Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

В.В. БОЙКО, В.Н. КУЗЬМЕНКО

ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ ЗАКАЗОВ И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассматривается задача размещения заказов с целевой функцией, описывающей наличие скидок. Исследуются особенности этой задачи, предлагается алгоритм ее решения, включающий использование r-алгоритма. Генерация дополнительных ограничений для исходной задачи позволяет существенно ускорить работу алгоритма. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

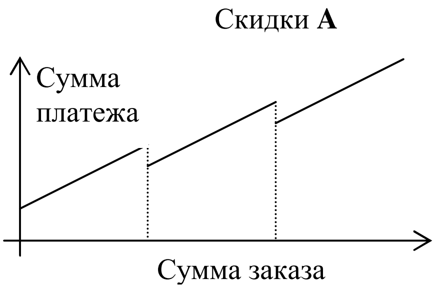
Введение. Несмотря на многолетний опыт изучения задач размещения и большое количество работ, посвященных этому вопросу [1-5], практические задачи размещения могут иметь особенности, которые ранее не изучались. Исследование таких особенностей позволяет построить эффективные алгоритмы решения новых задач, а также улучшить предложенные ранее подходы к решению.

В работе [6] рассматривалась задача размещения заказов с новым видом целевой функции и ограничений и исследовалась эффективность применения r-алгоритма [7] для вычисления оценок в сравнении с традиционно применяемым "простым" субградиентным методом [8]. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что для определенных вариантов постановок задач эффективность r-алгоритма выше, чем "простого" субградиентного метода.

В данной работе исследуются особенности задачи размещения заказов и предлагаются дополнительные процедуры к традиционной схеме решения [9]. К особенностям задачи относятся свойства целевой функции и связь между коэффициентами целевой функции и ограничений.

Рассматриваемая задача имеет и прикладное значение. В виде подобной задачи можно описывать размещение заказов при моделировании процессов в энергетике.

Постановка задачи. Имеется m заказов. Их необходимо оптимально разместить не более, чем у n поставщиков, каждый из которых предоставляет определенные скидки, зависящие от суммы заказа. Рассматриваются два базовых вида скидок и их комбинации (рисунок).



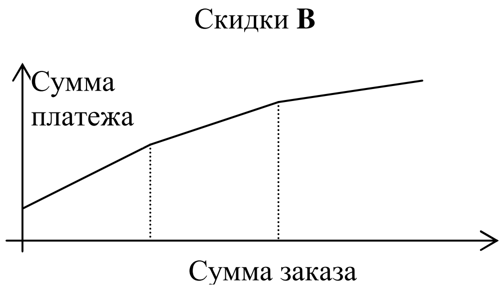


Рисунок. Базовые виды скидок

Рассматриваемые функции имеют такие особенности:

а) при наличии скидок вида А функции разрывны, т. е. не выпуклы и не вогнуты;

б) для любых видов скидок и их комбинаций справедливо: рост функций вправо от любой точки происходит не быстрее, чем на линейном отрезке, содержащем эту точку.

Математическая постановка задачи, отражающая наличие скидок, такова:

$$\min_{y_i, x_{ij}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \right\}, \tag{1}$$

$$L_i y_i \le \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \le U_i y_i, \quad i = 1,\dots,n, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I_{i_0}^d} y_i \le 1, \quad i_0 = 1,\dots,n_0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1,\dots,m, \tag{4}$$

$$y_i \in \{0, 1\}; \quad x_{ij} \ge 0, \tag{5}$$

где $I_0 = \{1,\dots,n_0\}$ - множество исходных поставщиков; $I_{i_0}^d$ - множество псевдопоставщиков, соответствующих скидкам функции исходного поставщика i_0. При заданных i_0, j коэффициенты c_{ij} равны для всех $i \in I_{i_0}^d$, а множители α_i образуют последовательность, такую, что $1 = \alpha_{i_1} \ge \alpha_{i_2} \ge \dots \ge \alpha_{i_t}$.

Алгоритм решения. В основу алгоритма решения задачи (1) - (5) положен подход, предложенный для простейшей задачи размещения в [9], и заключающийся в следующем.

Методом верхнего уровня является метод ветвей и границ. В каждой вершине дерева ветвления вычисляется нижняя оценка путем решения двойственной задачи субградиентным методом. Двойственная задача получается в результате лагранжевой релаксации исходной задачи по ограничениям (4). В процессе решения двойственной задачи по возможности фиксируются значения еще неопределенных переменных y_i и определяются наиболее узкие границы P_L, P_U, в пределах которых лежит количество вершин размещения заказов в оптимальном решении. Оптимальное решение находится путем генерации допустимых решений, соответствующих вершинам дерева ветвления.

Новым в данном алгоритме является использование особенностей задачи для быстрой генерации допустимых решений и генерация дополнительных ограничений двойственной задачи, увеличивающих оценку.

Сделанные фиксации и дополнительные ограничения верхних уровней учитываются при формулировке оценочных задач последующих уровней дерева ветвления.

Двойственная оценочная задача. Для нахождения нижней оценки для вершины дерева ветвления решается следующая задача.

Найти

$$\Phi(P_L, P_U, K_0, K_1, A) = \max_{\lambda_j \ge 0,\ \beta_k \ge 0} F(\lambda, \beta), \tag{6}$$

где значение двойственной функции

$$F(\lambda, \beta) = \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda_j + \sum_{k=1}^{N} \beta_k d_k \; +$$

$$+ \min_{y_i, x_{ij}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (f_i - \sum_{k=1}^{N} \beta_k a_{ki})\ y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i c_{ij} - \lambda_j) x_{ij} \right\} \tag{7}$$

при ограничениях

$$L_i y_i \le \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \le U_i y_i, \quad i = 1,\dots,n, \tag{8}$$

$$0 \le x_{ij} \le b_j^1, \quad j = 1,\dots,m, \tag{9}$$

$$\sum_{i \in I_{i_0}^d} y_i \le 1, \quad i_0 = 1,\dots,n_0, \tag{10}$$

$$P_L \le \sum_{i=1}^{n} y_i \le P_U, \tag{11}$$

$$y_i \in \{0, 1\},\ i \in K_2 = I \setminus (K_0 \cup K_1); \quad y_i = 0,\ i \in K_0; \quad y_i = 1,\ i \in K_1, \tag{12}$$

где K_0, K_1 - множества фиксированных и K_2 - множество неопределенных переменных y_i в текущей вершине дерева ветвления; A - матрица дополнительных ограничений ($A\,y \geq d$), содержащая N строк сгенерированных ограничений и n столбцов; $b_j^1 \geq b_j$ - превышение заказа, позволяющее использовать выигрыш, предоставляемый скидками вида А.

Решение задачи (7) - (12) сводится к решению ряда "простых" задач рюкзачного типа:

Для каждого $i \in I \setminus K_0$ найти

$$\alpha_i(\lambda,\beta) = f_i - \sum_{k=1}^{N} \beta_k a_{ki} + {}$$

$$+ \min_{x_{ij}} \sum_{j=1}^{m} (c_{ij} - \lambda_j^k) x_{ij}\,, \qquad (13)$$

при ограничениях

$$L_i \leq \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \leq U_i\,, \qquad (14)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_j^1,\ j = 1,...,m\,. \qquad (15)$$

Для $i \in K_0$ положим

$x_{ij}^* = 0,\ j = 1,...,m;\ \alpha_i(\lambda,\beta) = 0\,.$

Найти

$$F(\lambda,\beta) = \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda_j^k + \sum_{k=1}^{N} \beta_k d_k + {}$$

$$+ \min_{y_i} \sum_{i \in I} \alpha_i(\lambda,\beta) y_i\,, \qquad (16)$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I_{i_0}^d} y_i \leq 1,\ \ i_0 = 1,...,n_0\,, \qquad (17)$$

$$P_L \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \leq P_U\,, \qquad (18)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in K_2\,, \qquad (19)$$

$$y_i = 0,\ i \in K_0\,; \quad y_i = 1,\ i \in K_1\,.$$

Указанные задачи быстро решаются "жадным" алгоритмом.

Обозначим множество выбранных вершин размещения при текущих λ, β $M^* = \{i \in I \mid y_i^* = 1\}$.

Фиксация переменных y_i. «Простота» задач (13) - (15) и (16) - (19) позволяет в процессе решения задачи (7) - (12) легко проверять возможность дополнительно зафиксировать переменные y_i для $i \in K_2$ на значениях, соответствующих оптимальному решению исходной задачи [9]. Для переменных $i \in K_2 \cap M^*$ проверяется возможность зафиксировать $y_i = 1$ (close penalties), для $i \in K_2 \setminus M^*$ соответственно – $y_i = 0$ (open penalties). В первом случае формально должна быть решена задача (16) - (19) при дополнительной фиксации $y_i = 0$. Если $F(\lambda,\beta \mid y_i \equiv 0) \geq Z_U$, где Z_U - значение наилучшего найденного допустимого решения задачи (1) - (5), то фиксируется противоположное значение $y_i = 1$, если неравенство не выполняется, то переменная y_i остается незафиксированной. Во втором случае вычисляется $F(\lambda, \beta \mid y_i \equiv 1)$ и соответственно фиксируется или нет $y_i = 0$. Учитывая то, что задача (16) - (19) решена и известно множество M^*, проверка указанного неравенства выполняется путем нескольких арифметических операций.

Фактически выполняя такие проверки, мы оцениваем другие ветви дерева, отличающиеся от рассматриваемой одной дополнительно фиксированной переменной. Причем выбираются такие ветви, которые при заданных λ, β имеют не меньшее значение функции $F(\lambda, \beta)$, чем текущая. Если неравенство выполняется и переменная фиксируется, то происходит сокращение дерева перебора и улучшение оценки текущей и последующих ветвей.

Сжатие границ P_L, P_U. Проверка возможности сжать границы P_L, P_U выполняется в процессе решения задачи (16) - (19) и не требует отдельной процедуры. Формально необходимо решить ряд задач (16) - (19) при дополнительном условии $\sum_{i=1}^{n} y_i = t$, для всех $t \in [P_L, P_U]$. В результате будут найдены значения $F(\lambda, \beta \mid t)$. Новые границы определяются максимальным интервалом $[t_1, t_2]$, таким, что $\forall t \in [t_1, t_2]$ $F(\lambda, \beta \mid t) < Z_U$.

Генерация матрицы дополнительных ограничений A.

В результате выполнения процедур для фиксации переменных может оказаться, что ни одна из переменных y_i $i \in K_2$ не стала фиксированной. В этом случае будем проверять возможность одновременно фиксировать переменные, принадлежащие некоторым множествам $M_1 \subseteq K_2 \cap M^*$ или $M_0 \subseteq K_2 \setminus M^*$. Для M_1 выполняется проверка $F(\lambda, \beta \mid y_i \equiv 0, i \in M_1) \geq Z_U$, для M_0 – $F(\lambda, \beta \mid y_i \equiv 1, i \in M_0) \geq Z_U$. Если неравенство выполняется, то в матрицу A добавляется ограничение $\sum_{i \in M_1} y_i \geq 1$ или $\sum_{i \in M_0} y_i \leq |M_0| - 1$ соответственно. Эффективность таких ограничений зависит от количества элементов в множествах M_1, M_0. Чем меньше это количество, тем ограничение эффективнее. Поиск множеств M_1, M_0 начинается с включения соответственно первого и последнего элементов из упорядоченного списка множества K_2, полученного при решении задачи (16) - (19). Далее включаются следующие элементы, выполняются проверки и т.д. Такой поиск множеств M_1, M_0, как правило, приводит к успеху, и в двойственную задачу включаются дополнительные ограничения.

Генерация допустимых решений. Для генерации допустимого решения, соответствующего вершине дерева ветвления, решим такую задачу:

$$Z(M^*) = \sum_{i\in M^*} f_i + \min_{x_{ij}} \sum_{i\in M^*} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} , \tag{20}$$

$$L_i \le \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}, \;\; i\in M^* , \tag{21}$$

$$\sum_{i\in M^*} x_{ij} = b_j, \;\; j = 1,...,m , \tag{22}$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i\in M^* . \tag{23}$$

В отличие от исходной постановки (1) - (5) здесь нет верхних границ в ограничениях (21) и ограничения (22) записаны в форме равенства. Если для оптимального решения задачи (20) - (23) окажется, что $\sum c_{ij}x_{ij} > U_i$ для некоторого подмножества $\{i\} = M_U$, то существует другое допустимое решение с меньшим значением целевой функции, в котором псевдопоставщики $i\in M_U$ заменены следующими псевдопоставщиками. Если задача (20) - (23) не имеет допустимого решения, то при замене ограничений (22) на соответствующие неравенства оптимальное значение станет равно $Z(M^*) = \sum_{i\in M^*}(f_i + L_i)$. Поэтому должна исследоваться задача поиска допустимого решения именно в постановке (20)-(23).

Вычислительные эксперименты. Для проведения вычислительных экспериментов были взяты те же тестовые задачи, что и в работе [6]. Результаты экспериментов показали, что генерация матрицы дополнительных ограничений позволяет снизить суммарные вычислительные затраты за счет сокращения размера дерева ветвления и сделать процесс поиска решения более быстрым по сравнению с традиционной схемой решения. В таблице приведены результаты этих экспериментов для задачи Cap131 из библиотеки OR-Library.

Вид и процент скидок	Традиционная схема решения задачи. Исходная постановка (∑ Xij ≥ bj)		Схема решения с использование дополнительных ограничений. Исходная постановка (∑ Xij ≥ bj)	
	"Простой" метод (время, с)	r-алгоритм (время, с)	"Простой" метод (время, с)	r-алгоритм (время, с)
Тип А, 25	191	133	147	121
Тип А, 40	548	545	466	425
Тип А, 50	1413	2492	1167	1955
Тип А, 60	1702	2231	1246	1958
Тип А, 75	1082	1037	845	916
Тип А, 100	275	110	251	86
Тип А и В, 25	126	90	98	76
Тип А и В, 50	106	43	79	34

Заключение. В результате выполненной работы получен новый, более быстрый по сравнению с "традиционными" алгоритм решения рассмотренной задачи размещения заказов. Развитие работы будет направлено на исследование эффективности предложенного алгоритма при решении других задач размещения и, в частности, при моделировании процессов в энергетике.

В.В. Бойко, В.М. Кузьменко

ЗАДАЧА РОЗМІЩЕННЯ ЗАМОВЛЕНЬ ТА АЛГОРИТМ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Розглядається задача розміщення замовлень з цільовою функцією, яка відображає наявність знижок. Досліджуються особливості цієї задачі та пропонується алгоритм її розв'язування, який включає використання r-алгоритму. Генерування додаткових обмежень для початкової задачі дозволяє суттєво прискорити работу алгоритма. Наводяться результати обчислювальних експериментів.

V.V. Boyko, V.N. Kuzmenko

AN ORDER ALLOCATION PROBLEM AND AN ALGORITHM USED TO SOLVE IT

The paper considers an order allocation problem with a discounts objective function and investigates its features. An algorithm solving this problem is proposed. Such an algorithm includes the r-algorithm for obtaining lower estimations. Additional constrains are generated for initial problem, and algorithm operation is accelerated. The results of the computational experiments are given.

1. *Revelle C.S., Laporte G.* The Plant Location Problem: New Models and Research Prospects // Operations Research. – 1996. – 44. – P. 864–874.
2. *Correia I., Captivo M.E.* A lagrangian heuristic for modular capacitated location problem // Annals of Operations Research. – 2003. – 122. – P. 141–161.
3. *Harkness J., ReVelle C.* Facility location with increasing production cost // European J. of Operational Research. – 2003. – 145. – P. 1–13.
4. *Ebery J., Krishnamoorthy M., Ernst A., Boland B.* The capacitated multiple allocation hub location problem: Formulations and algorithms // Ibid. – 2000. – 120. – P. 614–631.
5. *Goldengorin B., Kuzmenko V., Stetsyuk P., Tso M.* Pricing by an allocation model with different types of discount // Combinatorial Optimization 2004, 28-31 March 2004, Book of Abstract. – Lancaster: Lancaster University, 2004. – P. 31.
6. *Кузьменко В.Н., Гольденгорин Б.И., Тсо М., Стецюк П.И.* Сравнение двух субградиентных методов при нахождении оценок для задач размещения // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2004. – С. 108-116.
7. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 200 с.
8. *Held M., Wolfe P., Crowder H.* Validation of subgradient optimization // Mathemetical Programming. – 1974. – N 6. – P. 62–66.
9. *Beasley J.E.* Lagrangian heuristics for location problems // European J. of Operational Research. – 1993. – 65. – P. 383-399.

Получено 01.04.2005