Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, Г.А. ШУЛИНОК

СВОЙСТВА И СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧ ДВУХУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Доказано, что в общем случае решение задачи линейного двухуровневого программирования достигается в крайней точке ее области ограничений. На основе этого фундаментального свойства предложен алгоритм поиска решения. Показана полиэдральность многозначного отображения откликов последователя. Показано, что в общем случае множество решений задачи может не быть связным. Доказана NP-полнота задачи.

Введение. Многие задачи иерархической оптимизации, включающие более одного лица, принимающего решения (ЛПР), можно моделировать как задачу многоуровневого математического программирования. Двухуровневая структура известна как игра Штакельберга, где лидер и последователь пытаются минимизировать свои отдельные целевые функции затрат $F(x, y)$ и $f(x, y)$ соответственно (максимизировать $-F(x, y)$ и $-f(x, y)$). Эту игру считают последовательной и некооперативной. Лидер осуществляет ход первым и через свой выбор $y \in R^m$ (на верхнем уровне) способен влиять на действия последователя, но не контролировать их. Это достигается сужением множества допустимых выборов, имеющихся в наличии для последователя. Затем последователь реагирует на решение лидера, выбирая $x \in R^n$ (на нижнем уровне) и минимизируя свои затраты, не обращая внимания на интересы лидера. Тем самым последователь опосредованно влияет на пространство решений лидера и результат.

В основе известной традиционной игры Штакельберга, как правило, лежат два базовых предположения: все игроки имеют полную информацию; кооперация между игроками запрещена. Это предотвращает использование коррелированных стратегий и так называемых побочных платежей. Задачу последовательной оптимизации, в которой несколько независимых ЛПР действуют некооперативным образом, чтобы минимизировать свои отдельные затраты, относят к игре Штакельберга. Линейный случай игры, когда все функции считаются аффинными, известен как задача линейного двухуровневого программирования (ЗЛДУП), которая является статическим вариантом с открытым витком (open loop), где лидер контролирует переменные решения y, а последователь – переменные решения $x(y)$ [1, 2].

Пример 1. Рассмотрим задачу верхнего уровня (ЗВУ)

$$\min_y F(x, y) = 3x + y \tag{1}$$

при ограничении

$$1 \le y \le 6, \tag{2}$$

где x – решение задачи нижнего уровня (ЗНУ)

$$\min_x f(x, y) = -x \tag{3}$$

при ограничениях

$$x + y \le 8, \tag{4}$$

$$4x + y \ge 8, \tag{5}$$

$$2x + y \le 13. \tag{6}$$

Минимизация функции $f(x, y) = -x$ по x равносильна максимизации x: из ограничений (2), (4) получаем

$$x \le 8 - y \le 8 - 1 = 7;$$

из ограничений (2), (5) получаем

$$x \ge 2 - 0.25y = 2 - 0.25 \times 1 = 1.75;$$

из ограничений (2), (6) имеем

$$x \le 6.5 - 0.5y = 6.5 - 0.5 \times 1 = 6.$$

Отсюда

$$2 - 0.25y \le x \le \min\{8 - y; 6.5 - 0.5y\},$$

если

$$2 - 0.25y \le \min\{8 - y; 6.5 - 0.5y\}.$$

Последнее неравенство выполняется, если

$$2 - 0.25y \le 8 - y \le 6.5 - 0.5y;\ 0.75y \le 8 - 2 = 6;\ y \le 6 \times 4/3 = 8;$$

$$1.5 = 8 - 6.5 \le y - 0.5y = 0.5y;\ 3 \le y,$$

либо

$$2 - 0.25y \le 6.5 - 0.5y \le 8 - y;\ 0.25y \le 6.5 - 2 = 4.5;\ y \le 18;\ y \ge 3.$$

Таким образом, учитывая (2), при $y \in [3, 6]$ оптимальное решение ЗНУ – $x(y) = 8 - y$, а при $y \in [1,3]$ – $x(y) = 6.5 - 0.5y$:

$$x(y) = \begin{cases} 6.5 - 0.5y, y \in [1,3]; \\ 8 - y, y \in [3,6]. \end{cases}$$

Тогда

$$F(x(y),y)=\begin{cases}3x+y=3(6.5-0.5y)+y=19.5-0.5y,\ y\in[1,3],\\ 3x+y=3(8-y)+y=24-2y,\ y\in[3,6];\end{cases}$$

$$F(x(y),y)\ge 19.5-0.5\times 3=18\,;\ F(x(y),y)\ge 24-2\times 6=12\,.$$

Итак, глобальное минимальное значение ЗВУ равно 12 при $y=6$, $x(y)=8-6=2$ ($x(6)=2$ – решение ЗНУ).

Пусть ЗНУ выглядит так:

$$\max_x f(x,y)=cx+dy \tag{7}$$

при ограничениях

$$Ax\le a-By\,, \tag{8}$$

$$x\ge 0\,; \tag{9}$$

пусть ЗВУ имеет вид

$$\max_y F(x,y)=gx+hy\,, \tag{10}$$

$$y\ge 0\,, \tag{11}$$

где $a\in R^p$, а матрицы A, B и векторы c, d, g, h имеют соответствующие размерности. ЗЛДУП (7)–(11) называют двухуровневой задачей управления ресурсами.

Областью ограничений ЗЛДУП называют

$$S=\{(x,y):x\ge 0;y\ge 0;Ax+By\le a\}\,.$$

Допустимым множеством для последователя при каждом данном $y\ge 0$ называют $S(y)=\{x:x\ge 0;Ax+By\le a\}$.

Проекцией S на пространство решений лидера $Y=\{y:y\ge 0\}$ называется

$$S(Y)=\{y\ge 0:\exists x\ge 0 \text{ такой, что } Ax+By\le a\}\,.$$

Множеством рациональных реакций (откликов) последователя при $y\in S(Y)$ называют $P(y)=\{x\ge 0:x\in Arg\max\limits_{x\in S(y)} f(x,y)\}$.

Индуцированной областью (inducible region) называется

$$IR=\{(x,y):(x,y)\in S;x\in P(y)\}\,.$$

Так как на множестве IR лидер может оптимизировать, то ЗЛДУП можно записать как стандартную задачу математического программирования

$$\max_{(x,y)\in IR} F(x,y)\,.$$

Теорема 1. Предположим, область S непуста и ограничена. Рассмотрим произвольную выпуклую комбинацию

$$(x,y)=z=\sum_{t=1}^{r}\lambda_t z_t\,,\ \lambda_1,\dots,\lambda_r\ge 0\,,\ \sum_{t=1}^{r}\lambda_t=1\,,$$

точек $z_1,...,z_r \in S$, принадлежащую множеству $P = \{(x, y) : y \geq 0; x \in P(y)\}$. Тогда если $\lambda_i > 0$ (точка z_i строго входит в данную выпуклую комбинацию), $i \in \{1,...,r\}$, то $z_i \in P$ (множество P обладает слабым свойством выпуклости относительно S).

Доказательство проведем методом от противного. Пусть $\lambda_1 > 0$, но $z_1 = (x_1, y_1) \notin P$. Тогда существует такая точка $\tilde{z}_1 = (\tilde{x}_1, y_1) \in P$, что

$$c\tilde{x}_1 + dy_1 > cx_1 + dy_1 .$$

Поскольку $\tilde{z}_1 \in S$ и область S ограничений выпукла, то выпуклая комбинация точек $\tilde{z}_1, z_2,..., z_r \in S$ также принадлежит S:

$$\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_1 \tilde{z}_1 + \sum_{t=2}^{r} \lambda_t z_t \in S .$$

Если $\tilde{y} = y$, то

$$cx = c\lambda_1 x_1 + c\sum_{t=2}^{r} \lambda_t x_t < c\lambda_1 \tilde{x}_1 + c\sum_{t=2}^{r} \lambda_t x_t = c\tilde{x}_1 .$$

Итак, $\tilde{z} \in S$, $\tilde{y} = y$, $cx < c\tilde{x}_1$, что противоречит $z = (x, y) \in P$. Поэтому $z_1 = (x_1, y_1) \in P$. Доказательство проводится аналогично для любого $i = 2,..., r$.

Следствие 1. Если z – крайняя точка P, то z – крайняя точка S.

Доказательство проведем от противного. Предположим, z не является крайней точкой S. Тогда z можно представить такой выпуклой комбинацией крайних точек $z_1,..., z_r \in S$:

$$z = \sum_{t=1}^{r} \lambda_t z_t ,\ \lambda_1,...,\lambda_r > 0 ,\ \sum_{t=1}^{r} \lambda_t = 1 .$$

Но по теореме 1 $z_1,..., z_r \in P$, откуда $z \notin P$, получая противоречие.

Следствие 2. ЗЛДУП (7)–(11) достигает своего оптимального решения в крайней точке S.

Заметим, что задачу (7)–(11) можно записать следующим образом:

$$\max_{z \in P} F(z) = F(x, y) = gx + hy .$$

Поскольку $F(z)$ – линейная функция, то решение последней задачи (если оно существует) достигается в крайней точке P (могут существовать другие оптимумы в точках, не являющихся крайними). Тогда в силу следствия 1 такая точка также является крайней точкой области S.

Пользуясь следствием 2, можно предложить алгоритмы решения ЗЛДУП на основе процедур поиска крайних точек. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\max_{z \in S} F(z) = F(x, y) = gx + hy \tag{12}$$

и ее базисные допустимые решения $\text{€}_1, ..., \text{€}_M$, упорядоченные так, что

$$F(\text{€}_i) \geq F(\text{€}_{i+1}) \ \ \forall i = 1, ..., M - 1 .$$

Тогда индексу $K = \min\{1, ..., M : \text{€}_i \in P\}$ соответствует глобальное оптимальное решение €_K ЗЛДУП. Поэтому достаточно найти K-е наилучшее решение задачи (12) в крайней точке, являющейся смежной с 1-й, 2-й,..., или $(K - 1)$-й крайней точкой. Следующий алгоритм направлен на минимальное хранение индексов столбцов базисов, соответствующих первым $(K - 1)$ наилучшим точкам, и на вычисление точки, которая является смежной с первыми $(K - 1)$ наилучшими точками и дает максимальное значение целевой функции верхнего уровня.

Шаг 1. Полагаем $j = 1$. Получаем оптимальное решение $\text{€}_j = (\text{€}x_j, \text{€}y_j)$ задачи (12) (симплекс-методом). Полагаем $W = \emptyset \cup \text{€}_j$, $T = \emptyset$, переходим на шаг 2.

Шаг 2. Получаем оптимальное решение $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ задачи линейного программирования

$$\max_{z} \{ f(z) : z \in S \cap \{ z = (x, y) : x = \text{€}x_j \}$$

(ограниченным симплекс-методом). Если $\tilde{z} = \text{€}_j$, то €_j – глобальное решение, $K = j$ и останов алгоритма; иначе переходим на шаг 3.

Шаг 3. Пусть $W_j = \{$ все крайние точки, смежные с $\text{€}_j \}$ (из $z \in W_j$ вытекает $f(z) \leq f(\text{€}_j)$). Полагаем $T = T \cup \text{€}_j$, $W = (W \cup W_j) \cap T^c$ и переходим на шаг 4.

Шаг 4. Полагаем $j = j + 1$, получаем решение задачи $\max_{z \in W} F(z)$ и переходим на шаг 2.

Вычислительную эффективность данного алгоритма можно улучшать, сохраняя все обновленные небазисные столбцы или все обратные базисы. Тогда в случае большой размерности приближенное решение можно оценивать верхней и нижней границами оптимального решения.

Если лидер выбирает y, то это значение становится фиксированным параметром целевой функции последователя. Поэтому всегда возможно удалять компоненты решения y, линейно входящие в $f(x, y)$. Обозначим множество оптимальных решений задачи нижнего (lower) уровня

$$\Psi_L(y) = Arg \min_{x} \{ cx : Ax \leq a - By; x \geq 0 \} .$$

Точечно-множественное отображение Γ называют полиэдральным, если его график является объединением конечного числа выпуклых полиэдральных множеств. Выпуклое полиэдральное множество – это пересечение конечного числа полупространств [3].

Теорема 2. Точечно-множественное отображение $\Psi_L(y)$ – полиэдральное.

Тогда ЗЛДУП можно решать, минимизируя линейную целевую функцию ЗВУ по каждой компоненте графика отображения $\Psi_L(y)$ при ограничениях ЗВУ. Каждая из этих задач – задача линейного программирования.

Следствие 3. Если оптимальное решение ЗНУ однозначно определяется для каждого значения параметра y, то существует оптимальное решение линейной ЗВУ, являющееся вершиной множества ее ограничений.

Следствие 4. Теорему 1 можно обобщить на ЗНУ с линейными ограничениями и квазивыпуклой дробной целевой функцией ЗВУ.

Лемма 1. Если ограничения ЗВУ зависят от оптимального решения ЗНУ, то допустимое множество ЗЛДУП может не быть связным.

Пример 2 (модифицированный пример 1). Рассмотрим ЗВУ

$$\min_y(3x+y)$$

при ограничениях

$$0 \le y \le 8, \tag{13}$$

$$x \le 5, \tag{14}$$

$$x \in Arg\min_x\{-x : x+y \le 8; 4x+y \ge 8; 2x+y \le 13; 2x-7y \le 0\}.$$

Решение ЗНУ эквивалентно максимизации функции $f(x,y)=x$, причем

$$x \le 8-y;\ x \le 6.5-0.5y;\ x \le 3.5y,$$

$$2-0.25y \le x \le \min\{8-y; 6.5-0.5y; 3.5y\}.$$

Для решения ЗНУ применим подход ветвей и границ, состоящий из следующих шагов.

1. Учитывая ограничение (13) для y, упорядочим ограничения сверху для x при наименьшем возможном значении $y=0$:

$$3.5y = 0 < 6.5-0.5y < 8-y.$$

2. Тогда вместо последнего соотношения рассматриваем

$$2-0.25y \le 3.5y,$$

откуда

$$2 \le 3.5y+0.25y = 3.75y = 15y/4;\ 8/15 \le y.$$

3. Упорядочим ограничения сверху для x при $y = 8/15$:

$$8-8/15 > 7 > 6.5-0.5(8/15) > 5 > 3.5(8/15).$$

4. Тогда рассматриваем

$$3.5y \le 6.5-0.5y,$$

откуда

$$4y \le 6.5 = 13/2;\ y \le 13/8.$$

5. Пользуясь линейностью всех ограничений, упорядочим остальные ограничения сверху для x при $y = 13/8$:

$$8 - 13/8 > 6 > 6.5 - 13/16 = 6.5 - 0.5(13/8).$$

6. Рассматриваем

$$2 - 0.25y \le 6.5 - 0.5y,$$

откуда

$$y/4 = 0.25y = 0.5y - 0.25y \le 6.5 - 2 = 4.5 = 9/2;\ y \le 18.$$

7. Упорядочим по y два последние ограничения сверху для x:

$$6.5 - 0.5y \le 8 - y,$$

откуда

$$y/2 = 0.5y - 0.25y \le 8 - 6.5 = 1.5 = 3/2;\ y \le 3.$$

Таким образом, учитывая ограничения (13),

$$x(y) = \begin{cases} 3.5y, 8/15 \le y \le 13/8; \\ 6.5 - 0.5y, 13/8 \le y \le 3; \\ 8 - y, 3 \le y \le 8. \end{cases}$$

Проверим, удовлетворяет ли полученное $x(y)$ ограничению (14):

$$7y/2 = 3.5y \le 5;\ y \le 10/7;\ 3/2 = 1.5 = 6.5 - 5 \le 0.5y = y/2;$$

$$3 \le y; \tag{15}$$

$$8 - y \le 5,$$

$$3 = 8 - 5 \le y. \tag{16}$$

Итак, учитывая (15)–(16), получаем

$$x(y) = \begin{cases} 3.5y, 8/15 \le y \le 10/7; \\ 8 - y, 3 \le y \le 8. \end{cases}$$

Если ограничение (14) перенести из ЗВУ в ЗНУ, то допустимое множество ЗВУ является связным и состоит из всех точек $(x(y), y)$, где

$$x(y) = \begin{cases} 3.5y, 8/15 \le y \le 1/7; \\ 5, 10/7 \le y \le 3; \\ 8 - y, 3 \le y \le 8. \end{cases}$$

Следует отметить, что расстановка ограничений не является произвольной с практической точки зрения: каждое ограничение ЗНУ сужает допустимые решения последователя. Когда такое же ограничение расположено в ЗВУ, то сужает решение лидера в том смысле, что допустимость выбора лидером рассматривается после выбора последователем: ограничение ЗВУ неявно сужает задание лидера. Эта проблема усугубляется, когда выбор последователем определяется не-однозначно для некоторого значения $\tilde{y}$ параметра, потому что тогда какие-то решения последователя $x \in \Psi_L(\tilde{y})$ могут означать, что выбор лидера $\tilde{y}$ допустимый, но другие решения последователя отбрасывают $\tilde{y}$.

Лемма 2. Ограничение ЗВУ, включающее отклик последователя, можно перемещать в ЗНУ, если существует по крайней мере одно оптимальное решение ЗНУ, не зависящее от этого перемещения при каждом значении параметра.

Теорема 3. Пусть $(x,^* y^*)$ – решение ЗЛДУП. Для любого $\varepsilon > 1$ поиск такого решения, что $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \le \varepsilon(x^*, y^*)$, является NP-трудной задачей.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ являются n булевыми переменными. Рассмотрим k предложений дизъюнкций максимального дерева булевых переменных и их отрицаний. Существует ли такое установление значений n булевых переменных, что все k предложений являются истинными одновременно?

Преобразуем такой произвольный пример в специальный пример ЗЛДУП. Пусть каждой булевой переменной X_i отвечают две вещественные переменные верхнего уровня y_i и $\bar{y}_i$, причем $y_i + \bar{y}_i = 1$, $i = 1,...,n$. Тогда для каждого предложения построим неравенство $s_i + s_j + s_k \ge z$, где переменная s_t – одна из переменных y_t или $\bar{y}_t$, если соответственно X_t или $\neg X_t$ появляется в предложении, а z – дополнительная переменная верхнего уровня. Складывая n переменных нижнего уровня x_i и n ограничений нижнего уровня $0 \le x_i \le y_i$, $0 \le x_i \le \bar{y}_i$, получаем булевую ЗНУ (БЗНУ):

$$\min_x \sum_{i=1}^{n} x_i$$

при ограничениях

$$0 \le x_i \le \bar{y}_i,\ i = 1,...,n,$$
$$0 \le x_i \le y_i,\ i = 1,...,n.$$

Очевидно, эта ЗНУ при данном y имеет оптимальное решение $x_i = \min\{y_i; \bar{y}_i\}$ $\forall i$. Рассмотрим булеву ЗВУ (БЗВУ):

$$\min_y \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - z \right)$$

при ограничениях

$$s_i + s_j + s_k \ge z \text{ для каждого предложения,}$$
$$1 \ge z \ge 0,\ 1 \ge y_i \ge 0,\ i = 1,...,n,$$
$$1 \ge \bar{y}_i \ge 0,\ y_i + \bar{y}_i = 1,\ i = 1,...,n,$$
$$x \text{ – решение БЗНУ,}$$

где переменные s_i – искусственные для y_i и $\bar{y}_i$, как вышеуказано. В варианте ЗЛДУП ищется допустимое решение БЗВУ, исходя из некоторого наперед заданного значения целевой функции. Очевидно, пример исходной булевой задачи имеет решение тогда и только тогда, когда оптимальная величина целевой функции БЗВУ равна -1. Это свидетельствует, что исходная булевая задача является подзадачей ЗЛДУП. Поскольку исходная булевая задача – NP-полная [4], то ЗЛДУП – NP-трудная.

Теперь покажем, что вычисление приближенного решения ЗЛДУП имеет такую же сложность, как вычисление оптимального решения. Это проверяется преобразованием приближенного решения в допустимое решение со значением целевой функции верхнего уровня, не худшим оптимального. Пусть $(x^*, y^*, \bar{y}^*, z^*)$ – ε-оптимальное решение, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* - z^* \leq \varepsilon f^*,$$

где величина f^* – оптимальное значение целевой функции, $0 < \varepsilon < 1$. Когда $y_i^* \in (0,1/2)$, то на нижнем уровне $x_i^* = y_i^*$, полагаем $y_i = 0$, $\bar{y}_i = 1$, $x_i = 0$, причем полагаем значение z равным величине между z^* и $(z^* - x_i^*)$, что необходимо для сохранения допустимости (действительно, z убывает до уровня, где следующее ограничение-неравенство удовлетворяется как равенство). Тогда значение целевой функции верхнего уровня не может возрастать. Это можно осуществлять по очереди, уменьшая таким образом количество неинтегральных переменных, но не увеличивая величину целевой функции [5].

Аналогично можно рассматривать случай, когда $y_i^* \in [1/2,1)$: $y_i = 1$, $\bar{y}_i = 0$, $x_i = 0$. Итак, все переменные x_i получают интегральные значения. Значение z достигнет 0 или 1, а величина целевой функции уменьшится до $f^* \in \{0,1\}$. Эта процедура полиномиальна. Это показывает, что вычисление ε-оптимального решения настолько же сложное, как вычисление оптимального решения.

Из доказательства теоремы 2 видно, что ЗНУ имеет единственное оптимальное решение при всех значениях параметров. Кроме того, маловероятно найти полиномиальный алгоритм глобального решения ЗЛДУП.

Поскольку исходная булевая задача не является численной, то теорема 2 показывает, что ЗЛДУП – NP-трудная в сильном смысле. Полностью полиномиальная схема аппроксимации является алгоритмом решения, параметризованным по точности вычисленного решения, которая при данной точности ε дает ε-оптимальное решение за время, полиномиальный по длине задачи и $1/\varepsilon$. Доказательство теоремы 2 показывает, что эти подзадачи, эквивалентные исходной булевой, имеют неотрицательные целые оптимальные значения целевой функции (0 или 1) для всех примеров. Это означает, что не может быть полностью полиномиальной схемы аппроксимации ЗЛДУП (при $P \neq NP$).

В.М. Горбачук, Г.О. Шулінок

ВЛАСТИВОСТІ ТА СКЛАДНІСТЬ ЗАДАЧ ДВОРІВНЕВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Доведено, що розв'язок задачі лінійного дворівневого програмування досягається в крайній точці її області обмежень. На основі цієї властивості запропоновано алгоритм пошуку розв'язку задачі. Показана поліедральність відображення відгуків послідовника. Показано, що в загальному випадку множина розв'язків задачі може не бути зв'язною. Доведено NP-повноту задачі.

W.M. Gorbachuk, G.A.Shulinok

THE PROPERTIES AND COMPLEXITY OF BILEVEL PROGRAMMING PROBLEM

It is proved that a solution of linear bilevel programming problem is achieved at an extreme point of its constraint region. Based on this property, the algorithm for search a problem solution is suggested. It is demonstrated the mapping of follower's responses is a polyhedral one. It is showed that in general case a set of problem solutions may not be connected. The NP-completeness of problem is proved.

1. *Simaan M., Cruz J.B.* On the Stackelberg strategy in nonzero-sum games // J. of optimization theory and applications. – 1973. – **11**. – P. 533–555 .
2. *Горбачук В.М.* Решение задачи двухуровневого программирования для билинейных разрывных функций // Компьютерная математика. – 2005. – № 2. – С. 44–51.
3. *Рокафеллар Т.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 469 с.
4. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные алгоритмы и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
5. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1985. – 384 с.

Получено 27.06.2006