УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, С.Г. НЕНАХОВА

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МНОГОУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Получены решения для важных прикладных классов задачи многоуровневого программирования. Показано, что собственно количество уровней этой задачи является эндогенным. Продемонстрирована роль введенного ранее обобщенного равновесия Курно – Штакельберга – Нэша. Показано, что проблема олигополии Штакельберга сводится к новому классу дискретно-непрерывных задач. Продемонстрирована неустойчивость олигополии Курно.

Введение. Истоками задач многоуровневого программирования являются практические вопросы планирования широкомасштабных проектов, например программно-целевого корпоративного или государственного планирования. Понятия двухуровневого и многоуровневого программирования впервые были формализованы специалистами Международного банка реконструкции и развития (Мирового банка), исходя из анализа успешной реализации пятилетних планов «корейского экономического чуда» [1].

Подобные иерархические задачи были поставлены для проектирования сложных технических систем [2].

Пусть система состоит из m уровней. Решение задачи m-уровневого программирования определяется рекурсивно [3]. На уровне 1 выбирается стратегия $q(1)$, максимизирующая целевую функцию $G(1)(q(1), q(2),\ldots,\ldots,q(m))$. На уровне 2 выбирается стратегия $q(2)(q(1))$ уровня 2, максимизирующая целевую функцию $G(2)(q(1), q(2),\ldots,q(m))$. На уровне j выбирается стратегия $q(j)(q(1), q(2),\ldots, q(j\text{-}1))$ уровня $j = 1,\ldots, m$, максимизирующая целевую функцию j-го уровня $G(j)(q(1), q(2),\ldots, q(m))$.

Оказывается, что само количество уровней задачи многоуровневого программирования является эндогенным.

Поскольку задача уже двухуровневого программирования является NP-полной [4], то следует сосредоточиться на конкретных важных классах подобных задач. Целевой функцией уровня будем считать его функцию рыночной прибыли.

Пусть m фирм производят однородный продукт и входят в рынок по очереди: фирма $(j+1)$ входит в рынок после фирмы j, $j = 1,\ldots, m-1$. Функция обратного спроса на продукт задается $P(k) = a - b\ Q(k)$, где: $P(k)$ – текущая рыночная цена продукта; a, b – некоторые положительные параметры; текущая величина спроса на данный продукт (которая предполагается равной суммарному производству продукта всеми вошедшими в рынок фирмами) составляет $Q(k) = q(1) + \ldots + q(k)$; $q(j)$ – объем производства данного продукта фирмой j; k – число фирм, вошедших в рынок. Фирма j получает текущую прибыль $G(j) = [P(k) - c]\ q(j) - f$, где: c – удельные переменные затраты производства; f – фиксированные затраты производства при $q(j) > 0$; c, f – некоторые положительные числа (считаем, что $a > c$).

Если фирма j максимизирует свою прибыль, то не входит в рынок, выбирая $q(j) = 0$, при $G(j) < 0$, $j = 1,\ldots, m$.

Итак, олигополистическое поведение моделируется задачей многоуровневого программирования, и наоборот.

Теорема 1. Если $a > c$, то фирма j выбирает выпуск $(a - c) / (b\ 2^j)$.

Доказательство проведем по индукции. В случае $j = 1$ прибыль

$$G(1) = [P(1) - c]\ q(1) - f = [a - b\ q(1) - c]\ q(1) - f$$

максимизируется по $q(1)$ при $(a - c) / (2\ b)$.

Пусть фирма k производит выпуск $q(k) = (a - c) / (b\ 2^k)$, покажем, что тогда фирма $(k + 1)$ производит выпуск $q(k+1) = (a - c) / (b\ 2^{k+1})$. Заметим, что

$$Q(k) = [(a - c) / b]\ (1/2 + 1/2^2 + \ldots + 1/2^k) = (1 - 2^{-k})\ (a - c) / b. \qquad (1)$$

Тогда фирма $(k + 1)$ максимизирует по $q(k+1)$ свою прибыль

$$G(k+1) = [P(k+1) - c]\ q(k+1) - f = \{a - b\ [Q(k) + q(k+1)] - c\}\ q(k+1) - f$$

при

$$q(k+1) = [a - c - b\ Q(k)] / (2\ b) = (a - c) / (2\ b) - Q(k) / 2 =$$

$$= (a - c) / (2\ b) - (1 - 2^{-k})\ (a - c) / (2\ b) = (a - c) / (b\ 2^{k+1}),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Количество фирм, вошедших в рынок, не превышает

$$n = n(a, b, c, f) = [[2\ ln\ (a - c) - ln(\ b\ f)] / (2\ ln\ 2)]_<,$$

где обозначаем $[u]_<$ ближайшее к u целое число, не превышающее u ($u \geq [u]_<$).

Предположим, что фирма n входит в рынок, а фирма $(n + 1)$ – нет:

$$G(n) \geq 0,\ G(n+1) < 0.$$

Иными словами,

$$[P(n) - c]\ q(n) - f \geq 0, \qquad (2)$$

$$[P(n+1) - c]\ q(n+1) - f < 0. \qquad (3)$$

Заметим, что в силу равенства (1)

$$P(n) = a - b\ Q(n) = a - (a - c)\ (1 - 2^{-n}) = c + (a - c)\ 2^{-n}.$$

Тогда вследствие неравенства (2) и теоремы 1 выполняются неравенства:

$$(a - c)\ 2^{-n}\ (a - c) / (b\ 2^n) \geq f; \qquad 2^{-2n} \geq b\ f / (a - c)^2;$$

$$2^{-n} \geq (b\,f)^{0.5} \,/\, (a - c); \tag{4}$$

$$(a - c)^2 \,/\, (b\,f) \geq 2^{2n}; \qquad 2\,ln\,(a - c) - ln\,(b\,f) \geq 2\,n\,ln\,2;$$

$$n \leq [2\,ln\,(a - c) - ln\,(b\,f)] \,/\, (2\,ln\,2).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

При этом в силу неравенства (3) аналогично неравенству (4)

$$2^{-(n+1)} < (b\,f)^{0.5} \,/\, (a - c),$$

$$2^{-n} < 2\,(b\,f)^{0.5} \,/\, (a - c). \tag{5}$$

Теорема 3. Олигополистические рыночное производство $Q = Q(a, b, c, f)$ и цена $P = P(a, b, c, f)$ полностью определяются рыночными параметрами спроса a, b и параметрами затрат c, f.

Действительно, ввиду равенства (1), неравенств (4) и (5)

$$Q(n) = (1 - 2^{-n})\,(a - c) \,/\, b > [1 - 2\,(b\,f)^{0.5} \,/\, (a - c)]\,(a - c) \,/\, b = [a - c - 2\,(b\,f)^{0.5}] \,/\, b,$$

$$Q(n) = (1 - 2^{-n})\,(a - c) \,/\, b \leq [1 - (b\,f)^{0.5} \,/\, (a - c)]\,(a - c) \,/\, b = [a - c - (b\,f)^{0.5}] \,/\, b,$$

$$[a - c - 2\,(b\,f)^{0.5}] \,/\, b < Q(n) \leq [a - c - (b\,f)^{0.5}] \,/\, b. \tag{6}$$

Тогда

$$P(n) = a - b\,Q(n) \geq a - [a - c - (b\,f)^{0.5}] = c + (b\,f)^{0.5},$$

$$P(n) = a - b\,Q(n) < a - [a - c - 2\,(b\,f)^{0.5}] = c + 2\,(b\,f)^{0.5},$$

$$c + (b\,f)^{0.5} \leq P(n) < c + 2\,(b\,f)^{0.5}.$$

Если фирмы выбирают свои выпуски продукта так, чтобы максимизировать их общую прибыль

$$G = G(1) + \ldots + G(m) = [P(m) - c]\,[q(1) + \ldots + q(m)] - m\,f = [P(m) - c]\,Q(m) - m\,f =$$

$$= [a - c - b\,Q(m)]\,Q(m) - m\,f,$$

то их общий выпуск равен монопольному:

$$Q(m) = (a - c) \,/\, (2\,b). \tag{7}$$

Если каждая фирма выбирает свою стратегию, максимизируя свою прибыль, то имеет место теорема 1. Учитывая при этом (6),

$$2\,[a - c - 2\,(\mathrm{b}\,f)^{0.5}] \,/\, (2\,b) < (a - c) \,/\, (2\,b) \leq 2\,[a - c - (b\,f)^{0.5}] \,/\, (2\,b),$$

$$a - c - 4\,(b\,f)^{0.5} < 0 \leq a - c - 2\,(b\,f)^{0.5},$$

$$2\,(b\,f)^{0.5} \leq a - c < 4\,(\mathrm{b}\,f)^{0.5}, \tag{8}$$

т. е. максимизация своей прибыли каждой фирмой накладывает дополнительные ограничения на значения параметров a, c, b, f.

Кроме того, из равенств (1) и (7) следуют такие равенства:

$$(1 - 2^{-m})\,(a - c) \,/\, b = (a - c) \,/\, (2\,b); \qquad 1 - 2^{-m} = 1/2; \quad m = 1.$$

Итак, максимизация функции G достигается монополией.

Чтобы общий выпуск фирм равнялся монопольному (и соответственно их общая прибыль была максимальной), лидер (фирма 1) должен придерживаться обобщенной стратегии Курно–Штакельберга–Нэша [5]: $q(1) = r\,(a - c) \,/\, b$, где $1/3 \leq r \leq 1/2$. Предположим, что при этом выполняется $q(j+1)/q(j) = r, j=1,..,m-1$, как и в теореме 1 при $r = 1/2$.

Теорема 4. Пусть $q(j) = r^j (a - c) / b$, где $1/3 \le r \le 1/2$, причем m фирм вошли в рынок, а фирма $(m + 1)$ не входит в рынок. Тогда общая прибыль олигополии максимизируется при

$$m = [[ln\ (b\ f) - 2\ ln\ (a - c)] / ln\ r]_<,$$
$$2\ r^{m+1} - 3\ r + 1 = 0. \tag{9}$$

Прежде всего, заметим, что

$$Q(m) = (r^1 + r^2 + ... + r^m)\ (a - c) / b = [(1 - r^{m+1}) / (1 - r) - 1]\ (a - c) / b.$$

Тогда в силу равенства (7) получаем:

$$1/2 = (1 - r^{m+1}) / (1 - r) - 1;$$
$$(1 - r^{m+1}) / (1 - r) = 3/2; \tag{10}$$
$$3\ (1 - r) = 2\ (1 - r^{m+1});\quad 3 - 3\ r = 2 - 2\ r^{m+1};\qquad 3\ r - 1 = 2\ r^{m+1};$$
$$ln\ (3\ r - 1) = (m + 1)\ ln\ r + ln\ 2;\qquad m = ln\ (3\ r - 1) / (ln\ r + ln\ 2) - 1.$$

Заметим также, что

$$P(m) = a - b\ Q(m) = a - [(1 - r^{m+1}) / (1 - r) - 1]\ (a - c).$$

Отсюда, учитывая равенство (10):

$$0 \le G(m) = [P(m) - c]\ q(m) - f = (a - c)\ [2\ - (1 - r^{m+1}) / (1 - r)]\ r^m\ (a - c) / b - f =$$
$$= r^m\ (a - c)^2 / (2\ b) - f;$$
$$r^m \ge b\,f / (a - c)^2; \tag{11}$$
$$m\ ln\ r \ge ln\ (b\ f) - 2\ ln\ (a - c);\quad m = [[ln\ (b\ f) - 2\ ln\ (a - c)] / ln\ r]_<.$$

Очевидно, теорема 4 обобщает теорему 2. Полиномиальное уравнение (9) решается в радикалах через формулы Тартальи–Кардано и Феррари для $m = 2$ и $m = 3$ соответственно [5]. В общем случае решение уравнения (9) в условиях теоремы 4 представляет собой специальный класс дискретно-непрерывных задач поиска значений m, r. Решение таких задач можно получить с помощью специальных численных компьютерных методов.

Одновременное выполнение неравенств (8) и (11) при $r = 1/2$ подразумевает нетривиальный вывод $2 \le m \le 3$.

Действительно, для $r = 1/2$, $m = 4$ в силу равенства (1)

$$Q(4) = (1 - 2^{-4})\ (a - c) / b = 15\ (a - c) / (16\ b),$$
$$P(4) = a - b\ Q(4) = a - (a - c)\ (1 - 2^{-4}) = c + (a - c)\ 2^{-4},$$
$$G(4) = [P(4) - c]\ q(4) - f = (a - c)\ 2^{-4}\ (a - c) / (2^4\ b) - f = (a - c)^2\ 2^{-8} / b - f,$$

откуда $G(4) \ge 0$ означает $a - c \ge 2^4\ (b\ f)^{0.5}$, что противоречит неравенству (8). Иными словами, максимизация общей суммарной прибыли олигополии достигается лишь несколькими фирмами.

Кроме того, при $m = 2$ из (9) следует

$$0 = 2\ r^3 - 3\ r + 1 = 2\ r^3 - 2\ r - r + 1 = 2\ r\ (r - 1)\ (r + 1) - (r - 1) =$$
$$= (r - 1)\ (2\ r^2 + 2\ r - 1),\qquad r = (3^{0.5} - 1) / 2 < 1/2,$$

что указывает на смысл обобщенной стратегии Курно–Штакельберга–Нэша [6].

При $m = 3$ из (9) следует:

$$0 = 2\,r^4 - 3\,r + 1 = 2\,r^4 - 2\,r - r + 1 = 2\,r\,(r^3 - 1) - (r - 1) =$$

$$= 2\,r\,(r - 1)\,(r^2 + r + 1) - (r - 1) = (r - 1)\,[2\,r\,(r^2 + r + 1) - 1];$$

$$0 = 2\,r^3 + 2\,r^2 + 2\,r - 1; \qquad r < (3^{0.5} - 1) / 2.$$

Предположим теперь, что

$$q(j) = (a - c)\,r(j) / b, \tag{11}$$

$$r(j+1) < r(j) < 1, j = 1,\ldots, m-1. \tag{12}$$

Тогда в силу равенства (7)

$$r(1) + \ldots + r(m) = 1/2. \tag{13}$$

Если последовательность $r(1),\ldots, r(m)$ является не геометрической, а арифметической прогрессией, пусть

$$r(j) = r(1) - j\,\varepsilon, \tag{14}$$

где ε – некоторое положительное число. Ввиду (13)

$$1/2 = m\,r(1) - \varepsilon\,(1 + \ldots + m) = m\,r(1) - \varepsilon\,m\,(m + 1) / 2 = m\,r(1) - \varepsilon\,m^2 / 2 - \varepsilon\,m / 2,$$

$$\varepsilon\,m^2 - m\,[2\,r(1) - \varepsilon] + 1 = 0,$$

$$m = [2\,r(1) - \varepsilon + [\,4[\,r(1)]^2 - 4\,\varepsilon\,[r(1) + 1] + \varepsilon^2]^{0.5}\,] / (2\,\varepsilon)]_<, \tag{15}$$

где предполагается

$$4[\,r(1)]^2 - 4\,\varepsilon\,[r(1) + 1] + \varepsilon^2 \geq 0. \tag{16}$$

Теорема 5. Если выпуски фирм удовлетворяют условиям (11), (12), (14), (16), то суммарная прибыль олигополии максимизируется m фирмами, где число m выражается соотношением (15).

Предложенный подход может быть обобщен на нелинейные функции $P[q(1),\ldots, q(m)]$ и $c_j[q(j)]$.

Проанализируем динамическую устойчивость олигополии из m фирм, где удельные переменные затраты фирмы j равны c_j.Так как $P(m) = a - b\;Q(m) \geq 0$, то $a / b \geq Q(m) \geq 0$. Рассмотрим сначала случай $m = 2$.

По предположению Курно [6], каждая фирма полагает, что выпуск любой другой фирмы останется неизменным в предстоящем периоде t. Здесь считаем, что каждая фирма полностью и мгновенно настраивает свой выпуск в следующем периоде. Тогда цена ex ante в период t, ожидаемая фирмой 1, составляет

$$P(1, t) = a - b\,[q(1, t) + q(2, t-1)].$$

Аналогично

$$P(2, t) = a - b\,[q(2, t) + q(1, t-1)].$$

Фирма $j = 1, 2$ максимизирует по $q(j, t)$ свою ожидаемую прибыль [7]:

$$P(j, t)\,[q(j, t) - c_j\,] - f,$$

откуда

$$0 = a - 2\,b\,q(1, t) - b\,q(2, t-1) - c_1,$$

$$0 = a - 2\,b\,q(2, t) - b\,q(1, t-1) - c_2,$$

$$q(1, t) = (a - c_1)/(2\,b) - q(2, t-1)\,/\,2,$$

$$q(2, t) = (a - c_2)/(2\,b) - q(1, t-1)\,/\,2,$$

$$q(1, t) = (a - c_1)\,/\,(2\,b) - (a - c_2)\,/\,(4\,b) - q(1, t-2)\,/\,4 =$$

$$= (a - 2\,c_1 + c_2)\,/\,(4\,b) + q(1, t-2)]\,/\,4.$$

Последнее уравнение является неоднородным разностным 2-го порядка с характеристическими корнями –1/2 и 1/2. Нетрудно убедиться, что его частным решение является обычное равновесие Нэша

$$q(1, t) = (a - 2\,c_1 + c_2)\,/\,(3\,b).$$

Отсюда общее решение разностного уравнения

$$q(1, t) = A\,(-1\,/\,2)^t + B\,(1\,/\,2)^t + (a - 2\,c_1 + c_2)\,/\,(3\,b),$$

где A и B определяются начальными условиями

$$q(1, 1) = (A - B)\,/\,2 + (a - 2\,c_1 + c_2)\,/\,(3\,b),$$

$$q(1, 2) = (A + B)\,/\,4 + (a - 2\,c_1 + c_2)\,/\,(3\,b).$$

Аналогично выписывается общее решение $q(2, t)$. Итак, в случае $m = 2$ (дуополии) решение задачи Курно динамически устойчиво. В случае $m = 3$

$$P(1, t) = a - b\,[q(1, t) + q(2, t-1) + q(3, t-1)],$$

$$P(2, t) = a - b\,[q(2, t) + q(1, t-1) + q(3, t-1)],$$

$$P(3, t) = a - b\,[q(3, t) + q(1, t-1) + q(2, t-1)].$$

Фирма $j = 1, 2, 3$ максимизирует по $q(j, t)$ свою ожидаемую прибыль [7]:

$$P(j, t)\,[q(j, t) - c_j\,] - f,$$

откуда

$$0 = a - 2\,b\,q(1, t) - b\,[q(2, t-1) + q(3, t-1)] - c_1,$$

$$0 = a - 2\,b\,q(2, t) - b\,[q(1, t-1) + q(3, t-1)] - c_2,$$

$$0 = a - 2\,b\,q(3, t) - b\,[q(1, t-1) + q(2, t-1)] - c_3,$$

$$q(1, t) = (a - c_1)/(2\,b) - [q(2, t-1) + q(3, t-1)]/2,$$

$$q(2, t) = (a - c_2)/(2\,b) - [q(1, t-1) + q(3, t-1)]/2,$$

$$q(3, t) = (a - c_3)/(2\,b) - [q(1, t-1) + q(2, t-1)]/2.$$

Полученные равенства можно переписать в матричном виде

$$q(t) = T(3)\,q(t - 1) + w, \qquad (17)$$

где $q(t)$ – вектор-столбец, состоящий из $q(1, t)$, $q(2, t)$, $q(3, t)$; $T(3)$ – матрица с нулевой диагональю и остальными элементами, равными –1/2; w – вектор-столбец, состоящий из чисел $(a - c_1)/(2\,b)$, $(a - c_2)/(2\,b)$, $(a - c_3)/(2\,b)$.

Поскольку w – постоянный вектор, а матрица $T(3)$ – невырожденная, то устойчивость системы (17) зависит лишь от латентных корней $T(3)$. Система сходится к равновесию тогда, когда каждый латентный корень $T(3)$ по модулю меньше единицы. Нетрудно проверить, что корнями $T(3)$ являются 1/2, 1/2, –1.

Таким образом, в случае $m = 3$ олигополия обладает постоянными конечными колебаниями.

В ситуации Курно–Штакельберга поведение олигополии еще сложнее.

Заключение. Предмет монополии или олигополии характерен для бурно развивающихся высокотехнологических отраслей: каждая фирма, совершившая открытие или изобретение, стремится использовать свое временное монопольное преимущество. Такие отрасли высокоприбыльны по сравнению с более конкурентными рынками, а поэтому представляют интерес для тех, кого не устраивают текущие доходы. Анализ входа в такие отрасли сводится к сравнительно малоисследованной задаче многоуровневого программирования. В данной работе получены решения для различных важных классов такой задачи.

В.М. Горбачук, С.Г. Ненахова

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ БАГАТОРІВНЕВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Отримано розв'язки важливих прикладних класів задачі багаторівневого програмування. Показано, що власне кількість рівнів цієї задачі є ендогенною. Продемонстровано роль введеної раніше узагальненої рівноваги Курно–Штакельберга–Неша. Показано, що проблема олігополії Штакельберга зводиться до нового класу дискретно-неперервних задач. Продемонстровано нестійкість олігополії Курно.

W.M. Gorbachuk, S.G. Nenakhova

THE SOLUTION METHOD OF MULTILEVEL PROGRAMMING PROBLEM

The solutions to important applied classes of multilevel programming problem are obtained. It is shown the number of levels in such a problem is endogenous. The role of generalized Cournot–Stackelberg–Nash equilibrium introduced earlier is demonstrated. It is shown the Stackelberg oligopoly problem is reduced to a new class of discrete-continuous problems. The instability of Cournot oligopoly is demonstrated.

1. *Norton R.D.* Planning with facts: the case of Korea // American economic review. – 1970, May. – P. 59–64.
2. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука, 1982. – 286 с.
3. *Robson A.J.* Stackelberg and Marshall // American economic review. – 1990, March. – P. 69–82.
4. *Горбачук В.М.* Решение задачи двухуровневого программирования для билинейных разрывных функций // Компьютерная математика. – 2005. – **3**. – С. 44–51.
5. *Конфорович А.Г.* Визначні математичні задачі. – К.: Радянська школа, 1981. – 189 с.
6. *Горбачук В.М.* Синтетическое равновесие Курно–Штакельберга–Нэша // Теорія оптимальних рішень. – 2003. – **2**. – С. 68–74.
7. *Горбачук В.М., Ненахова С.Г.* Поведінка конурентної фірми за невизначеності // Теорія оптимальних рішень. – 2004. – **3**. – С. 74–80.

Получено 28.03.2005