УДК 519.8

Ю.П. ЛАПТИН

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ОПИСАННЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Рассматриваются задачи, возникающие при разработке некоторых модификаций методов описанных эллипсоидов – задача рационального выбора наиболее существенных отсечений из совокупности накопленных на предыдущих итерациях и задача построения описанного эллипсоида вокруг пересечения шара и симплекса

© Ю.П. Лаптин, 2006

Метод описанных эллипсоидов [1, 2] обеспечивает геометрическую скорость сходимости и является основой многих важных теоретических результатов (см., например [3]). Однако показатель скорости сходимости с ростом размерности решаемых задач стремится к единице, что объясняет практическую неэффективность этого метода. Для повышения эффективности в работах [4–6] предлагается использовать вместо одного несколько отсечений. Как правило, используются (выбираются) две отсекающие плоскости, генерируемые специальным образом, так чтобы угол между ними был меньше $\frac{\pi}{2}$.

В настоящей работе рассматриваются задачи, возникающие при использовании n отсекающих плоскостей, где n – число переменных. Предлагаются алгоритмы приближенного решения этих задач.

Модифицированные методы описанных эллипсоидов. Рассматривается задача безусловной минимизации выпуклой функции $f(x)$, $x \in E^n$. В каждой точке $x \in E^n$ могут быть вычислены значение функции $f(x)$ и некоторый субградиент $g(x)$. Предполагается, что оптимальная точка x^* находится в шаре радиусом R_0 с центром в точке x_0.

Модифицированными методами описанных эллипсоидов будем называть методы, в которых на каждой итерации k, $k = 0, 1,...$ считаются заданными

- матрица преобразования пространства A_k, $y = A_k x$;
- шар $S_k = \{ y : \| y - y_k \| \le R_k \}$ в преобразованном пространстве, в котором содержится оптимальная точка $y^* = A_k x^*$;
- совокупность отсекающих плоскостей (полупространств), накопленных на предыдущих итерациях,

$$H_i = \left\{ y : (\overline{g}_i, y - A_k x_i) \le f_k^* - f(x_i) \right\},\ i \in I_k,$$

где x_i, $i \in I_k$ – точки в исходном пространстве, в которых вычислялись значения функций и субградиенты; f_k^* – значение рекорда на текущей итерации; $\overline{g}_i$ – субградиент в преобразованном пространстве, соответствующий точке x_i, $\overline{g}_i = B_k^* g(x_i)$, $B_k = A_k^{-1}$.

На каждой итерации выполняются следующие действия (шаги):

1) некоторым способом генерируются совокупность точек $x_j \in S_k$, $j \in J_k$ и соответствующие отсекающие плоскости (полупространства);

2) выделяется множество отсекающих плоскостей (полупространств), $T_k \subseteq I_k \bigcup J_k$;

3) вокруг пересечения $S_k \bigcap \left(\bigcap\limits_{i \in T_k} H_i \right)$ некоторым образом строится описанный эллипсоид E_k (очевидно, что эллипсоид E_k содержит оптимальную точку x^*);

4) формируется преобразование $\overline{A}$, переводящее эллипсоид E_k в шар S_{k+1};

5) полагается $A_{k+1} = \overline{A} \times A_k$;

6) формируется множество отсекающих плоскостей (полупространств), $I_{k+1} \subseteq I_k \bigcup J_k$.

Различные методы отличаются реализацией шагов 1) - 3), 6).

В первоначальной версии метода описанных эллипсоидов [1, 2] на каждой итерации генерируется одна точка – центр шара S_k (шаг 1), используется одно отсечение, проходящее через центр шара S_k (шаг 2), вокруг полушара строится описанный эллипсоид минимального объема (шаг 3), информация о построенных ранее отсекающих плоскостях не используется, $I_{k+1} = 0$ (шаг 6). Такой алгоритм сходится по объему области локализации с геометрической скоростью с показателем $q = 1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$.

Для оптимального (по числу итераций) метода центров тяжести [7] показатель скорости сходимости $q = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^n \to 1 - \frac{1}{e}$, при $n \to \infty$, однако этот метод нереализуем из-за чрезмерной трудоемкости вычислений на каждой итерации.

Одним из направлений повышения эффективности метода описанных эллипсоидов является использование нескольких субградиентов (отсекающих гиперплоскостей) при определении области локализации решений задачи на каждой итерации [4, 5, 6]. На шаге 1 по некоторому правилу генерируются вспомогательные точки x_j, $j \in J_k$. На шаге 2, как правило, используются несколько (чаще всего две) отсекающих гиперплоскостей, построенных во вспомогательных точках x_j, $j \in J_k$. При этом отбираются гиперплоскости, углы между которыми (попарно) меньше $\pi/2$.

На шаге 6 при формировании множества отсекающих плоскостей I_{k+1} для следующей итерации в некоторых реализациях используются операции агрегирования [6].

Важное значение при реализации таких методов имеют алгоритмы построения описанного эллипсоида E_k на шаге 3, которые предложены для относительно простых фигур.

В работе [4] рассматриваются три типа фигур:

сегмент – часть шара, отсеченная от него плоскостью;

слой – часть шара, заключенная между двумя параллельными плоскостями;

$s(m)$-пирамида – часть шара S_k, ограниченная совокупностью из m плоскостей, $m \le n$, попарно расположенных под нетупыми углами и проходящими через некоторую внутреннюю точку этого шара (вершину пирамиды). При этом соответствующая совокупность нормалей $g^1, g^2, \ldots, g^m$ к плоскостям составляет систему линейно независимых векторов.

Предполагается, что все фигуры принадлежат некоторому полушару шара S_k. Приведены соотношения, определяющие оптимальные эллипсоиды для сегмента и слоя, исследуются свойства $s(m)$-пирамид. Вводится понятие c-пирамиды – пересечение $s(m)$-пирамиды с подпространством L_m, порожденным нормалями $g^1, g^2, \ldots, g^m$. Вершина c-пирамиды принадлежит внутренности шара S_k, основание лежит на сферической поверхности шара. С c-пирамидой естественным образом связан некоторый симплекс M, натянутый на ее ребра.

Для случая, когда длина ребер c-пирамиды не превышает по длине радиуса шара S_k, приводится алгоритм построения оптимального эллипсоида $\overline{E}$, описанного вокруг $s(m)$-пирамиды, с центром в ее вершине.

Обозначим $\left\{ p^i,\ i=1,...,\ m \right\}$ набор m-мерных векторов, являющихся ребрами c-пирамиды, P - матрица векторов столбцов p^i. Тогда отношение объема эллипсоида $\overline{E}$ к объему шара S_k будет равно (предполагается, что $R=1$)

$$q = \left(\sqrt{1-\rho^2} \right)^{n-m} \left| \det\ P \right|, \tag{1}$$

где ρ - расстояние между центром шара и вершиной c-пирамиды.

Поскольку $\left|\det P\right|$ численно равен объему m-мерного параллелепипеда, натянутого на ребра $\left\{ p^i,\ i=1,...,\ m \right\}$, то хороший выигрыш по объему получается в случае, когда ребра $p^i,\ i=1,...,\ m$ лежат под углами, заметно меньшими $\pi/2$. В случае $m=2$ получаем $q \le \sin\ \varphi$, где φ - угол между p^1 и p^2.

Рассматривается также задача построения оптимального эллипсоида, центр которого не совпадает с вершиной $s(m)$- пирамиды

При практической реализации алгоритма использовались сегменты, слои и $s(2)$-пирамиды, порождаемые двумя отсекающими плоскостями, центр эллипсоида всегда совпадал с вершиной s-пирамиды.

На шаге 1 для генерирования точек $x_j,\ j \in J_k$ используется одномерный поиск вдоль направления, определяемого субградиентом в центре шара S_k. Выделение подходящих отсекающих плоскостей (пары плоскостей с малым углом между ними) осуществляется перебором и сравнением генерируемых отсечений.

Предложенные процедуры позволяют ускорить метод описанных эллипсоидов при практическом решении задач, однако гарантировать существенное уменьшение объема локализации на каждой итерации не позволяют.

В работах [5, 6] на шаге 3 также используются сегменты, слои и $s(2)$-пирамиды, рассматриваются оптимальные эллипсоиды с центром в вершине $s(2)$-пирамиды. В работе [5] на шаге 1 используются специальные алгоритмы для генерирования точек $x_j,\ j \in J_k$, которые в предельном случае можно интерпретировать как ε-субградиентные алгоритмы решения исходной задачи. В целом в работе предпринимаются усилия для того, чтобы трудоемкость итерации метода эллипсоидов не превышала $O(n^2)$. Гарантировать существенное уменьшение объема локализации на каждой итерации также не удается.

В работе [6] рассматривается алгоритм определения $\bar{\varepsilon}$-оптимального решения. Для построения отсечений используются ε-субградиенты целевой функции. Предлагается специальная процедура, которая обеспечивает за конечное число шагов построение двух отсекающих плоскостей, угол между которыми не превышает любого заданного значения $\alpha > 0$. В целом для обеспечения существенного уменьшения объема локализации на итерации (≈ 0.7) достаточно применения $O(n^2)$ процедур приближенной одномерной минимизации.

Заметим, что в рассмотренных работах на каждой итерации формируется значительное количество отсечений, а используется только одно или два.

Выделение существенных отсечений. Существующие алгоритмы [3, 8] позволяют строить описанные (субоптимальные) эллипсоиды вокруг произвольного конечного множества точек. Такие алгоритмы обладают полиномиальной трудоемкостью от числа точек.

При построении описанного эллипсоида вокруг многогранника $M = \{ x : Ax \le b \}$, где A – $m \times n$ матрица, должны использоваться вершины этого многогранника. Для того чтобы алгоритмы построения описанных эллипсоидов были реализуемы, число вершин многогранника M должно быть не слишком велико. Простейшим многогранником в пространстве R^n является симплекс, число вершин которого равно $n+1$. При увеличении числа граней многогранника число вершин растет экспоненциально.

В ходе решения оптимизационной задачи число отсекающих плоскостей накапливается и может достигать больших значений. При построении описанного эллипсоида должны использоваться наиболее существенные отсечения.

Пусть многогранник M определяется накопленными отсекающими плоскостями, $B = \{ x : \|x\| \le r \}$ - текущая локализация множества оптимальных решений (в преобразованном пространстве).

Построим вписанный в $M \cap B$ шар S_* максимального объема. Отсекающие плоскости, касающиеся шара S_*, будем использовать как множество I^* наиболее существенных ограничений.

Обозначим A_i i-ю строку матрицы A. Без ограничения общности можно считать, что $\|A_i\| = 1,\ i = 1,\dots,\ m$. Будем также предполагать, что $m > n$.

Задача построения вписанного шара максимального объема может быть сформулирована следующим образом: найти

$$\max\ z \tag{2}$$

при ограничениях

$$z \le b_i - A_i x,\ i = 1,...,\ m\,, \tag{3}$$

$$\|x\| \le r - z\,. \tag{4}$$

Пусть $(z^*,\ x^*)$ - решение задачи (2)-(4), тогда x^* - центр вписанного шара, z^* - радиус шара. Множество активных в оптимальной точке ограничений вида (3) определяет искомое множество I^*. В невырожденном случае $\left|I^*\right| = n$, если ограничение (4) активно, в противном случае $\left|I^*\right| = n+1$.

Пусть $\left|I^*\right| = n$, множество $S_e = \left\{\ x : A_i x \le b_i,\ i \in I^*,\ \|x\| \le r\ \right\}$ (множество $S_e = \left\{\ x : A_i x \le b_i,\ i \in I^*\ \right\}$, если $\left|I^*\right| = n+1$) будем называть e-пирамидой (e-симплексом), если каждое ребро $X(J) = \left\{x : A_i x = b_i,\ i \in J\ \right\}$, $J \subset I^*$, $\left|J\right| = n-1$, пересекает шар B (текущую локализацию множества оптимальных решений).

Построение описанного эллипсоида вокруг пересечения шара и e-симплекса. Пусть определен e - симплекс $S_e = \left\{\ x : A_i x \le b_i,\ i \in I^*\ \right\}$. Рассмотрим задачу построения «хорошего» описанного эллипсоида вокруг множества $S_e \bigcap B$.

Обозначим V множество вершин симплекса $S_e, V^0 = V \bigcap B$, $V^1 = V \setminus V^0$.

Пусть задана точка $x^0 \in S_e \bigcap B$ (например, центр вписанного шара x^*). Для каждой точки $v \in V^1$ обозначим $z(v)$ точку, лежащую на пересечении отрезка $[x^0,\ v]$ с границей шара B. Положим $\overline{V}^1 = \left\{\ z : z = z(v),\ v \in V^1\right\}$.

Обозначим $E^0 = \left\{\ x : (x-a, Q^0(x-a)) \le 1\ \right\}$ эллипсоид минимального объема, описанный вокруг множества точек $V^0 \bigcup \overline{V}^1$. Выпуклая оболочка множества $V^0 \bigcup \overline{V}^1$ определяет некоторый симплекс «полной размерности». Можно показать, что алгоритм построения описанного эллипсоида минимального объема вокруг такого симплекса имеет трудоемкость $O(n^3)$ операций.

Обозначим W множество точек пересечения ребер $X(J)$ симплекса S_e с границей шара B. Заметим, что точки из множества W могут не принадлежать эллипсоиду E^0.

Для произвольного $\rho > 0$ обозначим $E(Q,\rho) = \{\, x : (x-a, Q(x-a)) \le \rho \,\}$. Понятно, что $E^0 = E(Q^0, 1)$.

Будем увеличивать эллипсоид $E^0 \to E(Q,\rho)$, изменяя матрицу Q^0 и значение ρ при фиксированном центре a так, чтобы выполнилось $S_e \bigcap B \subseteq E(Q,\ \rho)$.

Без ограничения общности можно считать, что матрица Q^0 приведена к диагональному виду. Задача увеличения полуосей эллипсоида (уменьшения собственных значений матрицы Q^0) так, что $W \subseteq E(Q,\ \rho)$, может быть представлена в виде: найти

$$\max_q \sum_{i=1}^n \ln q_i \tag{5}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n q_i (w_i - a_i)^2 \le 1,\ \forall w \in W, \tag{6}$$

$$q_i \le q_i^0,\ i = 1,\ldots,\ n. \tag{7}$$

При малых изменениях собственных значений q_i, $i = 1,\ldots,\ n$, целевую функцию можно линеаризовать.

Пусть матрица Q получена в результате решения задачи (5)–(7). Рассмотрим задачу: найти

$$\rho^* = \max(x-a,\ Q(x-a)) \tag{8}$$

при ограничениях

$$A_i x \le b_i,\ i \in I^*, \tag{9}$$

$$\|x\| \le r. \tag{10}$$

Очевидно, что для любого $\bar{\rho} \ge \rho^*$ имеет место $S_e \bigcap B \subseteq E(Q,\ \bar{\rho})$.

При вычислении верхних границ для ρ^* могут использоваться двойственные квадратичные оценки [9].

Рассмотрим частный случай, когда вне шара B находится только одна вершина v' симплекса S_e, т.е. $|V^1|=1$. Множество W в этом случае состоит из n точек.

Обозначим $L(v')=\{\ x:(x-v',p)=d\ \}$ – гиперплоскость, проходящая через совокупность точек W, $d>0$, $P(v')=\{\ x:(x-v',p)\ge d\ \}$. Нетрудно видеть, что $v'\notin P(v')$ и имеет место неравенство

$$\max\{\ (x-a,\ Q(x-a)):\ x\in S_e\bigcap B\bigcap P(v')\ \}\le 1. \tag{11}$$

Поэтому вместо (8)- (10) можно рассматривать задачу: найти

$$\bar{\rho}=\max(x-a,\ Q(x-a)), \tag{12}$$

$$A_i x\le b_i,\ i\in I^*, \tag{13}$$

$$\|x\|\le r, \tag{14}$$

$$(x-v',p)\le d. \tag{15}$$

С учетом (11) получаем $\rho^*\le\max(\bar{\rho},\ 1)$.

Ограничение (15) позволяет существенно сузить множество допустимых точек при определении оценки для величины ρ^*.

Обозначим $E'(Q',1)=\{\ x:(x-a',Q'(x-a'))\le 1\}$ эллипсоид минимального объема, описанный вокруг сегмента $\{x:(x-v',p)\le d,\ \|x\|\le r\}$. Очевидно, что ограничение

$$(x-a',Q'(x-a'))\le 1 \tag{16}$$

является избыточным для задачи (12)–(15). Это ограничение может использоваться при формировании квадратичной двойственной оценки.

Рассмотрим случай, когда вне шара B находится несколько вершин симплекса S_e, т.е. $|V^1|>1$. Задачи вида (12)–(15) формулируются отдельно для каждой вершины $v\in V^1$, ρ^* равно максимальному из полученных значений.

Заключение. Рассмотренные задачи имеют трудоемкость приближенного решения не меньше $O(n^3)$, при этом позволяют существенно улучшить показатель скорости сходимости модифицированного метода эллипсоидов. Использование таких методов оправдано в задачах, имеющих большую трудоемкость вычисления значений функций и субградиентов, что характерно для применения схем декомпозиции в математическом программировании.

Ю.П. Лаптін

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ФОРМУВАННЯ ОПИСАНИХ ЕЛІПСОЇДІВ

Розглядаються задачі, які виникають при розробці деяких модифікацій методів описаних еліпсоїдів – задача раціонального вибору найбільш суттєвих відсічень із сукупності, що накопичена на попередніх ітераціях, і задача формування описаного еліпсоїда навколо перетину кулі і симплекса.

Yu.P.Laptin

SOME PROBLEMS OF CIRCUMSCRIBED ELLIPSOID CONSTRUCTION

Some modifications of circumscribed ellipsoid methods are discussed. There are considered the problems which are important for such modifications – the problem of selecting the most essential cutting planes from a set of ones which were accumulated during previous iterations and the problem of circumscribed ellipsoid construction for intersection of sphere and simplex.

1. *Шор Н.З.* Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. – 1977.– № 1.– С. 94–95.
2. *Юдин Д.Б., Немировский А.С.* Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач // Экономика и математические методы. – 1976. – Т. 12, вып.2. – С. 357–369.
3. *Shor N. Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 381 p.
4. *Шор Н.З., Гершович В.И.* Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. – 1979.– № 4.– С. 62 – 67.
5. *Стецюк П.И.* Метод центров тяжести простых тел // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 5. – С.117–138.
6. *Журбенко Н.Г.* Об одном ε-субградиентном алгоритме минимизации // Теорія оптимальних рішень. – 2002. – № 1. – С. 111–118.
7. *Левин А.Ю.* Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций // Докл. Академии наук СССР. – 1965. – Т. 160.– С. 1244–1247
8. *Шор Н.З., Березовский О.А.* Построение эллипсоида максимального объема, вписанного в многогранник, с использованием последовательного растяжения пространства // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев: Наук. думка, 1992.– Вып.93. – С. 1 – 6.
9. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

Получено 14.06.2006