ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

УДК 519.1

И.Э. ШУЛИНОК, Л.П. ПЕТРЕНЮК, А.Я. ПЕТРЕНЮК

ПОСТРОЕНИЕ *T*-ФАКТОРИЗАЦИЙ ПОРЯДКА 12 ДЛЯ ДЕРЕВЬЕВ С $\Delta(T) = 4$

Исследуется задача существования T-факторизаций полного графа K_{12}. Доказано, что существуют не меньше 250 допустимых деревьев порядка 12, для которых существуют T-факторизации.

Введение. Исследуется задача существования T-факторизаций полного графа K_{12}. Доказано, что существуют не менее 250 допустимых деревьев порядка 12, для которых существуют T-факторизации.

Формулировка задачи и предварительные сведения. Для дерева T порядка n и полного графа K_n *T-факторизацией* графа K_n называют такую совокупность деревьев $\{T_1, T_2,\ldots, T_k\}$, что: 1) все T_i изоморфны дереву T; 2) все T_i – подграфы графа K_n; 3) каждое ребро графа K_n принадлежат одному и только одному из деревьев $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Выяснить, существует или нет T-факторизация графа K_n для заданого дерева T (такую задачу сформулировал в 1964 г. Л. Байнеке [1]).

Л. Байнеке установил необходимые условия существования T-факторизации порядка n: 1) четность числа n, $n = 2k$; 2) выполнение неравенства $\Delta(T) \leq k$, где $\Delta(T)$ – наивысшая степень вершины в дереве T. Деревья, удовлетворяющие условиям Байнеке, называют допустимыми.

Современное состояние задачи. Следующие шаги на пути решения этой задачи: Ш. Хуанг и А. Роса [2] в 1978 г. нашли ответ для всех порядков n, $n \leq 8$, а затем А.Я. Петренюк [3, 4] решил ее в случае $n = 10$ полностью и, за исключением 20 деревьев, в случае $n = 14$.

Достичь успеха в случаях $n = 10$ и $n = 14$ удалось благодаря необходимым условиям существования T-факторизаций, найденным автором статей [3,4], и бициклическому методу построения T-факторизаций, посредством которого осуществлены построения T-факторизаций в случаях их существования.

Несуществование T-факторизаций порядка 12 изложено в [5]; при получении ее результатов применены вышеупомянутые и найдены новые необходимые условия существования. О существовании T-факторизаций порядка 12 идет речь в [6, 7, 8, 9]. Дополнительные трудности при построении T-факторизаций порядков $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$ обусловлены несуществованием в этих случаях бициклических T-факторизаций [3, 4]. На сегодня известно: 1) о существовании T-факторизаций для 20 полусимметричных деревьев порядка 12 (эти T-факторизации построены полувращательным методом [6]); 2) о существовании 98 допустимых деревьев порядка 12 с $\Delta(T) = 3$, для которых T-факторизации существуют [7].

Алгоритм построения T-факторизаций и результаты, полученные с помощью программы, построенной на его основе, изложены в [7].

Основной результат. С помощью программы (см. [7]) авторы настоящей статьи исследовали существование T-факторизаций для деревьев порядка 12 с $\Delta(T) = 4$. Ниже приводятся T-факторизации для 50 деревьев этого класса. Под каждым номером дано дерево T в канонической форме и компоненты соответствующей T-факторизации. Деревья изображаются списками их ребер.

1.	12 13 14 15 26 27 38 49 8A 8B 9C	16 1B 1C 23 24 25 2C 47 58 59 7A
	17 29 35 45 57 67 6C 78 89 9A BC	18 28 37 3A 48 4A 5A 6B 7C 9B AB
	19 2B 3C 46 4B 56 5C 68 69 79 AC	1A 2A 34 36 39 3B 4C 5B 6A 7B 8C
2.	12 13 14 15 26 27 38 39 4A 5B 6C	16 1C 23 28 29 2C 34 35 7C 8A 9B
	17 2B 3A 3B 46 4C 59 67 69 6B 78	18 25 3C 45 49 4B 6A 7A 8B AB BC
	19 1B 2A 37 47 5C 68 79 89 9C AC	1A 24 36 48 56 57 58 5A 7B 8C 9A
3.	12 13 14 15 26 27 38 39 4A 5B AC	16 2A 34 37 56 57 5A 5C 6B 8C 9C
	17 19 28 29 3B 46 58 69 6C 9B AB	18 24 25 2B 3A 3C 47 48 4C 67 89
	1A 1B 23 36 49 59 6A 78 7A 7C 9A	1C 2C 35 45 4B 68 79 7B 8A 8B BC
4.	12 13 14 15 26 27 38 39 4A 6B 7C	16 17 2C 36 46 4B 4C 56 58 59 AB
	18 29 37 45 5A 69 78 79 7A AC	19 2A 35 3B 47 48 6A 8A 8B 8C 9B
	1A 24 3C 49 57 5B 5C 68 6C 9A 9C	1B 1C 23 25 28 2B 34 3A 67 7B 89
5.	12 13 14 15 26 27 38 39 4A 6B 8C	16 1B 2A 3A 3C 45 59 7B 89 9B AB
	17 1C 23 24 25 46 47 48 5B 6A 79	18 2B 34 37 57 6C 7C 8B 9A 9C BC
	19 28 36 49 4B 58 5C 67 68 69 7A	1A 29 2C 35 3B 4C 56 5A 78 8A AC
6.	12 13 14 15 26 27 38 39 4A 6B AC	16 28 29 2B 3B 49 5A 5B 5C 67 7B
	17 1B 24 2A 37 46 47 57 58 59 BC	18 1C 23 34 36 56 68 69 78 9A AB
	19 25 3C 45 4B 4C 6A 7A 7C 89 9C	1A 2C 35 3A 48 6C 79 8A 8B 8C 9B
7.	12 13 14 15 26 27 38 39 4A 6B BC	16 23 3C 46 57 5B 5C 6C 78 89 AC
	17 18 2C 3B 4C 56 67 69 9A 9B 9C	19 24 2A 34 48 49 59 68 7B 7C 8B
	1A 2B 36 3A 47 4B 58 79 7A 8A 8C	1B 1C 25 28 29 35 37 45 5A 6A AB
8.	12 13 14 15 26 27 38 39 4A AB BC	16 2C 3C 46 57 58 69 8A 9A 9B 9C
	17 23 3B 4B 4C 5C 68 7A 7C 8C	18 1B 1C 2B 36 3A 47 56 5B 79 7B

	19 24 2A 34 48 49 59 6A 6C 78 8B	1A 25 28 29 35 37 45 5A 67 6B AC
9.	12 13 14 15 26 27 38 39 6A 6B AC.	16 1A 1B 23 28 29 2A 34 35 6C 7A
	17 2C 3C 49 56 59 5A 5C 78 79 8B	18 24 36 45 46 48 67 7B 7C 89 AB
	19 25 37 4A 57 5B 69 8A 9A 9B BC	1C 2B 3A 3B 47 4B 4C 58 68 8C 9C
10.	12 13 14 15 26 27 38 39 6A 7B 8C	16 1C 24 34 37 3A 45 46 68 79 AB
	17 1A 25 35 47 56 57 69 6B 89 BC	18 2B 36 3B 48 49 4A 58 7A 8B 9C
	19 2A 3C 4B 59 5B 5C 6C 78 8A AC	1B 23 28 29 2C 4C 5A 67 7C 9A 9B
11.	12 13 14 15 26 27 38 39 6A 7B AC	16 24 34 37 3A 45 46 68 79 9C AB
	17 25 35 47 56 57 69 6B 89 8A BC	18 1A 23 2A 2B 2C 4C 59 6C 78 9A
	19 29 36 3C 4B 5A 5B 5C 7A 8B 9B	1B 1C 28 3B 48 49 4A 58 67 7C 8C
12.	12 13 14 15 26 27 38 39 6A 8B AC	16 1B 24 34 37 3A 45 46 68 79 9C
	17 1A 25 35 47 56 57 69 6B 89 8C	18 2A 3C 4B 58 67 78 7C 8A 9A 9B
	19 23 28 29 2B 49 4C 5B 6C 7A AB	1C 2C 36 3B 48 4A 59 5A 5C 7B BC
13.	12 13 14 15 26 27 38 39 6A AB BC	16 28 36 47 57 5B 5C 67 7A 89 9C
	17 1A 1C 2B 2C 3A 49 5A 69 8B 9A	18 24 29 2A 34 45 48 6B 6C 78 7B
	19 25 35 4B 4C 58 59 68 79 7C 8A	1B 23 37 3B 3C 46 4A 56 8C 9B AC
14.	12 13 14 15 26 27 38 49 5A 6B 6C	16 25 2C 36 3B 3C 48 4C 67 9A 9C
	17 2B 34 35 46 47 4A 69 7B 8A BC	18 19 1A 23 28 4B 58 5C 6A 7A 8B
	1B 24 29 37 39 56 59 5B 89 8C AB	1C 2A 3A 45 57 68 78 79 7C 9B AC
15.	12 13 14 15 26 27 38 49 5A 6B 7C	16 25 2C 36 3B 3C 48 4C 67 9A 9C
	17 2B 34 35 46 47 4A 69 7B 8A BC	18 19 1A 23 28 4B 58 5C 6A 7A 8B
	1B 24 29 37 39 56 59 5B 89 8C AB	1C 2A 3A 45 57 68 78 79 7C 9B AC
16.	12 13 14 15 26 27 38 49 5A 8B 8C	16 1A 2C 37 45 4A 58 59 7A 7B AC
	17 1C 24 25 2A 36 47 67 79 89 9B	18 28 39 3B 48 4B 5C 6A 6B 7C BC
	19 23 29 34 35 3A 46 57 8A 9C AB	1B 2B 3C 4C 56 5B 68 69 6C 78 9A
17.	12 13 14 15 26 27 38 49 5A 8B 9C	16 25 29 35 3A 45 48 56 67 8C 9B
	17 23 28 34 36 37 4B 57 6A 89 AC	18 1A 2A 2B 39 4A 4C 59 6C 7B 9A
	19 1B 2C 3C 46 58 5B 6B 79 8A BC	1C 24 3B 47 5C 68 69 78 7A 7C AB
18.	12 13 14 15 26 27 38 49 6A 6B 7C	16 19 25 28 35 37 45 59 9A AB AC
	17 1B 23 36 3A 3B 4C 5C 69 8A BC	18 24 29 34 47 48 57 5A 5B 67 6C
	1A 2C 39 4A 56 68 78 79 7A 8B 8C	1C 2A 2B 3C 46 4B 58 7B 89 9B 9C
19.	12 13 14 15 26 27 38 49 6A 6B 8C	16 2B 2C 3C 46 56 5A 5C 78 79 9C
	17 23 39 3A 3B 4A 4C 5B 67 7B 89	18 1A 24 29 34 47 48 57 6C 7C BC
	19 25 28 35 37 45 59 68 9A AB AC	1B 1C 2A 36 4B 58 69 7A 8A 8B 9B
20.	12 13 14 15 26 27 38 49 6A 8B 8C	16 19 1C 23 24 29 2A 45 78 8A AB
	17 2C 39 46 57 58 5C 67 7A 9A 9B	18 28 3A 3B 48 4B 5B 69 6C 7C BC
	1A 25 37 4A 4C 56 59 5A 68 79 7B	1B 2B 34 35 36 3C 47 6B 89 9C AC
21.	12 13 14 15 26 27 38 49 6A AB AC	16 24 28 2C 36 46 58 5B 7A 89 8A
	17 23 29 45 56 5A 67 79 8B 9B 9C	18 19 25 39 47 4B 57 68 78 7C 9A
	1A 2A 3A 3B 48 4C 5C 69 6C 7B BC	1B 1C 2B 34 35 37 3C 4A 59 6B 8C
22.	12 13 14 15 26 27 38 49 6A AB BC	16 17 23 3B 4B 4C 5B 69 78 7B 9A
	18 25 2B 39 3C 45 56 5C 67 89 AC	19 2C 34 36 47 57 6B 7C 8A 8C 9C

	1A 24 35 48 58 59 68 6C 79 7A 8B	1B 1C 28 29 2A 37 3A 46 4A 5A 9B
23.	12 13 14 15 26 27 38 49 8A 8B 9C	16 1A 1C 23 24 25 2C 47 58 59 7B
	17 29 35 45 57 67 6C 78 89 9B AC	18 28 37 3B 48 4B 5B 6A 7C 9A AB
	19 2A 3C 46 4A 56 5C 68 69 79 BC	1B 2B 34 36 39 3A 4C 5A 6B 7A 8C
24.	12 13 14 15 26 27 38 49 8A 8B AC	16 29 2C 35 3A 45 56 58 67 89 9B
	17 2A 3B 46 5A 5C 68 6A 7A 9C BC	18 2B 3C 47 4A 4B 59 5B 6B 6C 8C
	19 1A 1C 23 24 25 36 37 39 78 AB	1B 28 34 48 4C 57 69 79 7B 7C 9A
25.	12 13 14 15 26 27 38 49 8A 9B AC	16 1A 23 24 25 56 57 58 79 9C AB
	17 29 39 3B 47 5A 5C 6B 7B 8B 8C	18 2C 37 3C 4B 4C 5B 69 6A 6C 78
	19 1C 28 2B 36 45 46 48 4A 59 67	1B 2A 34 35 3A 68 7A 7C 89 9A BC
26.	12 13 14 15 26 27 38 49 8A AB AC	16 19 29 34 36 37 3C 4A 59 78 7B
	17 25 2C 39 4B 58 5A 6B 79 9B 9C	18 23 28 35 48 56 57 5B 69 7A 7C
	1A 2A 2B 3A 47 4C 5C 68 89 8C BC	1B 1C 24 3B 45 46 67 6A 6C 8B 9A
27.	12 13 14 15 26 27 38 49 8A AB BC	16 1B 23 24 25 56 57 58 7A 9B 9C
	17 28 37 4B 4C 5B 68 6C 78 89 9A	18 19 2A 34 35 3A 3B 5C 6A 79 7B
	1A 2B 39 3C 47 5A 69 6B 7C 8C AC	1C 29 2C 36 45 46 48 4A 59 67 8B
28.	12 13 14 15 26 27 38 69 6A 7B 8C	16 19 1A 24 27 34 45 46 67 7C 8B
	17 23 36 39 3A 4B 58 5A 5C 79 AB	18 25 35 47 49 4A 56 57 6B 78 BC
	1B 2A 2B 2C 3C 48 5B 6C 7A 89 9C	1C 29 37 3B 4C 59 68 8A 9A 9B AC
29.	12 13 14 15 26 27 38 69 6A 7B 9C	16 19 1A 24 28 34 45 46 67 7C 9B
	17 23 36 39 3A 48 59 7A 8A 8B BC	18 25 35 47 49 4C 56 57 6B 78 9A
	1B 2B 37 3B 4A 58 5B 5C 6C 89 AC	1C 29 2A 2C 3C 4B 5A 68 79 8C AB
30.	12 13 14 15 26 27 38 69 6A 7B BC	16 19 1B 24 28 34 45 46 67 7A AC
	17 29 3B 4B 58 5A 68 79 9A 9C AB	18 2A 2B 2C 37 3C 4C 5B 6C 8A 9B
	1A 23 36 39 3A 48 59 5C 7C 89 8B	1C 25 35 47 49 4A 56 57 6B 78 8C
31.	12 13 14 15 26 27 38 69 6A 8B 9C	16 19 1A 24 28 34 45 46 67 8C 9B
	17 25 35 47 4A 4B 56 57 68 89 AC	18 29 2A 2B 39 4C 58 5C 6C 7B BC
	1B 2C 3B 3C 48 5A 6B 78 79 7A AB	1C 23 36 37 3A 49 59 5B 7C 8A 9A
32	12 13 14 15 26 27 38 69 6A 8B BC	16 19 1B 24 28 34 45 46 67 8A AC
	17 25 35 47 4A 4B 56 57 68 89 9C	18 23 36 37 3C 48 5C 79 8C 9A AB
	1A 2B 2C 39 49 58 59 5A 6C 7A 9B	1C 29 2A 3A 3B 4C 5B 6B 78 7B 7C
33.	12 13 14 15 26 27 38 69 6A 9B 9C	16 24 34 37 39 45 46 78 7A 8B 8C
	17 25 35 48 49 4C 56 57 68 6B 8A	18 1A 1C 2B 3A 47 5C 67 7C 9A AB
	19 23 29 2A 36 3B 4B 58 79 89 BC	1B 28 2C 3C 4A 59 5A 5B 6C 7B AC
34.	12 13 14 15 26 27 38 69 6A 9B AC	16 19 1A 24 28 34 45 46 67 9C AB
	17 25 35 47 49 4B 56 57 68 9A BC	18 29 2A 2C 3A 48 59 6B 7C 89 8B
	1B 23 36 37 3B 4C 5A 5B 5C 79 8A	1C 2B 39 3C 4A 58 6C 78 7A 7B 8C
35.	12 13 14 15 26 27 38 69 7A 9B 9C	16 1A 24 27 34 45 46 67 79 AB AC
	17 18 25 35 47 49 56 57 6A 8B 8C	19 2C 37 3C 48 4B 59 5B 6C 9A BC
	1B 29 2A 2B 3B 4A 58 68 7B 7C 89	1C 23 36 39 3A 4C 5A 5C 6B 78 8A
36.	12 13 14 15 26 27 38 69 6A 9B BC	16 19 1B 24 28 34 45 46 67 9A AC
	17 25 35 47 48 4A 56 57 6B 89 9C	18 2B 2C 3A 4C 5B 68 78 79 8A AB

1A 29 2A 3B 3C 49 58 5A 5C 6C 7C 1C 23 36 37 39 4B 59 7A 7B 8B 8C

37. 12 13 14 15 26 27 38 69 7A 8B 9C 16 1B 24 34 37 39 45 46 78 8C 9A
17 19 25 35 48 4C 56 57 68 6A AB 18 2B 3A 3B 3C 4B 59 6C 79 7B 8A
1A 2C 36 49 58 5A 5C 6B 7C 89 BC 1C 23 28 29 2A 47 4A 5B 67 9B AC

38. 12 13 14 15 26 27 38 69 7A 8B BC 16 1A 24 34 37 39 45 46 78 9B BC
17 19 25 35 48 56 57 68 6A 9C AB 18 23 29 2A 2B 47 49 5A 5C 6C 89
1B 2C 36 3A 3B 44B 58 5B 67 8C 9A 1C 28 3C 4A 4C 59 6B 79 7B 7C 8A

39. 12 13 14 15 26 27 38 69 7A 9B 9C 16 1A 24 28 34 45 46 67 79 AB AC
17 18 25 35 47 49 56 57 6A 8B 8C 19 2C 37 3C 48 4B 59 5B 6C 9A BC
1B 29 2A 2B 3B 4A 58 68 7B 7C 89 1C 23 36 39 3A 4C 5A 5C 6B 78 8A

40. 12 13 14 15 26 27 38 69 7A 9B AC 16 24 34 37 39 45 46 78 8C 9A AB
17 25 35 4A 4B 56 57 68 6A 89 9C 18 2A 3B 3C 48 59 6C 79 7B 8A 8B
19 23 28 29 2B 47 5A 5C 67 6B BC 1A 1B 1C 2C 36 3A 49 4C 58 5B 7C

41. 12 13 14 15 26 27 38 69 7A 9B BC 16 24 34 37 39 45 46 78 8A 9C AB
17 25 35 49 4B 56 57 68 6A 89 AC 18 2B 3A 3B 3C 4C 58 5A 6B 79 7B
19 1C 23 28 29 2A 4A 59 5B 67 7C 1A 1B 2C 36 47 48 5C 6C 8B 8C 9A

42. 12 13 14 15 26 27 38 69 8A 8B 9C 16 18 24 29 34 45 46 67 8C 9A 9B
17 1B 25 35 48 56 57 68 7A 89 BC 19 28 2A 2B 3B 49 4B 59 6B 7C AC
1A 2C 3A 3C 4C 58 5A 5B 6A 79 7B 1C 23 36 37 39 47 4A 5C 6C 78 AB

43. 12 13 14 15 26 27 38 69 8A 8B AC 16 1A 24 28 34 45 46 67 89 8C 9B
17 18 25 35 47 56 57 6A 9A 9C AB 19 23 36 37 3A 48 4A 4C 58 79 7B
1B 29 2A 39 3B 49 5B 6C 78 7C BC 1C 2B 2C 3C 4B 59 5A 5C 68 6B 7A

44. 12 13 14 15 26 27 38 69 8A 9B 9C 16 28 2B 2C 34 45 46 47 68 79 9A
17 19 29 3C 4A 4C 5A 67 7A 7B 8C 18 24 25 35 49 57 58 6A 6B 6C 8B
1A 2A 37 3A 4B 56 59 5C 78 AB BC 1B 1C 23 36 39 3B 48 5B 7C 89 AC

45. 12 13 14 15 26 27 38 69 8A 9B AC 16 1A 24 34 37 39 45 46 78 8C AB
17 19 25 35 48 4B 56 57 68 6A 9C 18 2B 3B 3C 47 5C 67 7A 7B 89 9A
1B 2C 36 3A 4A 58 59 6C 7C 8B BC 1C 23 28 29 2A 49 4C 5A 5B 6B 79

46. 12 13 14 15 26 27 38 69 8A 9B BC 16 1B 24 34 37 39 45 46 78 8C AC
17 1C 25 35 49 4B 56 57 68 6A 89 18 2C 36 3A 3C 48 4A 5B 7B 7C 9C
19 23 28 29 2B 47 59 5A 6B 6C 7A 1A 2A 3B 4C 58 5C 67 78 8B 9A AB

47. 12 13 14 15 26 27 38 69 8A AB AC 16 1A 24 28 34 45 46 67 89 9B 9C
17 19 25 35 4A 4B 4C 56 57 6A 78 18 29 2A 2C 3C 48 5C 6B 6C 79 8B
1B 2B 3A 3B 47 58 59 5B 68 7A 7C 1C 23 36 37 39 49 5A 7B 8C 9A BC

48. 12 13 14 15 26 27 38 69 8A AB BC 16 1B 26 34 37 39 45 46 7A 8B 8C
17 1C 25 35 48 56 57 68 6A 9B 9C 18 2C 3C 47 58 5B 6B 6C 79 7C 9A
19 23 28 29 2A 4A 4B 59 5C 67 7B 1A 2B 36 3A 3B 49 4C 5A 78 89 AC

49. 12 13 14 15 26 27 38 69 9A 9B AC 16 1B 24 28 34 45 46 67 9C AB BC
17 18 25 35 48 4C 56 57 6A 79 8B 19 29 2B 37 49 5C 68 6C 7C 89 8A
1A 2A 2C 39 3B 47 4B 5A 6B 78 7A 1C 23 36 3A 3C 4A 58 59 5B 7B 8C

50. 12 13 14 15 26 27 38 69 9A AB AC 16 1A 24 29 34 45 46 67 8A 8B 8C
17 18 25 35 47 56 57 6A 89 9B 9C 19 28 2A 2B 36 3B 4B 59 5A 79 BC

1B 2C 3C 48 49 4C 5B 68 6B 7A 7C   1C 23 37 39 3A 4A 58 5C 6C 78 7B.

Заключение. В последующих публикациях авторы продолжат этот список. Общее количество деревьев порядка 12 с $\Delta(T) = 4$, для которых известны T-факторизации, превышает 120. Всего на момент написания данной статьи известно более 250 деревьев порядка 12 (всего их 551 дерево), для которых задача Байнеке полностью решена.

І.Е. Шулінок, Л.П. Петренюк, А.Я. Петренюк

ПОБУДОВА T-ФАКТОРИЗАЦІЙ ПОРЯДКУ 12 ДЛЯ ДЕРЕВ С $\Delta(T) = 4$

Досліджується задача існування T-факторизацій повного графу K_{12}. Доведено, що є не менше 250 допустимих дерев порядку 12, для яких існують T-факторизації.

I.E. Shoolinock, L. P. Petrenjuk, A.J. Petrenjuk

CONSTRUCTION T-FACTORIZATIONS OF THE ORDER 12 FOR TREES WITH $\Delta(T) = 4$

The existence problem for T-factorizations of the complete graph K_{12} is investigated . With computer aid, more than 250 T-factorizations are constructed for some admissible non-isomorphic trees of the order.

1. *Beineke L.W.* Decomposition of complete graphs into forests // Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl. – 1964. – N 9. – P. 589–594.
2. *Huang C., Rosa A.* Decomposition of complete graphs into trees // Ars Combinatoria – 1978. – N 5. – P. 23–63.
3. *Petrenjuk A.J.* On tree factorizations of K_{10} // J. of Combin. Math. and Combin. Computing – 2002. – **41**. – P. 193–202.
4. *Петренюк А.Я.* Древесные факторизации полных графов: существование, построение, перечисление // Материалы 7 Междунар. семинара “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 29 января – 2 февраля 2001 г.). – М., 2001. – С. 26 – 30.
5. *Петренюк А.Я.* Неіснування деяких T-факторизацій порядку 12 // Укр. мат.. журнал. – 2004. – **57**, №7. – С. 718 – 727.
6. *Петренюк А.Я.* Півобертові деревні факторизації повних графів // Укр. мат. журнал. – 2001. – **53**, №5. – С. 710–716.
7. *Петренюк Л.П., Петренюк А.Я.* Існування деяких T-факторизацій порядку 12 // Наук. записки. Сер. Мат. науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім.В.Винниченка, 2004. – С. 76–87.
8. *Petrenjuk A. J. Petrenjuk D. A.*., The nonexistence of some T-factorizations // Матеріали II Міжнар. наук.-практ. конф. “Динаміка наукових досліджень – 2003”, 20–27 жовтня 2003 р. – Дніпропетровськ – Кіровоград – Одеса – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2003. – **32**. – С. 19–20.
9. *Петренюк Л.П. Петренюк А.Я.* 100 новых T-факторизаций порядка 12 // Материалы 8 Междунар. семинара “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 29 января – 2 февраля 2004 г.). – М., 2004. – С. 355–357.

Получено 24.03.2005