УДК 518.9

А.А. ЧИКРИЙ, И.С. РАППОПОРТ

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ СБЛИЖЕНИЯ В КЛАССЕ СТРОБОСКОПИЧЕСКИХ СТРАТЕГИЙ

Рассматриваются квазилинейные дифференциальные игры в классе стробоскопических стратегий сближения. Получены достаточные условия разрешимости задачи сближения. Основой для исследования указанной задачи является метод разрешающих функций.

Введение. Рассматриваются квазилинейные конфликтно управляемые процессы сближения с заданным цилиндрическим множеством. В отличие от [1], где сближение реализовано в классе квазистратегий, в данной работе при тех же предположениях для достижения цели использован более узкий класс, а именно, стробоскопические стратегии [2].

Постановка задачи и вспомогательные утверждения. Пусть R^n – вещественное n-мерное евклидово пространство. $R_+ = \{t : t \geq 0\}$ – положительная полуось, $K(R^n)$ – совокупность непустых компактов пространства R^n.

Движение объекта в пространстве R^n подчинено квазилинейному уравнению

$$\dot{z} = Az + \varphi(u,v), \quad u \in U, \quad v \in V, \qquad (1)$$

где A – постоянная квадратная матрица, функция $\varphi(u,v)$, $\varphi : U \times V \to R^n$, непрерывна по совокупности переменных, $U \in K(R^n)$, $V \in K(R^n)$.

Терминальное множество является цилиндрическим и имеет вид

$$M^* = M_0 + M, \qquad (2)$$

где M_0 – линейное подпространство из R^n, а $M \in K(L)$, L – ортогональное дополнение к M_0 в R^n.

Цель преследователя (u) – вывести траекторию процесса (1) на множество M^* за кратчайшее время, цель убегающего (v) – максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^*.

Управляющие воздействия игроков $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, и $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, являются измеримыми по Лебегу функциями. Обозначим Ω_V – совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$. Аналогично определяется Ω_U. Отображение, действующее из R^n в Ω_V, назовем программной стратегией убегающего, а ее конкретную реализацию при заданном начальном состоянии z процесса (1) назовем программным управлением. В процессе игры (1), (2) убегающий использует программные управления $v(\cdot) \in \Omega_V$.

Контруправлением преследователя, соответствующим начальному состоянию z, назовем функцию

$$u(\tau) = u\left(z, \tau, v(\tau)\right),\ u: R_+ \to V, \tag{3}$$

такую, что если $v(\cdot) \in \Omega_V$, то $u(\cdot) \in \Omega_U$. При этом следует отметить, что контруправление предписывается стробоскопической стратегией [2].

В этих предположениях, приняв сторону преследователя, найдем достаточные условия на параметры процесса (1), (2) для приведения траектории (1) на множество M^* за некоторое гарантированное время.

Приведем вспомогательные утверждения, которые понадобятся при доказательстве основного результата.

Лемма 1 [3, 4]. Пусть X – компакт из R^n, $T > 0$, $f(t,x)$, $f: [0,T] \times X \to R^n$, – измеримая по t и непрерывная по x функция, а $x(t): [0,T] \to X$ – измеримая функция. Тогда суперпозиция функций $f(t) = f(t, x(t))$ является измеримой функцией на интервале $[0,T]$, а отображение $F(t) = f(t, X)$ является измеримым многозначным отображением на интервале $[0,T]$.

Лемма 2 [3, 4]. Пусть $X \in K(R^n)$, многозначные отображения $F(x)$, $F: X \to K(R^n)$, $G(x)$, $G: X \to K(R^n)$, являются измеримыми, а функция $f(x,y)$, $x \in X$, $y \in G(x)$, $f(x,y) \in R^n$, измерима по X и непрерывна по Y. Тогда многозначное отображение $H(x)$, $H: X \to K(R^n)$, которое задается в виде

$$H(x) = \left\{ y \in G(x) : f(x,y) \in F(x) \right\},$$

является измеримым.

Пусть $X \in K(R^n)$. Обозначим X_1 – множество векторов $x \in X$, у которых первая компонента наименьшая, а через X_2 – множество векторов $x \in X_1$, у которых вторая компонента наименьшая и так далее до X_n. Очевидно, что множество X_n состоит из одной точки x^*, которую называют лексикографическим минимумом компакта X и обозначают $x^* = \operatorname{lex}\min X$.

Лемма 3 [2, 5]. Пусть $X \in K(R^n)$, $F(x)$, $F : X \to K(R^n)$ - измеримое отображение. Тогда селектор

$$f(x) = \operatorname{lex}\min F(x)\,,\ x \in X\,,$$

является измеримым.

Схема метода и основной результат. Обозначим π – ортопроектор, действующий из R^n в L, e^{At} – фундаментальная матрица однородной системы $\dot{z} = Az$, а $\varphi(U,v) = \{\varphi(u,v) : u \in V\}$.

Рассмотрим многозначные отображения

$$W(t,v) = \pi e^{At}\varphi(U,v)\,,\ \ W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t,v)\,.$$

Условие Понтрягина. Отображение $W(t) \neq \varnothing$ для $t \in R_+$.

Так как в силу предположений о параметрах процесса (1) многозначное отображение $W(t,v)$ непрерывно на множестве $R_+ \times V$, то при выполнении условия Понтрягина $W(t)$ полунепрерывно сверху и, следовательно, измеримо [3, 4]. На основании леммы 3 можно заключить, что существует по крайней мере один измеримый селектор $\gamma(t)$, $\gamma(t) \in W(t)$, $t \in R_+$, который к тому же является суммируемой на любом конечном интервале функцией. Множество таких селекторов обозначим Γ, зафиксировав один из них, положим

$$\xi(t,z,\gamma(\cdot)) = \pi e^{At} + \int_0^t \gamma(\tau)\, d\tau$$

и определим функцию

$$\alpha(t,\tau,v) = \sup\{\alpha \in R_+ : [W(t-\tau,v) - \gamma(t-\tau)] \cap \alpha[M - \xi(t,z,\gamma(\cdot))] \neq \varnothing\} \qquad (4)$$

для $0 \le \tau \le t$, $z \in R^n$, $v \in V$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

Отметим, что при $\xi(t,z,\gamma(\cdot)) \in M$ функция $\alpha(t,\tau,v) = +\infty$ для всех $\tau \in [0,t]$, $v \in V$. Если $\xi(t,z,\gamma(\cdot)) \notin M$, то функция $\alpha(t,\tau,v)$ принимает конечные значения и равномерно по $\tau \in [0,t]$, $v \in V$ ограничена.

Лемма 4. Пусть для конфликтно управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина и для некоторых $T > 0$, $z \in R^n$ и $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, $\xi(T,z,\gamma(\cdot)) \overline{\in} M$. Тогда для любой измеримой функции $v(\tau)$, $v : [0,T] \to V$, суперпозиция $\alpha(T,\tau,v(\tau)) = \alpha(\tau)$ является измеримой функцией по τ.

Доказательство. Пусть $v(\cdot) \in \Omega_V$ и $\xi(T,z,\gamma(\cdot)) \overline{\in} M$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathrm{A}(\tau, v(\tau)) = \{\alpha \in R_+ : [W(T-\tau, v(\tau)) - \gamma(T-\tau)] \cap \alpha[M - \xi(T,z,\gamma(\cdot))] \neq \varnothing\}\,.$$

Это отображение будет измеримо по τ, поскольку на основании леммы 1 отображение $W(T-\tau, v(\tau)) - \gamma(T-\tau)$ является измеримым по τ.

Измеримость функции $\alpha(\tau) = \alpha(T, \tau, v(\tau))$ по τ непосредственно следует из представления

$$\alpha(\tau) = C(\mathrm{A}(\tau, v(\tau)),\, 1),$$

где $C(X, p)$ – опорная функция множества X в направлении p [6].

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда функция $\inf\limits_{v \in V} \alpha(T, \tau, v)$ является измеримой функцией по τ, $\tau \in [0, T]$.

Введем отображение для $z \in R^n$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$

$$T(z, \gamma(\cdot)) = \left\{ t \in R^+ : \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, v) d\tau \geq 1 \right\}. \tag{5}$$

Если при некотором $t \in R^+$ интеграл в соотношении (5) принимает значение $+\infty$, то неравенство выполнено автоматически. Если же неравенство в (5) не имеет места ни при каком t, то положим $T(z, \gamma(\cdot)) = \varnothing$.

Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть для конфликтно управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, множество M – выпукло, для некоторого $z \in R^n$ и $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ множество $T(z, \gamma(\cdot)) \neq \varnothing$, $T \in T(z, \gamma(\cdot))$ и $T < +\infty$.

Тогда траектория процесса (1) может быть приведена из начального состояния z на терминальное множество (2) в момент T с помощью контруправления вида (3).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v : [0, T] \to V$ – произвольная измеримая функция.

Рассмотрим случай $\xi(T, z, \gamma(\cdot)) \overline{\in} M$. Тогда справедливо соотношение

$$\max_{\|p\|=1,\, p \in L} [\, (p, \xi(T, z, \gamma(\cdot))) - C(M, p)] > 0. \tag{6}$$

Введем функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(T, \tau, v) d\tau.$$

Функция $h(t)$ непрерывна, не возрастает и $h(0) = 1$. Из определения момента T следует, что существует такое t_*, $0 < t_* \leq T$, что

$$h(t_*) = 1 - \int_0^{t_*} \inf_{v \in V} \alpha(T, \tau, v) d\tau = 0. \tag{7}$$

Положим

$$\alpha(T,\tau)=\begin{cases}\inf\limits_{v\in V}\alpha(T,\tau,v),\ 0<\tau<t_*\\ \\ 0, \qquad\qquad t_*\le\tau\le T.\end{cases}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau)=\{u\in U:\pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u,v(\tau))-\gamma(T-\tau)\in\ \alpha(T,\tau)[M-\xi(T,z,\gamma(\cdot))]\},\ \tau\in[0,T]\,. \quad (8)$$

В силу лемм 1, 2, 4 и 5 отображение $U(\tau)$ будет измеримым по τ компактнозначным отображением. Поэтому на основании леммы 3 селектор

$$u(\tau)=\operatorname{lex}\min U\ (\tau) \quad (9)$$

является измеримой функцией, которую будем использовать в качестве управления на всем промежутке времени от 0 до T.

Покажем, что при этом траектория процесса (1) в момент T попадет на множество M^* при любых управлениях убегающего.

Из формулы Коши для процесса (1) следует представление

$$\pi z(T)=\pi e^{AT}z+\int_0^T\pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u(\tau),v(\tau))d\tau\,. \quad (10)$$

Прибавим и вычтем из правой части соотношения (10) вектор $\int\limits_0^T\gamma(T-\tau)\,d\tau$.

Тогда получаем

$$\pi z(T)=\xi(T,z,\gamma(\cdot))+\int_0^T\left[\pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u(\tau),v(\tau))-\gamma(T-\tau)\right]d\tau\,. \quad (11)$$

Из закона выбора управления преследователем (8), (9) следует справедливость включения

$$\pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u(\tau),v(\tau))-\gamma(T-\tau)\in\alpha(T,\tau)\,[M-\xi(T,z,\gamma(\cdot))]\,.$$

Проинтегрируем его от 0 до T. Тогда получаем

$$\int_0^T\left[\pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u(\tau),v(\tau))-\gamma(T-\tau)\right]d\tau\in\int_0^T\alpha(T,\tau)[M-\xi(T,z,\gamma(\cdot))]\,d\tau\,.$$

В силу выпуклости множества M последнее эквивалентно неравенству при любом $p\in L$

$$\left(p,\int_0^T\left[\pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u(\tau),v(\tau))-\gamma(T-(\tau)\right]d\tau\right)\le$$

$$\leq \int_{0}^{T} \alpha(T,\tau)\, d\tau\, [C(M,p) - (p, \xi(T,z,\gamma(\cdot)))]. \qquad (12)$$

Проведя несложные вычисления, с учетом соотношений (11) и (12), получаем при любом $p \in L$

$$(p, \pi z(T)) - C(M,p) \leq \max_{\|p\|=1,\, p\in L} \left[(p, \xi(T,z,\gamma(\cdot))) - C(M,p)\right] \left(1 - \int_{0}^{t_*} \alpha(T,\tau) d\tau\right).$$

Тогда, учитывая соотношения (6) и (7), имеем при любом $p \in L$

$$(p, \pi z(T)) - C(M,p) \leq 0 .$$

Следовательно, $\pi z(T) \in M$ и, поэтому $z(T) \in M^*$. Этим завершается доказательство в случае, когда $\xi(T,z,\gamma(\cdot)) \,\overline{\in}\, M$.

Пусть теперь $\xi(T,z,\gamma(\cdot)) \in M$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_0(\tau) = \left\{u \in U : \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u, v(\tau)) - \gamma(T-\tau) = 0\right\},\ \tau \in [0,T] .$$

В силу лемм 1 и 2 отображение $U_0(\tau)$ будет измеримым по τ, компактнозначным отображением. Поэтому на основании леммы 3 селектор

$$u(\tau) = \operatorname{lexmin} U_0(\tau)$$

является измеримой функцией, которую будем использовать в качестве управления преследователя на всем промежутке времени от 0 до T .

Тогда из представления (11) получаем включение $\pi z(T) \in M$, а следовательно $z(T) \in M$.

Теорема доказана.

А.О. Чикрій, Й.С. Раппопорт

ПРО ДОСТАТНІ УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ІГРОВИХ ЗАДАЧ ЗБЛИЖЕННЯ
У КЛАСІ СТРОБОСКОПІЧНИХ СТРАТЕГІЙ

Розглядаються квазілінійні диференціальні ігри в класі стробоскопічних стратегій зближення. Отримано достатні умови розв'язності задачі зближення. Основою для дослідження зазначеної задачі є метод розв'язувальних функцій.

A.A. Chikrii, I.S. Rappoport

SUFFICIENT PURSUIT CONDITIONS FOR SOLVABILITY OF GAME PURSUIT PROBLEMS IN THE CLASS OF STROBOSTROPHIC STRATEGIES

In this paper the quasilinear differential games of pursuit are treated in the class of strobostrophic strategies. Sufficient conditions for solvability of pursuit problem are obtained. This research is based on the method of resolving functions.

1. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – К.: Наук. думка, 1992. – 384 с.
2. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 65 с.
3. *Иоффе А.Д.*, *Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1979. – 479с.
4. *Благодатских В.И.*, *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН. – 1985. – 169. – С. 194–251.
5. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. – М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.
6. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 472 с.

Получено 28.02.2005