left\| x \right\|^2 = \left\| y \right\|^2 = \left\| Wy \right\|^2 = \left\| W_{12} x \right\|^2 + \left\| W_{22} x \right\|^2 ,$$

откуда

$$\left\| W_{12} x \right\|^2 = \left\| x \right\|^2 - \left\| W_{22} x \right\|^2 .$$

Следовательно,

$$\left\| W_{12} \right\|^2 = \max_{\|x\| = 1} \left\| W_{12} x \right\|^2 = 1 - \min_{\|x\| = 1} \left\| W_{22} x \right\|^2 = 1 - s_{m-k}^2 ,$$

где s_{m-k} – наименьшее сингулярное число W_{22}.

Аналогично, из $\left\| x \right\|^2 = \left\| y \right\|^2 = \left\| W^T y \right\|^2 = \left\| W_{21}^T x \right\|^2 + \left\| W_{22}^T x \right\|^2$ получаем

$$\|W_{21}\|^2 = 1 - \min_{\|x\|=1}\|W_{22}^T x\|^2 = 1 - s_{m-k}^2 .$$

Из равенства $\|W_{12}\| = \|W_{21}\|$ следует утверждение теоремы.

Введём проекционные матрицы:

$$P = A_{MN}^{+} A = A^T A_{MN}^{T+}, \qquad Q = AA_{MN}^{+} = A_{MN}^{T+} A^T ,$$

$$\overline{P}_k = \overline{A}_{k\,MN}^{\ +}\overline{A} = \overline{A}^T \overline{A}_{k\,MN}^{\ T+}, \qquad \overline{Q}_k = \overline{A}\overline{A}_{k\,MN}^{\ +} = \overline{A}_{k\,MN}^{\ T+}\overline{A}^T , \tag{13}$$

где $rank(A) = rank(\overline{A}_k) = k$.

Теорема 2. Предположим, что выполняется условие $\|\Delta A\|_{MN}\|A_{MN}^{+}\|_{NM} < \frac{1}{2}$, $rank(\overline{A}) > rank(A) = k$.

Тогда имеет место оценка

$$\frac{\|x - \overline{x}_k\|_N}{\|x\|_N} \le \frac{h}{1 - 2h\varepsilon_A}\left(2\varepsilon_A + \frac{\|\Delta b\|_M}{\|A\|_{MN}\|x\|_N} + h\varepsilon_A \frac{\|r\|_M}{\|A\|_{MN}\|x\|_N}\right), \tag{14}$$

где $h(A) = \| A \|_{MN} \| A_{MN}^{+} \|_{NM}$ – взвешенное число обусловленности матрицы А, A_{MN}^{+} – взвешенная псевдообратная матрица Мура – Пенроуза, символы $\| \ \|_{MN}$ и $\| \ \|_{NM}$ обозначают взвешенные матричные нормы в соответствии с (4) – (6), $r = b - Ax$ – невязка.

*Доказательство***.** Для получения оценки используем способ из [10], основанный на сингулярном разложении матриц. Представим $\overline{A}$ в виде (7)

$$\overline{A} = \overline{U}\overline{D}\overline{V}^T . \tag{15}$$

Как известно, какова бы ни была прямоугольная матрица $\overline{A}$ размерности $m \times n$, всегда существует разложение (7), где $\overline{U}, \overline{V}$ – ортогональные матрицы, удовлетворяющие условию $\overline{U}^T M \overline{U} = I$ и $\overline{V}^T N^{-1} \overline{V} = I$, $\overline{D}$ – прямоугольная матрица размерности $m \times n$ с неотрицательными элементами на диагонали, которые являются взвешенными сингулярными числами матрицы $\overline{A}$.

Наряду с (15) рассмотрим разложение

$$\overline{A}_k = \overline{U}\overline{D}_k \overline{V}^T , \tag{16}$$

где $\overline{D}_k$ – прямоугольная матрица, первые *к* диагональных элементов которой отличны от нуля и совпадают с соответствующими элементами матрицы $\overline{D}$, а все остальные элементы равны нулю.

Взвешенное нормальное псевдорешение задачи (9) будем аппроксимировать $\overline{x}_k$ взвешенным нормальным псевдорешением задачи

$$\min_{x \in C}\|\overline{x}_k\|_N , \ C = \{x \mid \|\overline{A}_k \overline{x} - \overline{b}\|_M = \min\}. \tag{17}$$

Матрица $\overline{A}_k$ построена в соответствии (16) имеет ранг $к$, такой же, как и матрица невозмущенной задачи. Таким образом, проблема оценки погрешности псевдорешения для матриц, ранг которых изменился, сведена к случаю, когда ранги матриц одинаковы [6].

Учитывая данный факт, используем для оценки $\|x - \overline{x}_k\|_N / \|x\|_N$. Выражение для погрешности взвешенных псевдообратных матриц в этом случае приобретает вид

$$G_k = \left[\overline{P}_k + \left(I - \overline{P}_k\right)\right]\left(\overline{A}_{k\,MN}^{+} - A_{MN}^{+}\right)\left[Q + (I - Q)\right] =$$
$$= \overline{P}_k\,\overline{A}_{k\,MN}^{+}Q + \overline{P}_k\,\overline{A}_{k\,MN}^{+}(I - Q) - \overline{P}_k A_{MN}^{+}Q - \overline{P}_k A_{MN}^{+}(I - Q) - \left(I - \overline{P}_k\right)\overline{A}_{k\,MN}^{+}Q +$$
$$+ \left(I - \overline{P}_k\right)\overline{A}_{k\,MN}^{+}(I - Q) - \left(I - \overline{P}_k\right)A_{MN}^{+}Q + \left(I - \overline{P}_k\right)A_{MN}^{+}(I - Q) =$$
$$= \left(\overline{A}_{k\,MN}^{+}Q - \overline{P}_k A_{MN}^{+}\right) - \left(I - \overline{P}_k\right)A_{MN}^{+} + \overline{A}_{k\,MN}^{+}(I - Q) =$$
$$= \overline{A}_{k\,MN}^{+}AA_{MN}^{+} - \overline{A}_{k\,MN}^{+}\overline{A}A_{MN}^{+} - \left(I - \overline{P}_k\right)A_{MN}^{+} + \overline{A}_{k\,MN}^{+}(I - Q) =$$
$$= \overline{A}_{k\,MN}^{+}(A - \overline{A})A_{MN}^{+} - \left(I - \overline{P}_k\right)A_{MN}^{+} + \overline{A}_{k\,MN}^{+}(I - Q).$$

Используя результаты леммы 3, получаем

$$G_k = \overline{A}_{k\,MN}^{+} - A_{MN}^{+} = -\overline{A}_{k\,MN}^{+}\Delta AA_{MN}^{+} - \left(I - \overline{P}_k\right)N^{-1}\Delta A^T A_{MN}^{+T}NA_{MN}^{+} + \overline{A}_{k\,MN}^{+}(I - Q).$$

Переходя к разности, получаем

$$\overline{x}_k - x = \overline{A}_{k\,MN}^{+}\Delta Ax + \left(I - \overline{P}_k\right)N^{-1}\Delta A^T A_{MN}^{+T}Nx - \overline{A}_{k\,MN}^{+}(I - Q)b + \overline{A}_{k\,MN}^{+}(b - \overline{b}). \quad (19)$$

Переходя к взвешенной норме приходим

$$\|\overline{x}_k - x\|_N = \left\|\overline{A}_{k\,MN}^{+}\Delta Ax + \left(I - \overline{P}_k\right)N^{-1}\Delta A^T A_{MN}^{+T}Nx - \overline{A}_{k\,MN}^{+}(I - Q)b +\right.$$
$$\left. + \overline{A}_{k\,MN}^{+}(b - \overline{b})\right\|_N \le \left\|\overline{A}_{k\,MN}^{+}\Delta Ax\right\|_N + \left\|\left(I - \overline{P}_k\right)N^{-1}\Delta A^T A_{MN}^{+T}Nx\right\|_N + \quad (20)$$
$$+ \left\|\overline{A}_{k\,MN}^{+}(I - Q)b\right\|_N + \left\|\overline{A}_{k\,MN}^{+}(b - \overline{b})\right\|_N.$$

Учитывая, что

$$(I - Q)b = (I - Q)r = r,\quad r = b - Ax,\quad x = A_{MN}^{+}b \quad (21)$$

и используя результаты леммы 3 можем записать

$$\left\|\overline{A}_{k\,MN}^{+}\overline{Q}(I - Q)b\right\|_N = \left\|\overline{A}_{k\,MN}^{+}\overline{A}\overline{A}_{k\,MN}^{+}(I - Q)r\right\|_N \le$$
$$\le \left\|\overline{A}_{k\,MN}^{+}\right\|_{NM}\left\|\overline{Q}_k(I - Q)\right\|_{MM}\|r\|_M = \left\|\overline{A}_{k\,MN}^{+}\right\|_{NM}\left\|Q(I - \overline{Q}_k)\right\|_{MM}\|r\|_M, \quad (22)$$

$$\left\|Q(I - \overline{Q}_k)\right\|_{MM} = \left\|AA_{MN}^{+}(I - \overline{Q}_k)\right\|_{MM} = \left\|M^{1/2}AA_{MN}^{+}(I - \overline{Q}_k)M^{-1/2}\right\| =$$

$$= \left\|M^{-1/2}(MAA_{MN}^{+})^T(I - \overline{Q}_k)M^{-1/2}\right\| = \left\|M^{-1/2}(A_{MN}^{+})^T(A^T - \overline{A}^T)M^{1/2}M^{1/2}(I - \overline{Q}_k)M^{-1/2}\right\| =$$

$$=\left\|M^{1/2}\Delta A N^{-1/2} N^{1/2} A^{+}_{MN} M^{-1/2}\right\| \le \left\|M^{1/2}\Delta A N^{-1/2}\right\|\left\|N^{1/2} A^{+}_{MN} M^{-1/2}\right\| \le \left\|\Delta A\right\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}.$$

Подставив полученный результат в (22) получим неравенство

$$\left\|\overline{A}_{k\,MN}^{\;+}\overline{Q}_k\,(I-Q)b\right\|_N \le \left\|\overline{A}_{k\,MN}^{\;+}\right\|_{NM}\left\|\Delta A\right\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}\left\|r\right\|_M . \tag{23}$$

Подставив (23) в (20), получим относительную погрешность взвешенного нормального псевдорешения

$$\frac{\left\|x-\bar{x}_k\right\|_N}{\left\|x\right\|_N} \le \left\|\overline{A}_{k\,MN}^{\;+}\right\|_{NM}\left\|\Delta A\right\|_{MN} + \left\|\Delta A\right\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} +$$

$$+\frac{\left\|\overline{A}_{k\,MN}^{\;+}\right\|_{NM}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}\left\|\Delta A\right\|_{MN}\left\|r\right\|_M}{\left\|x\right\|_N}+\frac{\left\|\overline{A}_{k\,MN}^{\;+}\right\|_{NM}\left\|\Delta b\right\|_M}{\left\|x\right\|_N} \le$$

$$\le \frac{\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}\left\|A\right\|_{MN}}{1-\left\|\Delta A_k\right\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}}\left(2\frac{\left\|\Delta A\right\|_{MN}}{\left\|A\right\|_{MN}}+\frac{\left\|\Delta b\right\|_M}{\left\|A\right\|_{MN}\left\|x\right\|_N}+\right.$$

$$\left.+\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM}\left\|A\right\|_{MN}\frac{\left\|\Delta A\right\|_{MN}}{\left\|A\right\|_{MN}}\frac{\left\|r\right\|_M}{\left\|A\right\|_{MN}\left\|x\right\|_N}\right). \tag{24}$$

Оценим $\Delta A_k = A-\overline{A}_k$:

$$\left\|\Delta A_k\right\|_{MN} = \left\|\overline{A}_k - A\right\|_{MN} = \left\|\overline{A}_k - \overline{A} + \Delta A\right\|_{MN} \le \left\|\overline{A}_k - \overline{A}\right\|_{MN} + \left\|\Delta A\right\|_{MN} =$$

$$= \left\|\overline{U}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{k+1}\end{pmatrix}\overline{V}^T\right\|_{MN} + \left\|\Delta A\right\|_{MN} \le 2\left\|\Delta A\right\|_{MN}.$$

Кроме того условие данной теоремы $\left\|\Delta A\right\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} < \frac{1}{2}$ приводит к неравенству $\left\|\Delta A_k\right\|_{MN}\left\|A^{+}_{MN}\right\|_{NM} < 1$, что является необходимым для корректности выражения (24). Учитывая это, из (24) получаем оценку (14) для погрешности нормального взвешенного псевдорешения.

Аналогично (13) введём проекционные матрицы:

$$P_l = A_{l\,MN}^{\;+} A = A^T A_{l\,MN}^{\;T+}, \qquad Q_l = A A_{l\,MN}^{\;+} = A_{l\,MN}^{\;T+} A^T,$$

$$\overline{P} = \overline{A}^{+}_{MN}\overline{A} = \overline{A}^T\,\overline{A}^{T+}_{MN}, \qquad \overline{Q} = \overline{A}\,\overline{A}^{+}_{MN} = \overline{A}^{T+}_{MN}\overline{A}^T, \tag{25}$$

Теорема 3. Предположим, что $rank(A) > rank(\overline{A}) = l$, $\frac{\left\|\Delta A\right\|_{MN}}{\mu_l} < \frac{1}{2}$.

Тогда имеет место оценка

$$\frac{\|x_l - \bar{x}\|_N}{\|x\|_N} \le \frac{\mu_1 / \mu_l}{1 - 2\|\Delta A\|_{MN} / \mu_l} \left(2\varepsilon_A + \frac{\|\Delta b\|_M}{\|A\|_{MN}\|x\|_N} + \varepsilon_A \frac{\mu_1}{\mu_l} \frac{\|r\|_M}{\|A\|_{MN}\|x\|_N} \right), \quad (26)$$

где μ_i – взвешенные сингулярные числа матрицы A.

Доказательство. Наряду с задачей (8) рассмотрим задачу

$$\min_{x \in C} \|x_l\|_N, \; C = \{x \mid \|A_l x - b\|_M = \min\} \quad (27)$$

с матрицей $A_l = UD_l V^T$ ранга l.

Аналогично, записывая (24) для задач (9), (27), ранги матриц которых совпадают получаем

$$G = \bar{A}^+_{MN} - A^+_{l\,MN} = -\bar{A}^+_{MN} \Delta A A^+_{l\,MN} + \left(I - \bar{P}\right) N^{-1} \Delta A^T A^{+T}_{l\,MN} N A^+_{l\,MN} + \bar{A}^+_{MN} \left(I - \bar{Q}\right),$$

$$\bar{x} - x_l = \bar{A}^+_{MN} \Delta A x - \left(I - \bar{P}\right) N^{-1} \Delta A^T A^{+T}_{l\,MN} N x - \bar{A}^+_{MN} \left(I - \bar{Q}\right) b + \bar{A}^+_{MN} (b - \bar{b}).$$

Учитывая результаты леммы 2 и, переходя к нормам, приходим к оценке

$$\frac{\|x_l - \bar{x}\|_N}{\|x\|_N} \le \left\|\bar{A}^+_{MN}\right\|_{NM} \|\Delta A\|_{MN} + \|\Delta A\|_{MN} \left\|A^+_{l\,MN}\right\|_{NM} +$$

$$+ \frac{\left\|\bar{A}^+_{MN}\right\|_{NM} \left\|A^+_{l\,MN}\right\|_{NM} \|\Delta A\|_{MN} \|r\|_M}{\|x\|_N} + \frac{\left\|\bar{A}^+_{MN}\right\|_{NM} \|b - \bar{b}\|_M}{\|x\|_N} \le$$

$$\le \frac{\left\|A^+_{l\,MN}\right\|_{NM} \|A\|_{MN}}{1 - \|\Delta A_l\|_{MN} \left\|A^+_{l\,MN}\right\|_{NM}} \left(2 \frac{\|\Delta A\|_{MN}}{\|A\|_{MN}} + \frac{\|b - \bar{b}\|_M}{\|A\|_{MN}\|x\|_N} + \right.$$

$$\left. + \left\|A^+_{l\,MN}\right\|_{NM} \|A\|_{MN} \frac{\|\Delta A\|_{MN}}{\|A\|_{MN}} \frac{\|r\|_M}{\|A\|_{MN}\|x\|_N} \right),$$

откуда следует (26), т.е. утверждение теоремы 3.

Заключение. Получены строгие оценки взвешенного нормального псевдорешения в случае, когда ранг матрицы задачи с точными исходными данными не совпадает с рангом матрицы возмущенной задачи. Оценки получены во взвешенных матрично-векторных нормах для симметричных положительно-определенных весов.

О.М. Хіміч, О.А. Ніколаєвська

АНАЛІЗ ЗБУРЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ЗВАЖЕНИХ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Розглядається задача зважених найменших квадратів. Отримані оцінки похибки зваженого нормального псевдорозв'язку внаслідок збурення вихідних даних задачі за умовою не збереження рангу збуреної матриці, тобто $rank(\bar{A}) \ne rank(A)$.

A.N. Khimich, E.A. Nikolaevskaya

ANALYSIS OF PERTURBATION SOLUTION IN WEIGHTED LEAST SQUARES PROBLEM

The weighed least squares problem is considered. Estimations of error of pseudosolution by perturbation of initial data of problem by condition of not saving of rank of the perturbation of matrix, etc $rank(\overline{A}) \neq rank(A)$ are received.

1. *Ben Israel A., Greville T.N.E.* Generalized Inverse: Theory and Applications. – New York: Willey, 1974. – 436 p.
2. *Голуб Дж., Ван Лоун.* Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 549 с.
3. *Химич А.Н.* Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 3. – С. 142 – 145.
4. *Chen G.L.* Minimum property of weighted condition number in matrix perturbation problems // J. East China Normal Univ. – 1996. – N 1 – P. 1 – 7.
5. *Wei Y.* Perturbation bound of singular linear systems // Applied Math. Computation. – 1999. – N 105. – P. 211 – 220.
6. *Химич А.Н., Николаевская Е.А.* Оценка погрешности решения задачи взвешенных наименьших квадратов // Компьютерная математика. – Киев: Ин – ут кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2006. – № 3. – С. 36 – 45.
7. *Van Loan C.F.* Generalizing the singular value decomposition // SIAM J. Numerical Analysis. – 1976. – N 13. – P. 76 – 83.
8. *Wei Y., Wang D.* Condition numbers and perturbation of weighted Moore-Penrose inverse and weighted least squares problem // Applied Math. Computation. – 2003. – N 145. – P. 45 – 58.
9. *Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С.* Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами и регуляризация задач // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 6. – С. 46 – 65.
10. *Химич А.Н.* Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 3. – С. 142 – 145.

Получено 23.04.2007