УДК 519.1

И.Э. ШУЛИНОК, В.Ю. КАЮРОВ

ОДНОРОДНЫЕ НАТУРАЛЬНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН

Для натуральных арифметических графов найден способ перечисления регулярных графов. Для этого вводится понятие графа разложения образующих. Доказано ряд утверждений о его свойствах, что дает возможность однозначно определить структуру регулярных графов.

Введение. В своем развитии теория графов соприкасается с различными задачами теоретического и прикладного характера. Некоторые такие задачи решаются непосредственно с помощью методов теории графов, а другие задачи для своего решения требуют определенной модификации обычных представлений графов. Это приводит к выделению из обширного класса графов таких подклассов, которые имеют свою специфику и могут быть по своей структуре и способу представления намного проще обычных графов.

Изучение числовых графов начато в 70-х годах прошлого века [1–4]. Однако многие свойства этих графов еще недостаточно изучены. Рассмотрим некоторые необходимые определения.

Определение 1. Числовым графом G называется тройка $G=(X,U,F)$, где $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – множество вершин; $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ – множество образующих; F – некоторая порождающая однозначная функция двух аргументов, обладающая свойством

$$\forall u \in U \, \exists (x_i, x_j) \in X \, [F(x_i, x_j) = u]. \qquad (1)$$

Относительно множеств X и U предполагается, что их элементами могут быть произвольные объекты: числа, векторы, матрицы и т.д. Однако наибольший интерес представляет случай, когда элементы множеств X и U – числа (целые, рациональные, действительные, комплексные), а в качестве F дана функция на множестве действительных чисел. В зависимости от вида функции F получаются различные графы, среди которых наибольший интерес представляют натуральный арифметический (*NA*-граф) и натуральный модульный (*NM*-граф). Это название они получили потому, что для них $X = N_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$.

Определение 2. Матрицей образующих для произвольного *NA*-графа $G = (X,U)$ называется матрица $A(G) = (a_{ij})$, у которой $a_{ij} = i + j$, если существует такое $u \in U$, что $u = i + j$, и $a_{ij} = 0$ – для остальных значений i, j.

Матрица образующих для полного *NA*-графа имеет вид

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 0 & 5 & 6 & \cdots & n+1 & n+2 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & \cdots & n+2 & n+3 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & \cdots & n+3 & n+4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 0 & 2n-1 \\ n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & \cdots & 2n-1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Рассмотрим условия, при которых натуральный граф будет однородным (регулярным), когда степени всех его вершин равны числу $\rho \geq 1$. Частичные результаты, когда натуральные графы являются набором циклов, получены в [5].

По определению матрицы образующих (2) степень любой вершины x_i равна числу ненулевых элементов матрицы в i-м столбце или строке с тем же номером. Рассмотрим однородные степени ρ *NA*-графы, т.е. графы, у которых каждая строка или столбец матрицы образующих содержит ровно ρ ненулевых элементов.

В отличие от главной диагонали матрицы, состоящей из элементов $a_{ii} = 0$, боковой диагональю назовем совокупность элементов a_{ij}, где $i + j = n + 1$. Множества элементов матрицы, параллельных диагоналям, будем называть соответственно главными или боковыми линиями. По определению каждая боковая линия, содержащая хотя бы один ненулевой элемент, соответствует одной образующей из множества (3, 4,…. , 2*n*-1). Если эта образующая нечетная, то ее линия не пересекается с главной диагональю, и все ее элементы равны, если же она четная, то один элемент ее линии принадлежит диагонали и равен нулю.

Определим условия, которым должно отвечать множество образующих, чтобы *NA*-граф был регулярным степени $\rho = 1$.

Так как каждая боковая линия лежит либо выше боковой диагонали для $u < n+1$, либо ниже для $u > n+1$, то одной образующей не достаточно для регулярности графа. Выберем две образующие. Если $u_1 < n+1$, то первые $u_1 - 1$

столбцов содержат по одному ненулевому элементу. Остальные столбцы должна покрывать образующая u_2, поэтому ее значение определяется однозначно: $u_2 = n + u_1$.

Если хотя бы одна из образующих u_1 или $n + u_1$ четная, то в соответствующей линии матрицы существует нулевой элемент, который нарушает регулярность графа. Поэтому необходимо, чтобы u_1 и $n + u_1$ обе были нечетными. Тогда n всегда четное, поэтому справедлива

Лемма 1. Не существует регулярных степени 1 *NA*-графов с нечетным числом вершин.

Этот результат для обычных графов легко получить, так как регулярный степени 1 граф является совершенным паросочетанием, а для нечетного n его не существует. На основании этого утверждения можно сделать вывод, что для регулярности графа к каждой образующей $u < n+1$ должна добавляться образующая $n + u$, и наоборот, к каждой образующей $v > n+1$ должна добавляться образующая $v - n$.

Кроме того, любой четной образующей u_i в матрице на месте $\left(\frac{u_i}{2}, \frac{u_i}{2}\right)$ соответствует нулевой элемент, что тоже может нарушать регулярность графа. Поэтому для соблюдения регулярности графа необходимо ввести еще две образующих: левую $u_{i-1} = \frac{u_i}{2} + 1$ и правую $u_{i+1} = \frac{u_i}{2} + n$, которые компенсируют указанный нулевой элемент, но в сумме увеличивают степень регулярности графа на 1. Если какая-то из добавленных образующих окажется четной, то процесс добавления двух новых образующих продлится до тех пор, пока либо он зациклится, либо все новые образующие окажутся нечетными. Для количества левых образующих существенную роль играет степень двойки в разложении образующей u на множители, а для правых образующих – те же свойства числа n.

Для того чтобы изучить детальнее зависимости между образующими в регулярном графе, введем в рассмотрение граф разложения образующих $R(n)$, вершинами которого являются все образующие n-вершинного *NA*-графа, число которых $N = 2n - 3$. Все четные образующие u связаны ребрами с образующими $\frac{u}{2} + 1$ и $n + \frac{u}{2}$. Всем нечетным образующим соответствует висячая вершина, так как на них процесс разложения образующих заканчивается. По понятным причинам обозначим $R_1(n)$ [$R_0(n)$] граф для нечетных (четных) n.

Пусть $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$. Если выбрать нечетную образующую, то ее дополнение будет четной величиной, и необходимо добавить две образующие в процессе ее разложения. Рассмотрим обратный процесс построения всех четных образующих, начиная со всех нечетных, например для $n = 29$. На рисунке представлен граф $R_1(29)$, состоящий из трех компонент: бинарное дерево с корнем $n+1=30$ и два цикла длиной 3, вершинам которого инцидентны такие же бинарные деревья.

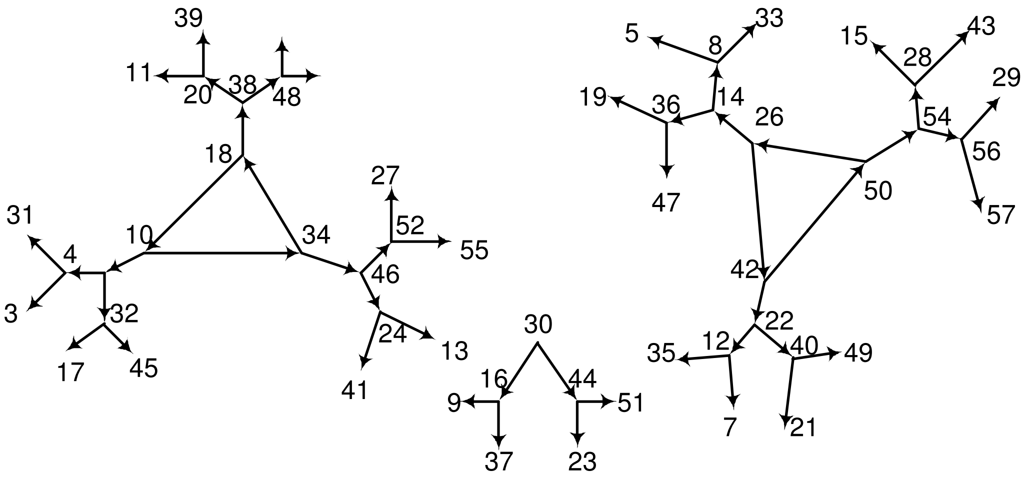

РИСУНОК. Граф $R_1(29), n=2^2(2\cdot 3+1)+1, m=3, \beta=2$

Число возможных образующих $2n-3=55$. Расположим на самом нижнем (нулевом) уровне все нечетные образующие от 3 до $2n-1$. Их можно разбить на следующие пары: $(x_0,y_0)=(2k+1,n+2k)$, где $k=1,2,\ldots,\dfrac{n-1}{2}$ и разница между ними равна $n-1$. Очевидно, на эти пары разлагаются четные образующие вида $u=4k$. Будем считать, что эти образующие составляют первый уровень. Соединим их дугами, направленными сверху вниз, с соответствующими вершинами нулевого уровня. Вершины первого уровня зависят от левых вершин нулевого уровня по формуле $x_1=2(x_0-1)=4k$. Аналогично они зависят от правых вершин нулевого уровня по формуле $x_1=2(y_0-n)$. В данном примере это вершины (4, 8, 12, ..., 52, 56). Если среди вершин первого уровня существуют пары вершин (x_1,y_1), разница кодов которых y_1-x_1 равна $n-1$, то их можно соединить ребрами с вершиной второго уровня. Присваиваем ей код по тому же правилу: $x_2=2(x_1-1)$, где x_1 – код левой вершины первого уровня, или $x_2=2(y_1-n)$. Очевидно, все остальные вершины первого уровня объединятся в такие пары и будут вершинами второго уровня. В данном примере это вершины (6, 14, 22, 30, 38, 46, 54). На каждом уровне вершин в два раза меньше, чем на нижнем. Подобные построения закончатся тогда, когда на самом верхнем уровне коды любых вершин x_i, x_j будут удовлетворять условию $\left|x_i - x_j\right| \neq n-1$. Если взять какую-либо вершину k -го уровня и спуститься по левым ребрам в самую нижнюю вершину x_0, то нетрудно установить зависимость $x_k = 2^k x_0 - 2^{k+1} + 2$. По этой причине коды k -го уровня ($k \geq 1$) составляют арифметическую прогрессию с начальным элементом $a = 3 \cdot 2^k - 2^{k+1} + 2$ и разностью $d = 2^{k+1}$, т.е. коды $(2l-1)2^k + 2$, где $l = 1,2,\ldots$.

Лемма 2. Число уровней графа разложения $R_1(n)$ равно β, которое определяется из условия $n = 2^\beta(2m+1)+1$.

Очевидно, $\beta \geq 1$, поэтому первый уровень всегда существует для любого *NA*-графа. На нулевом уровне число вершин $2(n-1)/2 = n-1 = 2^\beta(2m+1)$. Затем оно уменьшается в два раза на каждом уровне и на самом верхнем уровне становится равным $2m+1$. В сумме число вершин на всех уровнях равно $(2m+1)(1+2+4+\cdots+2^\beta) = (2m+1)(2^{\beta+1}-1)$. Так как все нечетные образующие учтены на нулевом уровне, а всего образующих $2n-3 = 2^{\beta+1}(2m+1)-1$, то остаются еще четные образующие, не принадлежащие ни одному уровню, и их количество равно $2m$. Назовем эти образующие остаточным множеством. Данные значения составляют арифметическую прогрессию с начальным членом $a = 2^{\beta+1}+2$ и разностью $d = 2^{\beta+1}$, т.е. $u_i = i \cdot 2^{\beta+1} + 2 \quad (i = 1,2,\ldots 2m)$. В этом примере это (10, 18, 26, 34, 42, 50). Каждая такая образующая разлагается на $v_1 = \dfrac{u_i}{2} + 1 = i \cdot 2^\beta + 2$ и $v_2 = \dfrac{u_i}{2} + n = i \cdot 2^\beta + n + 1 = 2^\beta(2m+i+1)+2$. Если $i = 2l$ четное, то $v_2 = (2m+2l+1)2^\beta + 2$ принадлежит наименьшему уровню, а $v_2 = l \cdot 2^{\beta+1} + 2$ – остаточному множеству. Если $i = 2l-1$ нечетное число, то образующая $v_1 = (2l-1)2^\beta + 2$ принадлежит наивысшему уровню, а $v_2 = 2^\beta(2m+2l) + 2 = 2^{\beta+1}(m+l)+2$ – остаточному множеству. Это означает, что образующая из верхнего уровня является корнем бинарного дерева, висячие вершины которого принадлежат нулевому уровню. Другим ребром образующие верхнего уровня соединены с образующими из остаточного множества. Так как вершины остаточного множества – четные образующие, то от них идет одно ребро в вершины верхнего уровня, а другое – в вершину этого же множества. Поэтому подграф графа $R_1(n)$ на данном множестве образует циклы.

Образующая $u = n+1$ принадлежит наивысшему уровню β, так как $n+1 = 2^\beta(2m+1)+2$. С другой стороны она не связана с остаточным множеством, так как иначе существовала бы образующая из этого множества χ, которая по формулам должна быть либо $2(n+1-1)=2n$, либо $2(n+1-n)=2$. Однако таких образующих в *NA*-графе не существует, так как $3 \le u_i \le 2n-1$.

Таким образом, конструкция графа $R_1(n)$ становится ясной. Он состоит из набора циклов одинаковой длины с общим числом вершин $2m$, и каждая из этих вершин соединена с бинарным деревом с наибольшим уровнем β. Кроме того, существует отдельная компонента, которая является таким же деревом с верхней вершиной (корнем) $u=n+1$.

Заключение. Изучение регулярности натуральных арифметических графов может послужить началом для решения проблемы изоморфизма числовых графов; структура регулярных графов определяется заданием числа вершин и их степенью. Это поможет в дальнейшем решать новые проблемы, которые частично уже затронуты в [6–7].

І.Е. Шулінок, В.Ю. Каюров

ОДНОРІДНІ НАТУРАЛЬНІ АРИФМЕТИЧНІ ГРАФИ З НЕПАРНИМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН

Для натуральних арифметичних графів знайдено спосіб переліку регулярних графів. Вводиться поняття графа розкладу твірних. Доведено низку тверджень про його властивості, що дає змогу однозначно визначати структуру регулярних графів.

I.E. Shulinok, V.Yu. Kayurov

HOMOGENEOUS NATURAL ARITHMETICAL GRAPHS WITH ODD NAMBER OF VERTICES

A way of enumeration of regular graphs for natural arithmetical graphs was found. A definition of graphs decomposition of generatrixes was introduced. It is proved some statements about its properties. This gives a possibility to determine uniquely the structure of regular graphs.

1. *Асельдеров З.М., Донец Г.А.* Представление и восстановление графов. - Киев: Наук. думка, 1991. – 178 с.
2. *Григорьян Ю.Г.* Классификация и статистические свойства арифметических графов // Кибернетика. – 1979. – №6. – С. 9–12.
3. *Григорьян Ю.Г., Адонц А.М.* Свойства регулярних натуральних арифметических графов // Там же. – 1990. – №5. – С. 112–113.
4. *Донець Г.П., Нєженцев Ю.І.* Арифметичні графи та їх представлення // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1990. – №11. – С. 5–8.
5. *Донец Г.А., Шулинок И.Э.* Оптимальное представление однородных деревьев первого ранга в классе А-графов // Компьютерная математика. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2001. –Т.2. – С. 61–68.

6. *Донец Г.А.* Необходимые и достаточные условия связности арифметических графов // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 1992. – С. 69–74.
7. *Донец Г.А., Асельдерова И.М.* Условия однородности арифметических графов // Оптимизация и ее приложения. –Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 1993. – С. 23–30.

Получено 07.07.2006